ATENUACIÓN Y DISPERSIÓN DE ONDAS SíSMICAS EN MEDIOS POROSOS SATURADOS ALTAMENTE HETEROGÉNEOS

por

J. Germán Rubino

Geofísico, Universidad Nacional de La Plata

Director: Dr. Juan Enrique Santos

Codirectora: Dra. Claudia Leonor Ravazzoli

Tesis presentada en cumplimiento de los requisitos
para obtener el grado de
Doctor en Geofísica

en

la Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas

Universidad Nacional de La Plata

Diciembre de 2008

© J. Germán Rubino, 2008

A mi familia

Resumen

En el presente trabajo de Tesis se estudia la propagación, atenuación y dispersión de ondas sísmicas en medios porosos saturados heterogéneos de matriz simple y compuesta, prestando especial atención al rol que tienen las ondas lentas de Biot en estos problemas. Con el objetivo de cuantificar el mecanismo mesoscópico de atenuación y dispersión en medios porosos saturados de matriz simple, se propone un procedimiento de elementos finitos para realizar simulación numérica de propagación de ondas a través de estos medios. Además, se presenta una metodología alternativa para estudiar estos fenómenos de un modo computacionalmente más conveniente. La misma permite obtener un sólido viscoelástico equivalente con la misma atenuación y dispersión de velocidad que experimentan las ondas clásicas al viajar a través de la muestra de roca considerada. Se aplicó esta metodología para analizar la sensibilidad de los efectos mesoscópicos a distintos tipos de heterogeneidades en las propiedades litológicas y en los fluidos porales de la roca. Asimismo, se propone su utilización mediante una técnica Monte Carlo para extraer el comportamiento estadístico de medios altamente heterogéneos que contienen inhomogeneidades caracterizadas por cierta densidad espectral. La eficiencia de esta metodología alternativa y la de la simulación numérica de propagación de ondas para analizar los efectos mesoscópicos es verificada comparando los resultados obtenidos en el caso de medios periódicos estratificados con los que resultan de la teoría analítica correspondiente (teoría de White). Por otro lado, se estudia la respuesta sísmica de medios porosos saturados de matriz compuesta. Se realiza un análisis cuantitativo de las particiones y conversiones de energía que tienen lugar cuando una onda compresional clásica incide sobre una interfase plana en estos medios, encontrándose que las ondas lentas intervienen significativamente en este proceso físico. Por último, se utilizan datos reales para calibrar el modelo teórico con el objetivo de analizar la respuesta sísmica de sedimentos que contienen hidratos de metano. Los experimentos numéricos realizados para analizar las particiones de energía en interfases planas y la simulación numérica de propagación de ondas en estos medios sugieren que fenómenos de scattering asociados con distribuciones altamente heterogéneas de hidratos de metano permitirían explicar los altos niveles de atenuación sísmica que se suelen observar en estos ambientes.

Abstract

In this work we study attenuation and velocity dispersion of seismic waves in fluid-saturated porous rocks, paying special attention to the role of Biots slow waves in these problems. With the aim of quantifying the mesoscopic effects, we propose a finite-element procedure to simulate the propagation of seismic waves through these media. In addition, since using numerical simulation of wave propagation to study mesoscopic effects is computationally expensive, we present an alternative methodology to obtain equivalent viscoelastic solids for heterogeneous fluid-saturated rocks. It consists in simulating oscillatory compressibility and shear tests in the space-frequency domain, allowing to obtain equivalent complex undrained plane-wave and shear moduli for representative rock samples. Also, since at mesoscopic scales rock parameter distributions are generally uncertain and of stochastic nature, the compressibility and shear tests are applied in a Monte Carlo fashion. This way, it is possible to define an average equivalent viscoelastic media by computing the moments of the equivalent phase velocities and inverse quality factors over a set of realizations of stochastic rock parameters described by a given spectral density distribution. Different numerical examples are presented to analyze the sensitivity of the mesoscopic effects to different kinds of heterogeneities in the rock and fluid properties. The second part of the thesis is dedicated to study the behaviour of fluid-saturated composite porous rocks in order to analyze the role of heterogeneities in their seismic responses. Particularly, we analyze the reflection and transmission of plane elastic waves at interfaces within these kinds of media. This analysis allows us to verify that the slow waves play an important role in these problems. Later, we propose a rock physics model to represent gas hydrate-bearing sediments and use real data to calibrate it. Numerical experiments show that, besides energy conversions to reflected and transmitted classical waves, important fractions of the energy of the propagating waves may be converted into Biot slow waves. In addition, numerical simulation of wave propagation allow us to observe that very important levels of attenuation can take place in sediments containing heterogeneous distributions of gas hydrates, suggesting that the associated scattering-type effects may be a key-parameter to understand the high sonic attenuation usually observed at gas hydrate-bearing sediments.

Indice

Resumen **v**

Abstract **vi**

1 Introducción general **1**

1.1 Descripción de los contenidos 4

2 Propagación de ondas en medios porosos saturados **7**

2.1 La teoría de Biot 8

2.2 Las ecuaciones de movimiento y los coeficientes viscodinámicos 10

2.3 Propiedades de las ondas sísmicas en un medio poroso saturado 14

2.3.1 Ondas de corte 16

2.3.2 Ondas compresionales: existencia de ondas rápidas y lentas 22

2.3.3 Desacople de los modos compresionales 32

2.3.4 Carácter difusivo de las ondas lentas en el rango de bajas frecuencias 37

3 Efectos mesoscópicos: Simulación numérica de propagación de ondas **43**

3.1 Revisión de la teoría de White 45

3.1.1 Ejemplos numéricos 49

3.2 Propagación de ondas en medios que contienen heterogeneidades de mesoescala 51

3.2.1 Algoritmo numérico 53

3.2.2 Experimentos numéricos 58

4 Efectos mesoscópicos: Sólidos viscoelásticos equivalentes **67**

4.1 Experimentos numéricos para obtener los módulos complejos equivalentes 68

4.1.1 Validación de los procedimientos 73

4.2 Análisis paramétrico de los efectos mesoscópicos 75

4.3 Comportamiento estadístico de medios altamente heterogéneos 91

4.3.1 Aplicación del procedimiento Monte Carlo: comportamiento estadístico de rocas saturadas con distribuciones irregulares de agua y gas 93

5 Extensión de la teoría de Biot para medios porosos compuestos 101

5.1 Breve descripción de la extensión de la teoría de Biot para medios compuestos 102

5.2 Las ecuaciones de movimiento 105

5.3 Propiedades de las ondas sísmicas en medios porosos compuestos saturados 108

5.3.1 Ondas compresionales 108

5.3.2 Ondas de corte 120

5.4 Reflexión y transmisión de ondas en una interfase plana en medios compuestos 127

5.5 Consideraciones energéticas en el medio compuesto 133

5.5.1 Definición del vector Umov-Poynting 133

5.5.2 Coeficientes energéticos de reflexión y transmisión 136

5.5.3 Análisis de conversiones de energía en discontinuidades planas en una arenisca parcialmente congelada 138

6 Comportamiento sísmico de sedimentos con hidratos de metano 145

6.1 Principales características de los hidratos de metano 145

6.2 Indicadores sísmicos de la presencia de hidratos de metano 149

6.3 Calibración del modelo utilizando perfiles del Pozo Mallik 5L-38 151

6.4 Propagación de ondas en sedimentos que contienen hidratos de metano . 159

6.4.1 Velocidades compresionales y de corte 160

6.4.2 Conversiones de energía en discontinuidades planas 163

6.4.3 Pérdidas de amplitudes en sedimentos que contienen distribuciones altamente heterogéneas de hidratos de metano 169

7 Conclusiones 179

Agradecimientos 183

Apéndices 185

A Aproximación numérica de los experimentos de compresión y de corte 185
A.1 Una formulación variacional 185
A.2 Los procedimientos de elementos finitos 188
A.3 Estimación de los errores para los procedimientos de elementos finitos . . 190

Referencias 193

"Toda nuestra ciencia,
comparada con la realidad,
es primitiva e infantil...
y sin embargo es lo más preciado
que tenemos".

Albert Einstein (1879-1955).

Capítulo 1

Introducción general

El análisis de la propagación de ondas sísmicas a través de nuestro planeta ha brindado información muy valiosa, permitiendo determinar, entre otras características, la ubicación de interfases que separan distintos tipos de materiales, como así también el estado físico y propiedades mecánicas de los mismos. De hecho, las ondas sísmicas de origen natural y artificial han permitido obtener gran parte del conocimiento actual del interior terrestre, con una resolución y exactitud mucho mayor que la que permiten los otros métodos geofísicos existentes.

A pesar de que en China desarrollaron el primer detector de ondas sísmicas alrededor del año 132, no fue sino hasta el siglo 17 que comenzaron a constituirse las bases teóricas de la sismología. En tal sentido, en 1660 Hooke propuso su ley de proporcionalidad entre esfuerzos y deformaciones. Casi dos siglos después, Navier y Cauchy desarrollaron las ecuaciones para la teoría de la elasticidad, mientras que a principios del siglo 19 las leyes de conservación de la energía y de la masa fueron combinadas para obtener las ecuaciones de movimiento para sólidos elásticos. En 1830, Poisson utilizó estas ecuaciones y las relaciones constitutivas para demostrar que dos tipos de ondas fundamentales se pueden propagar a través del interior de sólidos homogéneos. Simultáneamente se lograron importantes avances en el desarrollo de instrumental muy preciso para registrar las señales generadas por terremotos. De hecho, hacia fines del siglo 19 ya fue posible registrar las ondas sísmicas producidas por terremotos muy lejanos con gran exactitud.

Estos progresos que se produjeron tanto en la teoría de las ondas sísmicas como en el desarrollo instrumental, fueron utilizados luego con fines exploratorios. En este sentido, en 1845 Mallet realizó experimentos con fuentes sísmicas artificiales con el objetivo de medir velocidades sísmicas del subsuelo [87], y en el año 1899 Knott desarrolló la teoría de reflexión y refracción en una interfase plana [50], pilar fundamental del método sísmico. Durante la primera guerra mundial, se estimuló el desarrollo de la sísmica de exploración con el objetivo de localizar armamentos enemigos muy pesados a partir del arribo de las ondas sísmicas generadas por el violento retroceso de las armas debido a los disparos

[87]. A pesar de que estos intentos no tuvieron los resultados esperados, constituyeron pasos fundamentales para que la sísmica de exploración pudiera finalmente ser aplicada con éxito. De hecho, varios investigadores vinculados con estos proyectos luego fueron pioneros en el desarrollo de los instrumentos y teorías de la sísmica de exploración [87]. Como resultado de estas investigaciones, en el año 1922 se comienza a utilizar el método sísmico de refracción en Méjico y en la costa estadounidense del Golfo de Méjico, con el objetivo de detectar domos de sal asociados con hidrocarburos. Pocos tiempo después, en el año 1927, se comienza a utilizar comercialmente el método sísmico de reflexión en la zona de Oklahoma, Estados Unidos [87], y en pocos años se convierte en el método dominante en la exploración de hidrocarburos.

Aunque los métodos sísmicos se han utilizado desde entonces para el delineamiento espacial de yacimientos de hidrocarburos, en los últimos años se los ha empezado a considerar con el fin de obtener información muy útil relacionada con las propiedades físicas a escala poral de la roca (porosidad, permeabilidad, fluidos saturantes, grado y tipo de saturación, litología, etc). Esto se debe principalmente a los avances más recientes en distintos campos de la ciencia, como así también al incremento en la cantidad y calidad de los datos sísmicos registrados y a los avances tecnológicos en las computadoras utilizadas para almacenar, procesar y visualizar los enormes volúmenes de información involucrados. Frente a este complejo desafío que enfrenta la sísmica de prospección, resulta de vital importancia la consideración de un modelo teórico de roca que considere su naturaleza porosa, la presencia de uno o varios fluidos saturantes y los efectos que estas características de microescala poseen sobre la respuesta sísmica de la roca a escala macroscópica. En este sentido, los *medios porosos saturados* representan satisfactoriamente las principales características observadas en las rocas que usualmente se encuentran en las zonas de la corteza terrestre de interés exploratorio.

Las leyes clásicas de la sismología fueron en general desarrolladas para materiales continuos, elásticos y homogéneos, y entonces su aplicación a medios porosos requiere una adaptación. Los medios porosos utilizados para representar rocas de la corteza son multifásicos por naturaleza. Por un lado, porque su fracción sólida (matriz) está constituida por granos cuyas composiciones químicas o propiedades cristalinas son diferentes. Por otro lado, porque en general el espacio poral de la matriz sólida se encuentra ocupado por uno o más fluidos. Estas heterogeneidades microscópicas inducen un comportamiento físico a nivel macroscópico muy complejo y sensible a pequeñas variaciones

en el contenido de fluido o en la estructura sólida. Un entendimiento profundo de estos efectos permitiría, en principio, obtener información acerca de las propiedades litológicas y de los fluidos saturantes de la roca en estudio a partir de su respuesta sísmica. Este interés condujo hace varias décadas atrás a Biot a plantear su teoría de propagación de ondas en medios porosos saturados [6, 7, 8]. Esta teoría cuenta con la aceptación general de los científicos en la materia, y parte de un modelo muy simple en el que la matriz porosa es considerada como un agregado homogéneo e isótropo de partículas elásticas, cuyos poros interconectados se encuentran completamente saturados por un fluido viscoso compresible. La deformación que resulta del pasaje de una onda sísmica a través del medio se debe al movimiento acoplado de ambas fases, y en base a este hecho Biot predijo la existencia de un modo de propagación adicional, además de las ondas compresional y de corte correspondientes a los modos fundamentales hallados por Poisson en el año 1830. La onda adicional que surge en la teoría de Biot se denomina *onda lenta*, mientras que a los otros dos modos los llamaremos *ondas clásicas*. La onda lenta exhibe un comportamiento muy distinto al de las ondas clásicas, y la comprobación experimental de su existencia ha sido presentada por Plona y Johnson [68].

Ciertos medios que suelen encontrarse en ambientes de interés exploratorio, tales como areniscas arcillosas, suelos congelados y sedimentos que contienen hidratos de metano en sus poros, poseen una matriz compuesta por dos fases sólidas con distintas propiedades. Debido a que las dos matrices sólidas pueden sufrir distintos desplazamientos y deformaciones al aplicar sobre el medio un determinado esfuerzo, no es estrictamente correcto utilizar la teoría de Biot para representar la respuesta sísmica de estos ambientes. Por esta razón, Leclaire et al. [55] propusieron una teoría para medios porosos parcialmente congelados, bajo la suposición de que siempre existe una capa muy fina de agua líquida alrededor de las partículas de roca que impide el contacto de las mismas con la matriz de hielo. Pocos años después, Carcione y Tinivella [14] modificaron esta teoría para incluir la interacción entre las partículas de hielo y roca. Más recientemente, Santos et al. [86] generalizaron el trabajo de Carcione y Tinivella [14] para incluir el caso de porosidad no uniforme. El principal resultado de estas teorías es que a través de estos medios compuestos se pueden propagar tres ondas compresionales y dos ondas de corte [55, 14, 86]. La verificación experimental de la existencia de algunas de las ondas lentas que surgen de estas teorías fue realizada por Leclaire et al. [56].

En los medios porosos saturados, tanto de matriz simple como compuesta, la

interacción de las ondas clásicas con las heterogeneidades del medio genera ondas lentas por un proceso de conversión de energía entre la onda incidente y las perturbaciones originadas. El análisis de los efectos que estas conversiones de energía tienen sobre la onda clásica primaria que viaja a través del medio poroso heterogéneo constituye la principal motivación de esta Tesis.

1.1 Descripción de los contenidos

El objetivo principal de esta Tesis consiste en analizar la atenuación y dispersión que experimentan las ondas sísmicas clásicas que se propagan a través de medios porosos saturados altamente heterogéneos. En este análisis se presta particular atención al papel que tienen las ondas lentas que se generan en las heterogeneidades. Los modelos teóricos utilizados para desarrollar esta investigación son el propuesto por Biot [6, 7, 8] y la extensión del modelo de Biot para matriz compuesta presentada por Santos et al. [86].

Particularmente, el Capítulo 2 contiene una breve descripción de la teoría de Biot y un análisis detallado de las principales propiedades de las ondas que de acuerdo con esta teoría se pueden propagar a través de los medios porosos saturados. Se ha brindado principal atención al comportamiento difusivo que presenta la onda lenta en el rango de bajas frecuencias.

En el Capítulo 3 se introduce el mecanismo mesoscópico de atenuación y dispersión (efectos mesoscópicos). Estos efectos se deben a la presencia de heterogeneidades de escalas mesoscópicas en el medio, es decir, heterogeneidades de tamaños mayores que la escala poral pero mucho menores que las longitudes de onda predominantes, y se producen debido a conversiones de energía entre la onda clásica primaria y las ondas lentas que se generan en tales heterogeneidades. Inicialmente en este capítulo se presenta la teoría analítica de White et al. [89], que permite cuantificar estos efectos en el caso de medios periódicos estratificados. Luego, se propone un procedimiento de elementos finitos para realizar simulación numérica de propagación de ondas en medios porosos saturados heterogéneos, con el objetivo de cuantificar los efectos mesoscópicos del medio por el cual se propaga la perturbación clásica generada en la fuente. Para confirmar que la propagación de ondas permite evaluar correctamente los efectos mesoscópicos, se utiliza el algoritmo propuesto en el caso de medios estratificados y para frecuencias sísmicas, y se verifica que los efectos mesoscópicos determinados a partir de las simulaciones numéricas

se correspondan con los obtenidos utilizando la teoría analítica de White et al. [89].

Debido al enorme costo computacional que implica realizar simulación numérica de propagación de ondas para estudiar los efectos mesoscópicos, en el Capítulo 4 se propone una metodología computacional alternativa para estudiar este fenómeno. La misma consiste en aplicar esfuerzos armónicos compresionales y de corte sobre muestras de roca representativas, y a partir del cambio de volumen y de forma que experimentan se determinan cuantitativamente los efectos mesoscópicos. Se realiza la validación de esta metodología comparando los resultados que surgen de la misma en el caso de medios periódicos estratificados con los que se obtienen con la teoría analítica de White [89]. Luego, se la utiliza para realizar un análisis de sensibilidad de los efectos mesoscópicos a distintos tipos de heterogeneidades en la matriz de roca y en los fluidos porales. Además, se propone una técnica Monte Carlo para extraer el comportamiento estadístico de medios altamente heterogéneos que contienen inhomogeneidades aleatorias caracterizadas por cierta densidad espectral.

El Capítulo 5 está íntegramente dedicado al modelo desarrollado por Santos et al. [86] para la propagación de ondas en un medio de matriz sólida compuesta saturada. En tal sentido, se presenta este modelo y se analizan las principales propiedades de las ondas que de acuerdo con esta teoría se pueden propagar en estos ambientes. Luego, se realiza un análisis cuantitativo de las conversiones de energía que se producen cuando una onda compresional clásica incide sobre una heterogeneidad plana en estos medios.

Finalmente, en el Capítulo 6 se utilizan los resultados obtenidos en el Capítulo 5 para analizar la respuesta sísmica de sedimentos que contienen hidratos de metano en sus poros. Con este fin, se consideran datos reales provenientes del pozo Mallik 5L-38 (Delta del Mackenzie, Canadá) para calibrar el modelo teórico utilizado. Luego, se estudian las conversiones de energía que ocurren cuando una onda clásica incide sobre una interfase plana determinada por una discontinuidad en la saturación de hidrato. A continuación, se realiza simulación numérica de propagación de ondas en sedimentos que contienen distribuciones altamente heterogéneas de hidratos de metano para analizar los efectos que las particiones de energía que ocurren en las heterogeneidades irregulares tienen sobre las ondas clásicas generadas en la fuente. Estas particiones incluyen conversiones de la energía de la onda clásica primaria hacia los cinco tipos de ondas que se pueden propagar a través de estos medios. Estos resultados sugieren que fenómenos de "scattering" asociados con distribuciones altamente heterogéneas de hidratos de metano en el espacio poral de

la roca permitirían explicar los altos niveles de atenuación sísmica que se suelen observar en estos ambientes.

Esta Tesis también contiene un apéndice, en el que se detalla el procedimiento numérico utilizado para aproximar las soluciones de los problemas de condiciones de contorno que se formulan en el Capítulo 4.

Capítulo 2

Propagación de ondas en medios porosos saturados

Un medio poroso saturado es un sólido que contiene una red interconectada de espacio poral saturado por uno o varios fluidos. A la fase sólida porosa se la suele llamar *matriz*, y se asume que tanto esta fase como el espacio poral son continuos. Muchos materiales tales como rocas, suelos, tejidos biológicos, cementos y ciertos alimentos, entre otros, pueden ser representados utilizando medios porosos. En particular, las rocas saturadas con agua, petróleo y/o gas pueden describirse como medios porosos saturados, y por esta razón el estudio de la respuesta elástica de los mismos es un tema de gran relevancia en Geofísica de Exploración y otras ramas de la Ciencia.

Los medios porosos saturados son muy heterogéneos a nivel microscópico, con un comportamiento macroscópico muy complejo que depende de las propiedades físicas de las distintas fases que los componen. El interés en incluir dichas propiedades en las ecuaciones que gobiernan la propagación de ondas elásticas a través de estos medios se debe a que su respuesta sísmica refleja el comportamiento a escala poral de las distintas fases. Este hecho sugiere que un entendimiento profundo de estas relaciones permitiría obtener, a partir del comportamiento a escala macroscópica, valiosa información a nivel microscópico, tal como la discriminación, distribución y grado de saturación de los fluidos porales, permeabilidad y porosidad de la matriz sólida, etc.

Kosten y Zwikker [52] y Frenkel [34], en trabajos independientes, fueron los primeros autores en proponer ecuaciones para describir el movimiento promedio de las fases sólida y fluida de un medio poroso. Poco tiempo después, asumiendo que los conceptos y principios de la mecánica del continuo pueden aplicarse a las magnitudes medibles a escala macroscópica, Biot [6, 7, 8] formuló su teoría general de la deformación y propagación de ondas elásticas en medios porosos saturados (*medios de Biot*).

Más recientemente las técnicas de homogenización, que permiten pasar del comportamiento microscópico al macroscópico, fueron utilizadas para obtener las leyes que gobiernan la propagación de ondas en estos medios [25, 70, 2, 10]. Lo interesante de estos trabajos, más formales y matemáticamente rigurosos, es que avalan los resultados

obtenidos por Biot utilizando la mecánica del continuo y asumiendo la validez de las ecuaciones de Lagrange.

La teoría de Biot es la más aceptada y utilizada para analizar la propagación de ondas elásticas en medios porosos saturados, posiblemente debido a su análisis detallado y claridad conceptual, y es la que utilizaremos a lo largo de la primera parte de esta Tesis. Dado que la misma describe la respuesta de un sistema compuesto por una fase sólida y una fluida, la deformación debida al pasaje de una onda sísmica se explica por un movimiento acoplado entre ambas fases. En base a este hecho, Biot encontró el resultado más interesante de esta teoría, que consiste en la existencia de una onda compresional adicional, además de las ondas compresional y de corte clásicas similares a las que se propagan a través de un sólido elástico.

En este capítulo presentaremos la teoría de Biot y analizaremos las principales propiedades de los tres tipos de ondas que se pueden propagar a través de un medio poroso saturado.

2.1 La teoría de Biot

Consideremos la propagación de ondas elásticas a través de un sólido poroso saturado por un único fluido, y asumamos que el material es estadísticamente isótropo, de modo que para todas las secciones transversales la proporción entre área de sólido y líquido puede suponerse constante. Llamemos ϕ a la porosidad efectiva, definida como el cociente entre el volumen de espacio poral interconectado y el volumen total de agregado. Supongamos que la matriz es elástica y que el fluido saturante es viscoso, newtoniano y compresible, y que puede moverse respecto de la matriz dando lugar a un fenómeno de fricción viscosa. Asumamos también que tanto la fase sólida como la fluida sufren desplazamientos pequeños, hipótesis que normalmente se satisface en aplicaciones geofísicas relacionadas con propagación de ondas elásticas.

Tomemos un volumen elemental Ω de material poroso saturado, centrado en la posición x y de tamaño grande respecto de la medida de los poros pero mucho más pequeño que las longitudes de onda asociadas con las perturbaciones que se están propagando a través del medio. Entonces, si $\omega = 2\pi f$ es la frecuencia angular de la onda, sean $u^s(x,\omega) = (u_1^s, u_2^s, u_3^s)$ el desplazamiento promedio de las partículas de la matriz sólida de Ω para la frecuencia angular ω y $\tilde{u}^f(x,\omega)$ el desplazamiento promedio de la fase

fluida de Ω. Es importante remarcar aquí que conceptual y matemáticamente el considerar una única frecuencia ω (onda monocromática) equivale a trabajar en el dominio espacio-frecuencia. Es decir, trabajaremos con la transformada de Fourier de los distintos parámetros respecto de la variable temporal, y debe entenderse de esta manera de aquí en adelante.

Definamos además un vector desplazamiento relativo del fluido,

$$u^f = \phi(\tilde{u}^f - u^s), \tag{2.1}$$

que representa el flujo de fluido relativo al sólido en términos de volumen por unidad de área de agregado. Su derivada temporal $\dot{u}^f(x,t)$ se denomina *velocidad de infiltración*. Es interesante notar que para cualquier volumen macroscópico de material poroso H con frontera ∂H, el cambio en el contenido de fluido está dado por

$$\int_{\partial H} u^f \cdot \nu dS = \int_H \nabla \cdot u^f dV, \tag{2.2}$$

donde ν es el versor normal unitario exterior a ∂H. De esta igualdad podemos observar que el escalar

$$\xi = -\nabla \cdot u^f \tag{2.3}$$

mide el cambio local en el contenido de fluido poral.

Biot [8] definió un *tensor de tensión total* σ_{ij}, que tiene en cuenta las tensiones actuantes sobre las parte sólida y fluida del agregado. Si σ^s_{ij} es el tensor asociado con la fuerza actuante sobre la fase sólida por unidad de área del agregado, y si p_f es el cambio en la presión de la fase fluida debido al pasaje de la perturbación, entonces

$$\sigma_{ij} = \sigma^s_{ij} - \phi p_f \delta_{ij}. \tag{2.4}$$

Por otra parte, las deformaciones sufridas por la fase sólida al pasar la onda elástica quedan representadas por el tensor lineal de deformaciones $\epsilon_{ij}(u^s)$, definido como

$$\epsilon_{ij}(u^s) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^s_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u^s_j}{\partial x_i}\right). \tag{2.5}$$

Entonces, siguiendo el trabajo de Biot [8], las relaciones constitutivas pueden escribirse como

$$\sigma_{ij}(u) = 2\mu\, \varepsilon_{ij}(u^s) + \delta_{ij}(\lambda_c \nabla \cdot u^s - \alpha\ K_{av}\, \xi), \tag{2.6}$$

$$p_f(u) = -\alpha\ K_{av}\, \nabla \cdot u^s + K_{av}\xi. \tag{2.7}$$

El coeficiente μ es el módulo de corte del medio poroso saturado, y de acuerdo con la hipótesis de Gassmann [36] es considerado igual al módulo de corte de la matriz seca. Por otro lado,

$$\lambda_c = K_c - \frac{2}{\mathbb{E}}\mu, \tag{2.8}$$

donde K_c es el módulo de volumen del medio poroso saturado cerrado (módulo de Gassmann) y $\mathbb{E}$ es la dimensión Euclídea. Las constantes λ_c y μ son análogas a las constantes de Lamé de un sólido elástico.

De acuerdo con [36], los coeficientes que intervienen en las ecuaciones (2.6) y (2.7) pueden obtenerse mediante las relaciones

$$\alpha = 1 - \frac{K_m}{K_s}, \tag{2.9}$$

$$K_{av} = \left(\frac{\alpha - \phi}{K_s} + \frac{\phi}{K_f}\right)^{-1} \tag{2.10}$$

$$K_c = K_m + \alpha^2 K_{av}, \tag{2.11}$$

donde K_s, K_m y K_f denotan el módulo de volumen de los granos sólidos, de la matriz seca y del fluido saturante, respectivamente. El coeficiente α se conoce como *coeficiente de Biot o de esfuerzo efectivo del agregado.* Definamos también el *módulo de onda plana cerrado* M_c, como

$$M_c = \lambda_c + 2\mu. \tag{2.12}$$

2.2 Las ecuaciones de movimiento y los coeficientes viscodinámicos

Con el objeto de analizar la propagación de ondas elásticas a través de medios porosos saturados, Biot [6, 7] obtuvo las ecuaciones de movimiento postulando la validez de los conceptos de la mecánica del continuo y de las ecuaciones de Lagrange a escala macroscópica.

Para describir la masa contenida en el volumen elemental Ω, llamemos ρ_s y ρ_f a la densidad de los granos sólidos y del fluido saturante, respectivamente. Entonces, la densidad del agregado sólido-fluido está dada por

$$\rho_b = (1 - \phi)\rho_s + \phi\rho_f. \tag{2.13}$$

Definamos una matriz de masa definida positiva $\mathcal{P}$ y una matriz no negativa $\mathcal{B}$ en la forma

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} \rho_b I & \rho_f I \\ \rho_f I & gI \end{pmatrix}, \tag{2.14}$$

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0I & 0I \\ 0I & bI \end{pmatrix}, \tag{2.15}$$

donde I es la matriz identidad en $\mathbb{R}^{\mathbb{E}\times\mathbb{E}}$. El parámetro g es el *coeficiente de acoplamiento de masa*, y representa los efectos inerciales asociados con interacciones dinámicas entre la fase sólida y la fluida. Por otra parte, el parámetro b se denomina *coeficiente de fricción viscosa*, e incluye los efectos de acoplamiento viscoso entre tales fases.

Luego, introduciendo un operador diferencial de segundo orden $\mathcal{L}(u)$, dado por

$$\mathcal{L}(u) = \left(\nabla \cdot \sigma(u), -\nabla p_f(u)\right)^t, \tag{2.16}$$

en ausencia de fuerzas externas las ecuaciones de movimiento de Biot en el dominio del espacio y de las frecuencias pueden escribirse de la siguiente forma [6, 7]

$$-\omega^2 \mathcal{P} u(x,\omega) + i\omega \mathcal{B} u(x,\omega) - \mathcal{L}(u(x,\omega)) = 0. \tag{2.17}$$

Los parámetros de fricción viscosa y acoplamiento de masa en función de la frecuencia (coeficientes viscodinámicos) se obtienen mediante las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} b(\omega) &= Re\left(\frac{\eta}{\kappa_d(\omega)}\right), \\ g(\omega) &= \frac{1}{\omega} Im\left(\frac{\eta}{\kappa_d(\omega)}\right), \end{aligned} \tag{2.18}$$

donde η es la viscosidad del fluido y $\kappa_d(\omega)$ es la *permeabilidad dinámica*, una función compleja definida por Johnson et al. [49], dada por

$$\kappa_d(\omega) = \kappa \left(\sqrt{1 + i\frac{4}{n_j}\frac{\omega}{\omega_j}} + i\frac{\omega}{\omega_j}\right)^{-1}. \tag{2.19}$$

En la expresión anterior, κ es la permeabilidad absoluta de la roca y n_j es un parámetro relacionado con la permeabilidad, el factor de formación eléctrico, y la superficie y el volumen poral (ver Johnson et al. [49] para la definición matemática precisa de este parámetro). De acuerdo con Pride [76], experimentalmente se observa que $n_j = 8$ es un valor adecuado para materiales poco consolidados y arenas limpias, además de ser el

resultado teórico obtenido para medios porosos que poseen poros modelados utilizando tubos cilíndricos. Por otra parte, este parámetro tiene un valor mucho menor en el caso de areniscas arcillosas.

Respecto de la frecuencia ω_j, esta es conocida como *frecuencia crítica* y es la frecuencia para la cual el espesor de la capa límite es del orden del radio poral. Recordemos que si las paredes de un tubo cilíndrico que contiene en su interior un fluido viscoso oscilan armónicamente en la dirección paralela a la longitud del tubo, se genera una perturbación armónica en el fluido que viaja en la dirección del eje del mismo. Por efecto de la viscosidad, el desplazamiento relativo del fluido respecto del sólido será nulo en el contacto sólido-fluido, y aumentará su magnitud con la distancia medida desde la pared del tubo. El espesor de la capa límite se define como la distancia desde la pared hasta la región del tubo donde la velocidad relativa del fluido es muy próxima a su valor máximo. Para un medio poroso saturado por un fluido viscoso, el espesor de la capa límite se conoce en inglés como *"viscous skin depth"*, y se puede expresar como [67, 9]

$$d(\omega) = \sqrt{\frac{2\eta}{\omega\rho_f}}. \tag{2.20}$$

El fluido que se encuentra en esta capa se ve fuertemente afectado por las fuerzas de fricción viscosa, mientras que el que se encuentra más allá de la misma prácticamente no está afectado por su viscosidad, y se comporta como un fluido ideal. De la ecuación anterior podemos observar que el espesor de capa límite viscosa es muy importante para bajas frecuencias, y disminuye con la frecuencia. Así, en el límite de bajas frecuencias la totalidad del fluido poral se encuentra fuertemente afectado por su viscosidad, y entonces se produce un movimiento sincrónico de todo el material, fenómeno conocido como *compatibilidad dinámica*. Si exigimos que para la frecuencia crítica el espesor de la capa límite viscosa sea del orden del radio poral r [67, 49, 76], utilizando la fórmula (2.20) obtenemos

$$\omega_j \approx \frac{2\eta}{\rho_f r^2}. \tag{2.21}$$

De análisis previo, es interesante notar que para frecuencias menores que la crítica las fuerzas viscosas predominan por sobre las inerciales, y por esta razón el desplazamiento relativo del fluido respecto del sólido es despreciable. En este rango de bajas frecuencias el comportamiento del fluido es de tipo laminar. Para frecuencias por encima del valor

crítico, las fuerzas inerciales predominan por sobre las viscosas, y entonces el desplazamiento relativo del fluido respecto del sólido comienza a ser apreciable. En este rango de altas frecuencias el flujo deja de ser de tipo laminar, y se establece un *flujo potencial*, con los efectos de la viscosidad restringidos a una región muy delgada en contacto con las paredes del espacio poral. Para frecuencias del orden del valor crítico se produce un equilibrio entre las fuerzas viscosas e inerciales.

Diversos autores han expresado la frecuencia crítica en función del *factor de estructura o tortuosidad* S de la roca en la forma [48, 31]

$$\omega_j = \frac{\eta\phi}{\kappa\rho_f S}. \tag{2.22}$$

El factor de estructura es un parámetro adimensional que se asocia con la forma de los poros, y se puede relacionar con la conductividad eléctrica del medio poroso: si asumimos que la matriz sólida es un aislante eléctrico, la conductividad eléctrica c_b de la roca saturada es proporcional a la conductividad eléctrica del fluido saturante c_f a través de un factor geométrico F conocido como *factor de formación eléctrico*, mediante la relación $c_b = c_f/F$. En función de este parámetro se puede expresar [49, 5]

$$S = F\phi \tag{2.23}$$

y reemplazando en la expresión (2.22), se encuentra la expresión [49]

$$\omega_j = \frac{\eta}{\rho_f F\kappa}. \tag{2.24}$$

Por otra parte, de acuerdo con la ley de Archie $F = \phi^{-m}$, donde el *exponente de cementación* m se relaciona con la topología de los poros de la muestra. En general, m tiene valores cercanos a 1.5 en arenas limpias, a 2 en arenas arcillosas, y cercanos a 1 en rocas fracturadas.

Como mencionamos previamente, para frecuencias por debajo del valor ω_j se puede suponer que el movimiento relativo del fluido en los poros es de tipo laminar (tipo Poiseuille), y bajo esta suposición los coeficientes de acoplamiento de masa y de fricción viscosa pueden tomarse independientes de la frecuencia. En este sentido, algunos autores estimaron heurísticamente estos coeficientes en el límite de bajas frecuencias [29, 5, 31]

$$g_0 = \frac{S\rho_f}{\phi}, \qquad b_0 = \frac{\eta}{\kappa}. \tag{2.25}$$

En general el valor de ω_j es mucho mayor que las frecuencias que usualmente se utilizan en sísmica de exploración (de pocos Hz a algunos KHz), y entonces las expresiones (2.25) son aceptables en la mayoría de las aplicaciones geofísicas.

2.3 Propiedades de las ondas sísmicas en un medio poroso saturado

Con el objetivo de analizar las propiedades de las ondas sísmicas que se pueden propagar en un medio poroso saturado, consideramos un medio de Biot *homogéneo*. De la divergencia de (2.6) es muy simple demostrar que en el caso homogéneo,

$$\nabla \cdot \sigma(u) = M_c \nabla \left(\nabla \cdot u^s\right) + \alpha K_{av} \nabla \left(\nabla \cdot u^f\right) - \mu \nabla \times \left(\nabla \times u^s\right), \tag{2.26}$$

y utilizando esta igualdad y (2.7) en la ecuación (2.17) obtenemos las siguientes ecuaciones de movimiento para medios homogéneos

$$-\omega^2 \rho_b u^s - \omega^2 \rho_f u^f = M_c \nabla \left(\nabla \cdot u^s\right) + \alpha K_{av} \nabla \left(\nabla \cdot u^f\right) - \mu \nabla \times \left(\nabla \times u^s\right), \tag{2.27}$$

$$-\omega^2 \rho_f u^s - \omega^2 g u^f + i\omega b u^f = \alpha K_{av} \nabla \left(\nabla \cdot u^s\right) + K_{av} \nabla \left(\nabla \cdot u^f\right). \tag{2.28}$$

Siguiendo un razonamiento similar al que Pride presentó en [76], consideremos una onda plana, la cual, por definición, producirá en el material una respuesta del tipo

$$u^s = A e^{i(\omega t - \bar{k} \cdot \bar{r})} \breve{u}_s, \tag{2.29}$$

$$u^f = B e^{i(\omega t - \bar{k} \cdot \bar{r})} \breve{u}_f. \tag{2.30}$$

En estas igualdades, $\breve{u}_s$ y $\breve{u}_f$ son vectores unitarios que definen la polarización de la respuesta, y $\bar{r}$ denota el vector posición de la partícula, donde en este contexto denominamos partícula a un volumen elemental del medio poroso saturado. Además, $\bar{k}$ es el vector de onda, el cual se puede escribir como

$$\bar{k} = \omega s(\omega) \breve{k}, \tag{2.31}$$

donde $s(\omega)$ es un escalar complejo denominado *retardo* (slowness), y $\breve{k}$ es un vector unitario en la dirección de propagación. El retardo contiene la información de la velocidad de fase y de la atenuación de la onda. Para observar esto, consideremos una onda que se propaga en la dirección del eje x; en este caso,

$$\begin{aligned} u^s &= A e^{\omega Im(s) x} e^{i\omega(t - Re(s)x)} \breve{u}_s, \\ u^f &= B e^{\omega Im(s) x} e^{i\omega(t - Re(s)x)} \breve{u}_f. \end{aligned} \tag{2.32}$$

De esta ecuación podemos ver que la parte imaginaria del retardo controla el decaimiento exponencial de la amplitud de la onda, y debe ser negativa para que la amplitud disminuya con la distancia. Por otra parte, la parte real del retardo está relacionada con la velocidad de fase $v(\omega)$ mediante

$$v(\omega) = 1/Re(s(\omega)). \tag{2.33}$$

El retardo permite obtener el *factor de calidad* Q, mediante la relación [76]

$$Q^{-1}(\omega) = -2\frac{Im(s(\omega))}{Re(s(\omega))}. \tag{2.34}$$

Por definición, el inverso del factor de calidad representa el cociente entre la pérdida de energía en un ciclo y la energía de deformación máxima almacenada en el volumen (y dividido por 2π) [1]. En consecuencia, el factor de calidad da una medida de la elasticidad del medio: a mayor Q, menores pérdidas de energía y amplitud.

Reemplazando las expresiones (2.29) y (2.30) para los desplazamientos en las ecuaciones de movimiento para medios homogéneos (2.27) y (2.28), teniendo en cuenta que,

$$\begin{aligned} \nabla\left(\nabla\cdot u^s\right) &= \left(-Ae^{i(\omega t-\bar{k}\cdot\bar{r})}\bar{k}\cdot\breve{u}_s\right)\bar{k}, \\ \nabla\left(\nabla\cdot u^f\right) &= \left(-Be^{i(\omega t-\bar{k}\cdot\bar{r})}\bar{k}\cdot\breve{u}_f\right)\bar{k}, \\ \nabla\times\left(\nabla\times u^s\right) &= -Ae^{i(\omega t-\bar{k}\bar{r})}\bar{k}\times\left(\bar{k}\times\breve{u}_s\right), \end{aligned} \tag{2.35}$$

y utilizando la expresión (2.31), obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} &\left(-\rho_b\breve{u}_s + M_c s^2(\breve{k}\cdot\breve{u}_s)\breve{k} - \mu s^2\breve{k}\times(\breve{k}\times\breve{u}_s)\right)A + \\ &\qquad\qquad \left(-\rho_f\breve{u}_f + \alpha K_{av}s^2(\breve{k}\cdot\breve{u}_f)\breve{k}\right)B = 0, \end{aligned} \tag{2.36}$$

$$\left(-\rho_f\breve{u}_s + \alpha K_{av}s^2(\breve{k}\cdot\breve{u}_s)\breve{k}\right)A + \left(-g\breve{u}_f + \frac{ib}{\omega}\breve{u}_f + K_{av}s^2(\breve{k}\cdot\breve{u}_f)\breve{k}\right)B = 0. \tag{2.37}$$

Dependiendo del tipo de onda existen distintas relaciones entre los vectores $\breve{k}$, $\breve{u}_s$ y $\breve{u}_f$. Tal como se desprende del análisis realizado por Pride [76], independientemente del tipo de onda, no existen ondas planas que produzcan una respuesta "mixta", es decir, con $\breve{u}_s \neq \breve{u}_f$, pues del sistema de ecuaciones (2.36), (2.37) obtendríamos la solución trivial $A = B = 0$ [76]. En el caso de una onda de corte, el material responde en un sentido perpendicular al de la dirección de propagación, de modo que $\breve{k}\cdot\breve{u}_s = \breve{k}\cdot\breve{u}_f = 0$. Por otro lado, en el caso de una onda longitudinal la respuesta ocurre en el

sentido de la dirección de propagación, y entonces $\breve{k} \cdot \breve{u}_s = \breve{k} \cdot \breve{u}_f = 1$ [1]. A partir de estas consideraciones, a continuación analizaremos las velocidades de fase, coeficientes de atenuación y movimientos de las partículas para las distintas ondas.

2.3.1 Ondas de corte

Estudiemos la propagación de ondas de corte a través de medios porosos saturados. Con este objetivo, consideremos que los versores $\breve{u}_s$ y $\breve{u}_f$ son paralelos entre si, y ortogonales al versor $\breve{k}$. Al utilizar estas relaciones en las ecuaciones (2.36) y (2.37), obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$(\rho_b - \mu s^2)A + \rho_f B = 0, \tag{2.38}$$

$$\rho_f A + (g - \frac{ib}{\omega})B = 0, \tag{2.39}$$

el que tendrá soluciones no triviales sólo si su determinante es cero. Luego, si pedimos que esto ocurra obtenemos el único valor que puede tomar el retardo s:

$$s(\omega) = \left(\frac{1}{\mu}\left(\rho_b - \frac{\rho_f^2}{g - ib/\omega}\right)\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.40}$$

Podemos ver de esta expresión que para una matriz elástica (μ real) la parte imaginaria de $s(\omega)$ se debe exclusivamente al movimiento relativo entre el fluido y el sólido inducido por la aceleración de la matriz sólida. También es interesante notar que en el caso elástico, si la frecuencia tiende a cero, $s = \sqrt{\rho_b/\mu}$; es decir, la velocidad de corte en este caso coincide con la velocidad con la que se propaga una onda de corte a través de un sólido elástico que posee una densidad ρ_b y un módulo de corte similar al módulo de corte de la matriz seca.

Con el objetivo de ilustrar el comportamiento de las ondas de corte, consideramos una onda transversal que viaja a través de la "arenisca 1" de la Tabla 2.1. Las propiedades físicas de esta arenisca son consistentes con el modelo de Krief et al. [53], mientras que los valores de permeabilidad que se encuentran en la tabla fueron obtenidos utilizando la relación de Kozeny-Carman, que permite vincular la permeabilidad de la roca con su porosidad [62] mediante la expresión

$$\kappa = \frac{B_k \phi^3 d^2}{(1-\phi)^2}, \tag{2.41}$$

[1] Las propiedades de paralelismo y ortogonalidad entre los versores $\breve{k}$, $\breve{u}_f$ y $\breve{u}_s$ se corresponden con las suposiciones de irrotacionalidad y divergencia nula usualmente usadas para desacoplar ondas compresionales y de corte en medios isotrópicos.

donde d es el diámetro de los granos y B_k es un factor geométrico. En particular para las areniscas de la tabla, y de acuerdo con el trabajo de Carcione y Picotti [13], tomando $B_k = 0.003$ y $d = 80\mu$m para los granos de cuarzo, se obtiene $\kappa = 1$ Darcy para las areniscas 1 y 2, y $\kappa = 0.23$ Darcy para la arenisca 3. En el caso de la lutita, tomando un tamaño de grano $d = 0.3$ μm se obtiene un valor de permeabilidad $\kappa = 1.5 \times 10^{-5}$ Darcy.

Parámetro	Arenisca 1	Arenisca 2	Arenisca 3	Lutita
ϕ	0.3	0.3	0.2	0.3
K_s	37 GPa	37 GPa	37 GPa	25 GPa
ρ_s	2.65 gr/cm^3	2.65 gr/cm^3	2.65 gr/cm^3	2.55 gr/cm^3
μ_s	44 GPa	44 GPa	44 GPa	9 GPa
K_m	4.8 GPa	8 GPa	12.1 GPa	3.3 GPa
μ	5.7 GPa	9.5 GPa	14.4 GPa	1.2 GPa
κ	1 D	1 D	0.23 D	1.5×10^{-5} D

Tabla 2.1: Parámetros físicos de las rocas secas utilizadas en los ejemplos numéricos.

Para analizar las propiedades de las ondas de corte frente a distintos fluidos saturantes naturales, consideramos dos casos: la arenisca elegida está saturada de agua en un caso, y de gas en el otro. Los valores que utilizamos para los parámetros físicos de los fluidos son los que se encuentran en la Tabla 2.2, que fueron publicados por Carcione y Picotti [13] y serán los que utilizaremos a lo largo de la Tesis.

Respecto de la frecuencia crítica en los medios considerados, tomando para el exponente de cementación de Archie un valor $m = 1.5$, y utilizando la expresión (2.24) se encuentra que la frecuencia crítica es $f_j = \frac{\omega_j}{2\pi} = 71.3$KHz en el caso que el fluido poral sea agua, y $f_j = 47.5$KHz en el caso que sea gas. Por otra parte, utilizando un valor de $n_j = 8$ en la expresión (2.19) para obtener la permeabilidad dinámica en función de la frecuencia, utilizando las relaciones (2.18) en la ecuación (2.40) para determinar el retardo de las ondas de corte, y usándolo en las expresiones (2.33) y (2.34), obtenemos la velocidad de fase y la atenuación de la onda de corte en función de la frecuencia.

La Figura 2.1 muestra la atenuación de la onda de corte que se propaga a través de la arenisca 1 saturada con agua en un caso y con gas en otro, en función de la frecuencia normalizada según la frecuencia crítica respectiva (ω/ω_j). Esta pérdida de energía se debe exclusivamente a la fricción viscosa desarrollada por el movimiento relativo del

Parámetro	Agua	Gas	Petróleo
ρ_f	1.04 gr/cm^3	0.078 gr/cm^3	0.7 gr/cm^3
K_f	2.25 GPa	0.012 GPa	0.7 GPa
η	0.03 Poise	0.0015 Poise	0.1 Poise

Tabla 2.2: Parámetros físicos de los fluidos utilizados en los ejemplos numéricos.

fluido respecto de la matriz sólida, y suele denominarse *atenuación intrínseca* del medio. Es interesante notar que en ambos casos el pico de atenuación se produce para frecuencias cercanas al valor crítico, y la intensidad de la disipación es mucho mayor en el caso de la arenisca saturada con agua, con valores de Q_s del orden de 30 para frecuencias cercanas al valor crítico. La ubicación del pico de atenuación se debe al hecho de que la pérdida de energía por fricción viscosa está controlada por dos factores: por un lado, depende de la magnitud del desplazamiento relativo del fluido respecto del sólido y, por el otro, de la intensidad de la fuerza viscosa que actúa sobre el fluido poral. Para frecuencias mucho menores que la crítica todo el fluido poral se encuentra fuertemente afectado por la fuerza de fricción viscosa, produciendo que el desplazamiento relativo del fluido respecto del sólido sea despreciable y entonces minimizando la pérdida de energía. En el otro extremo, para frecuencias mucho mayores que el valor crítico, el desplazamiento relativo del fluido es importante pero la capa límite viscosa es muy delgada y, entonces, el fluido poral prácticamente no es afectado por las fuerzas viscosas, produciendo una pérdida de energía despreciable. Para frecuencias cercanas al valor crítico, el espesor de la capa límite es del orden del radio poral, de modo que prácticamente todo el fluido poral está afectado por las fuerzas viscosas y, además, el desplazamiento relativo del fluido respecto del sólido es significativo, produciendo el máximo de pérdida de energía por fricción viscosa.

La Figura 2.2 muestra la velocidad de fase de la onda de corte que se propaga a través de la arenisca 1 saturada con agua en un caso y con gas en otro, en función de ω/ω_j. Se puede verificar fácilmente que en el límite de bajas frecuencias, las velocidades coinciden con el valor $\sqrt{\mu/\rho_b}$, tal como mencionamos previamente. Dado que las propiedades del fluido saturante no afectan al módulo de corte de la matriz saturada (y por eso se lo considera igual al módulo de corte de la matriz seca), las discrepancias entre las velocidades

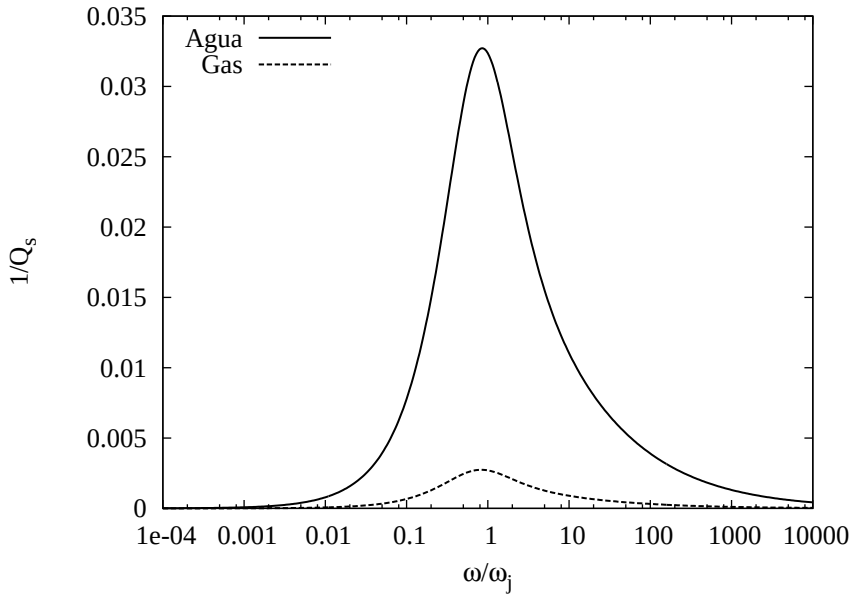

Figura 2.1: Inverso del factor de calidad Q_s en función de ω/ω_j. La línea sólida muestra la respuesta de la arenisca 1 saturada con agua, y la línea punteada la de la misma arenisca saturada con gas.

en el límite de bajas frecuencias se deben exclusivamente al hecho que las densidades de los fluidos saturantes son distintas. Observando las curvas podemos concluir que en ambos casos la dispersión de velocidad es prácticamente nula hasta una frecuencia del orden de 0.1 veces la frecuencia crítica. Luego, a medida que la frecuencia de oscilación se acerca al valor crítico la dispersión comienza a ser más importante, y la pendiente de crecimiento es máxima para frecuencias cercanas a la crítica. Sin embargo, cabe destacar que la magnitud de la dispersión de velocidad no es significativa, pues considerando todo el rango de frecuencias es del orden del 4 por ciento respecto del límite en bajas frecuencias en el caso de la arenisca saturada con agua, y del orden de 3 por mil en el otro caso.

Estudiemos ahora el desplazamiento relativo del fluido respecto de la matriz sólida. Con este fin, considerando que el desplazamiento del sólido y el del fluido son vectores paralelos, y teniendo en cuenta las relaciones (2.29) y (2.30), definamos un coeficiente de proporcionalidad entre la amplitud del desplazamiento relativo del fluido y la del desplazamiento del sólido según

$$\beta_s = \frac{B}{A}. \tag{2.42}$$

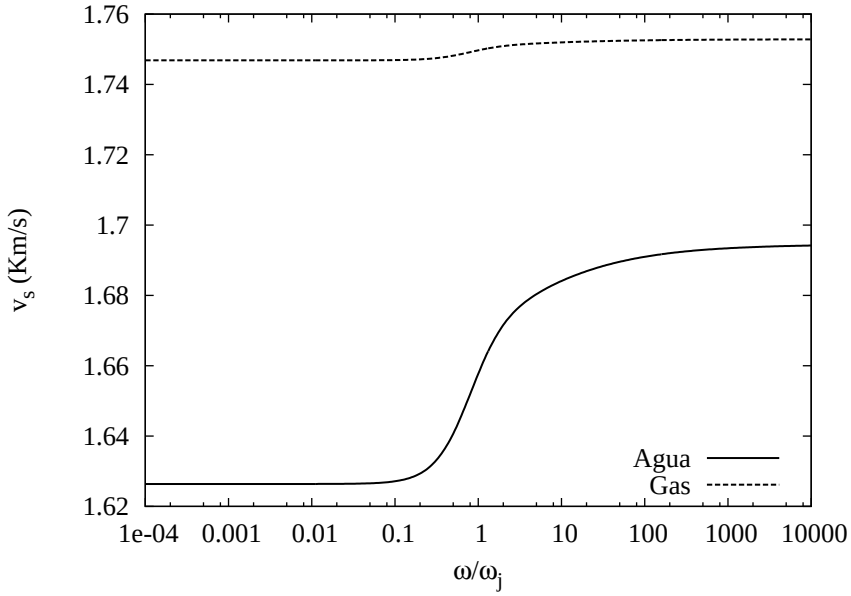

Figura 2.2: Velocidad de fase de la onda de corte en función de ω/ω_j. La línea sólida muestra la respuesta de la arenisca 1 saturada con agua, y la línea punteada la de la misma arenisca saturada con gas.

Utilizando la ecuación (2.39) se deduce fácilmente que

$$\beta_s = \frac{\rho_f}{ib/\omega - g}, \tag{2.43}$$

y teniendo en cuenta las definiciones de $g(\omega)$ y $b(\omega)$ según las igualdades (2.18), resulta

$$\beta_s = \frac{\rho_f \omega}{\eta \left(iRe(\kappa_d^{-1}(\omega)) - Im(\kappa_d^{-1}(\omega)) \right)}. \tag{2.44}$$

Luego, multiplicando y dividiendo esta igualdad por i, y teniendo en cuenta la relación (2.24) se encuentra

$$\beta_s = \frac{-\rho_f \omega i}{\kappa_d^{-1}(\omega)\eta} = \frac{-i\omega\kappa_d(\omega)}{\omega_j F \kappa}. \tag{2.45}$$

Lo interesante de esta expresión es que, como la permeabilidad dinámica es función de parámetros del sólido y de ω/ω_j, y lo mismo ocurre con el resto de la expresión (2.45), la curva de β_s en función de ω/ω_j es *independiente del tipo de fluido saturante, y así es una propiedad de la matriz seca.*

La Figura 2.3 muestra el módulo y fase de β_s para la arenisca 1 en función de ω/ω_j. Podemos observar que para frecuencias mucho menores que la crítica el módulo del

desplazamiento del fluido respecto del sólido es despreciable frente a la magnitud del desplazamiento del sólido. A medida que la frecuencia aumenta el módulo de la relación entre los desplazamientos también lo hace, estabilizándose para altas frecuencias en un valor del orden de 0.16. Respecto de la fase, podemos observar que en el límite de bajas frecuencias hay un desfasaje de -90° entre los desplazamientos, mientras que en el límite de altas frecuencias están en contrafase (-180°).

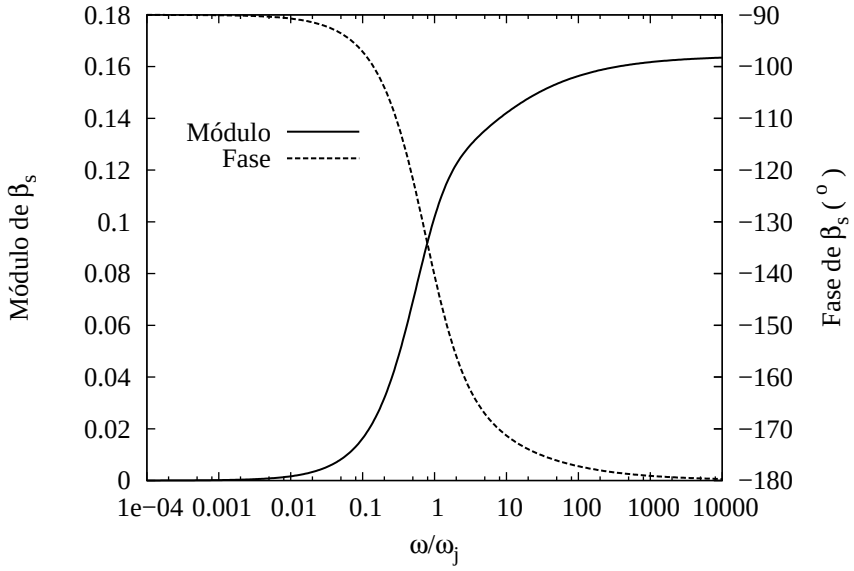

Figura 2.3: Módulo y fase del coeficiente de proporcionalidad entre el desplazamiento relativo del fluido y el desplazamiento del sólido (β_s) en función de ω/ω_j, para una onda rotacional que se propaga a través de la arenisca 1.

También es interesante notar que, como para una onda de corte se cumple

$$\nabla \cdot u^s = -iAe^{i(\omega t - \bar{k}\cdot\bar{r})}\bar{k} \cdot \breve{u}_s = 0, \tag{2.46}$$

$$\nabla \cdot u^f = -iBe^{i(\omega t - \bar{k}\cdot\bar{r})}\bar{k} \cdot \breve{u}_f = 0, \tag{2.47}$$

utilizando las relaciones (2.7) se obtiene $p_f = 0$. Es decir, la propagación de ondas rotacionales a través de un medio poroso saturado homogéneo no produce cambios en la presión del fluido poral.

Para concluir este análisis, podemos remarcar que en el límite de bajas frecuencias las ondas de corte que se propagan por un medio poroso homogéneo sin efectos disipativos en la matriz prácticamente no sufren atenuación por fricción viscosa, poseen una velocidad

de fase aproximadamente igual a $\sqrt{\mu/\rho_b}$ y producen un desplazamiento relativo del fluido respecto del sólido despreciable. Es decir, en el límite de bajas frecuencias las ondas de corte se propagan como a través de un sólido elástico equivalente de densidad ρ_b y módulo de corte μ. Para frecuencias mayores los efectos viscodinámicos cobran importancia, y esto se pone de manifiesto en la dispersión de velocidad y atenuación intrínseca, así como en el movimiento de las partículas del medio.

2.3.2 Ondas compresionales: existencia de ondas rápidas y lentas

Estudiemos ahora la propagación de ondas compresionales a través de un medio poroso saturado. Para esto, recordemos que en este caso los versores $\breve{k}$, $\breve{u}_s$ y $\breve{u}_f$ son paralelos, y reemplazando esto en las ecuaciones de movimiento (2.36) y (2.37) obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$(-\rho_b + M_c s^2)A + (-\rho_f + \alpha K_{av} s^2)B = 0, \tag{2.48}$$

$$(-\rho_f + \alpha K_{av} s^2)A + (K_{av} s^2 - g + \frac{ib}{\omega})B = 0. \tag{2.49}$$

Para que existan soluciones no triviales de este sistema de ecuaciones debemos exigir que el determinante de la matriz asociada se anule, de donde encontramos que los posibles valores de $s(\omega)$ deben satisfacer

$$as^4 + bs^2 + c = 0, \tag{2.50}$$

con

$$a = K_{av}(M_c - \alpha^2 K_{av}), \tag{2.51}$$

$$b = -\rho_b K_{av} - M_c g + \frac{M_c ib}{\omega} + 2\rho_f \alpha K_{av}, \tag{2.52}$$

$$c = \rho_b g - \frac{\rho_b ib}{\omega} - \rho_f^2. \tag{2.53}$$

De esta ecuación surge que existen dos posibles valores para s^2, y están dados por

$$s^2 = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \frac{\rho_b g - \rho_b ib/\omega - \rho_f^2}{K_{av}(M_c - \alpha^2 K_{av})}}, \tag{2.54}$$

donde $\gamma = -\frac{b}{2a}$. De los cuatro posibles valores para el retardo sólo son físicamente aceptables aquellos que tienen su parte imaginaria negativa. Por lo tanto, de este análisis

surge el resultado más importantes de la teoría de Biot, que consiste en el hecho que en los medios porosos saturados pueden propagarse *dos* tipos de ondas compresionales, de naturaleza muy distinta. A la onda compresional que se propaga con la mayor velocidad de fase la llamaremos *onda compresional rápida, clásica o de tipo 1*, y la denotaremos como onda tipo p_1. A la segunda onda compresional la llamaremos *onda compresional lenta, o de tipo 2* y la denotaremos p_2. La onda p_1 y la de corte (también llamadas *ondas rápidas o clásicas*) se corresponden con la onda compresional y la de corte que se propagan en sólidos elásticos o viscoelásticos. La onda tipo p_2 es un modo de propagación adicional que surge en estos medios debido a la presencia del fluido, y puede afectar de manera significativa el comportamiento de las ondas clásicas en presencia de heterogeneidades. En las próximas secciones demostraremos que para bajas frecuencias la onda compresional lenta no es una onda de propagación sino que es un proceso de difusión de la presión del fluido poral.

Para ilustrar el comportamiento de estas ondas calculemos las velocidades de fase y coeficientes de atenuación de las ondas compresionales que se propagan a través de la arenisca 1, cuando el espacio poral se encuentra saturado con agua en un caso y con gas en otro. Con este objetivo, consideramos los mismos parámetros físicos que utilizamos para analizar el comportamiento de la onda de corte. Luego, utilizamos la ecuación (2.54) para obtener los dos posibles valores de retardo s_1 y s_2 asociados con las ondas tipo p_1 y p_2, y reemplazando en las expresiones (2.33) y (2.34) obtenemos sus velocidades de fase y factores de calidad correspondientes.

Analicemos en primer lugar el comportamiento de la onda tipo p_1. La Figura 2.4 muestra el inverso del factor de calidad Q_{p_1} para una onda compresional que se propaga a través de la arenisca 1 saturada con agua en un caso y con gas en otro, en función de ω/ω_j. Podemos observar que tal como sucedió con la onda de corte, la pérdida de energía por fricción viscosa es máxima para frecuencias cercanas al valor crítico, mientras que es despreciable en el límite de bajas o altas frecuencias. La explicación de este comportamiento es análoga a la presentada en el análisis de atenuación de ondas de corte. Es interesante notar que en este caso, incluso para frecuencias cercanas a la crítica, la pérdida por fricción viscosa no es importante, con valores de Q_{p_1} por encima de 280 para los dos tipos de fluido poral.

Por otra parte, la Figura 2.5 muestra la velocidad de fase de la onda tipo p_1 que se propaga a través de la arenisca 1 saturada con agua en un caso y con gas en otro,

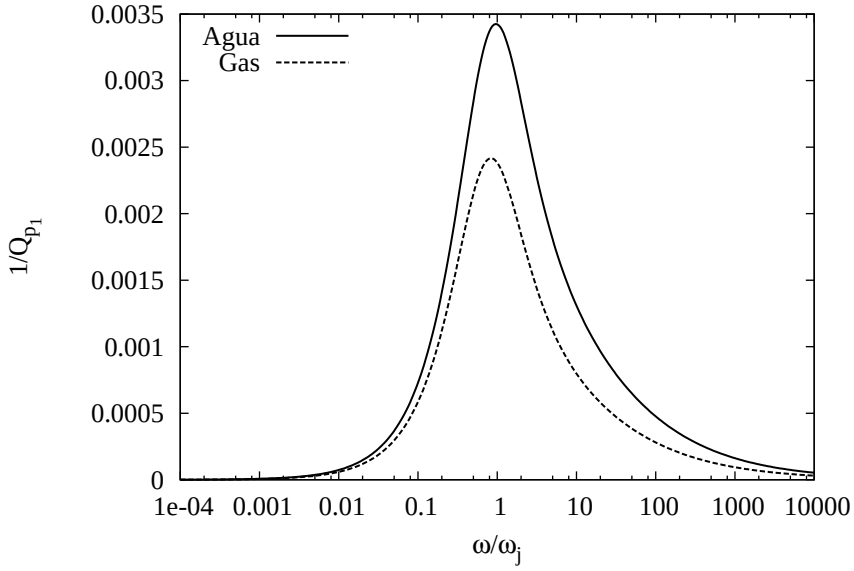

Figura 2.4: Inverso del factor de calidad Q_{p1} en función de ω/ω_j. La línea sólida muestra la respuesta de la arenisca 1 saturada con agua, y la línea punteada la de la misma arenisca saturada con gas.

en función de ω/ω_j. Se puede verificar fácilmente que en el límite de bajas frecuencias las velocidades coinciden con el valor $\sqrt{M_c/\rho_b}$, propiedad que será demostrada luego en este capítulo. Podemos ver también que, tal como se espera, la velocidad de la onda tipo p_1 es mucho menor en el caso de la arenisca que contiene gas respecto del caso saturado con agua, y esto se debe a una fuerte caída en el valor del módulo de onda plana M_c relacionada con la presencia del gas. Observando las curvas podemos concluir que en ambos casos la dispersión de velocidad es nula hasta frecuencias por encima de 0.1 veces la frecuencia crítica. Luego, a medida que la frecuencia de oscilación se acerca al valor crítico la dispersión comienza a ser más importante, y la pendiente de crecimiento es máxima para frecuencias cercanas a la crítica. Sin embargo, en los dos casos la dispersión de velocidad no es significativa.

Para estudiar la importancia del movimiento relativo del fluido en el caso de la propagación de ondas compresionales clásicas calculamos, tal como lo hicimos con las ondas de corte, el coeficiente de proporcionalidad entre el desplazamiento relativo del fluido

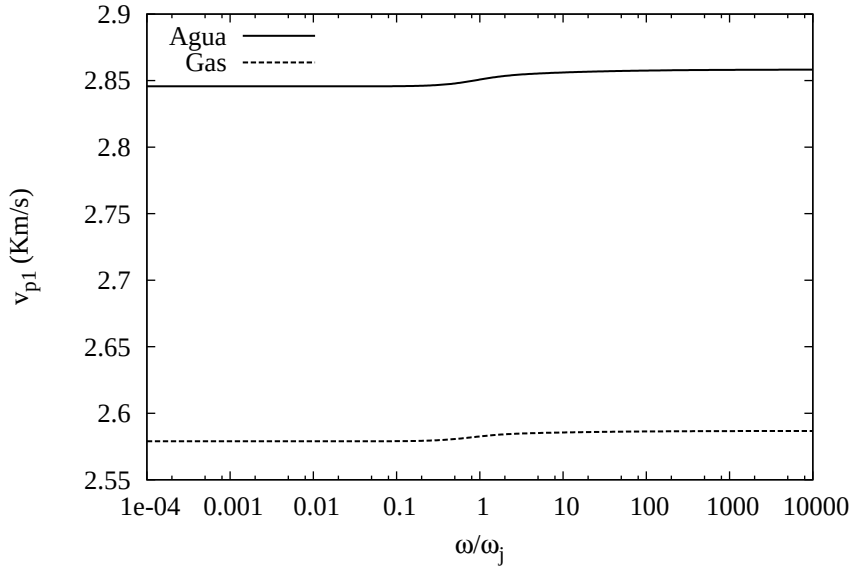

Figura 2.5: Velocidad de fase de la onda tipo p_1 en función de ω/ω_j. La línea sólida muestra la respuesta de la arenisca 1 saturada con agua, y la línea punteada la de la misma arenisca saturada con gas.

respecto del sólido y el desplazamiento del sólido,

$$\beta_{p_1} = \frac{B_{p_1}}{A_{p_1}}, \tag{2.55}$$

y de acuerdo con la ecuación (2.48),

$$\beta_{p_1} = \frac{M_c s_1^2 - \rho_b}{\rho_f - \alpha K_{av} s_1^2}. \tag{2.56}$$

La Figura 2.6 muestra el módulo y fase de β_{p_1} para la arenisca 1 saturada con agua, en función de ω/ω_j. Podemos observar que para frecuencias mucho menores que la crítica el módulo del desplazamiento del fluido respecto del sólido es despreciable frente a la magnitud del desplazamiento del sólido, tal como ya lo hemos mencionado antes para el caso de una onda de corte. A medida que la frecuencia aumenta la relación entre los módulos de los desplazamientos también aumenta, estabilizándose para altas frecuencias en un valor del orden de 0.06. Respecto de la fase, podemos observar que en el límite de bajas frecuencias hay un desfasaje de -90° entre el desplazamiento relativo del fluido y el desplazamiento del sólido, y en el límite de altas frecuencias los desplazamientos están en contrafase.

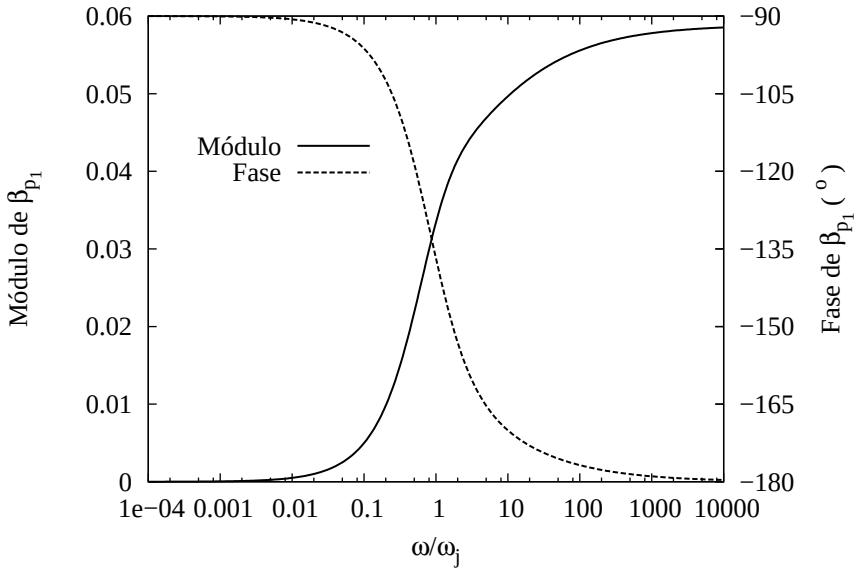

Figura 2.6: Módulo y fase del coeficiente de proporcionalidad entre el desplazamiento relativo del fluido y el desplazamiento del sólido (β_{p_1}) en función de ω/ω_j, para una onda compresional clásica que se propaga a través de la arenisca 1 saturada con agua.

La Figura 2.7 muestra el comportamiento del parámetro β_{p_1} cuando la arenisca está saturada con gas. Podemos observar que las curvas poseen comportamientos muy similares a los obtenidos en el caso de la arenisca saturada con agua, aunque la magnitud del desplazamiento relativo del fluido a medida que la frecuencia aumenta es mayor cuando el fluido poral es gas.

Del análisis realizado podemos concluir que en el límite de bajas frecuencias las ondas compresionales tipo p_1 que se propagan por un medio poroso homogéneo sin efectos disipativos en la matriz prácticamente no sufren atenuación por fricción viscosa, poseen una velocidad de fase aproximadamente igual a $\sqrt{M_c/\rho_b}$ y producen un desplazamiento relativo del fluido respecto del sólido despreciable. Es decir, en el límite de bajas frecuencias las ondas compresionales rápidas se propagan como a través de un sólido elástico equivalente de densidad ρ_b y módulo de onda plana M_c.

Analicemos ahora el comportamiento de las ondas compresionales lentas. La Figura 2.8 muestra el inverso del factor de calidad Q_{p_2} para una onda compresional lenta que se propaga a través de la arenisca 1 saturada con agua en un caso y con gas en otro, en función de ω/ω_j. Podemos observar que el comportamiento de estas ondas es muy distinto

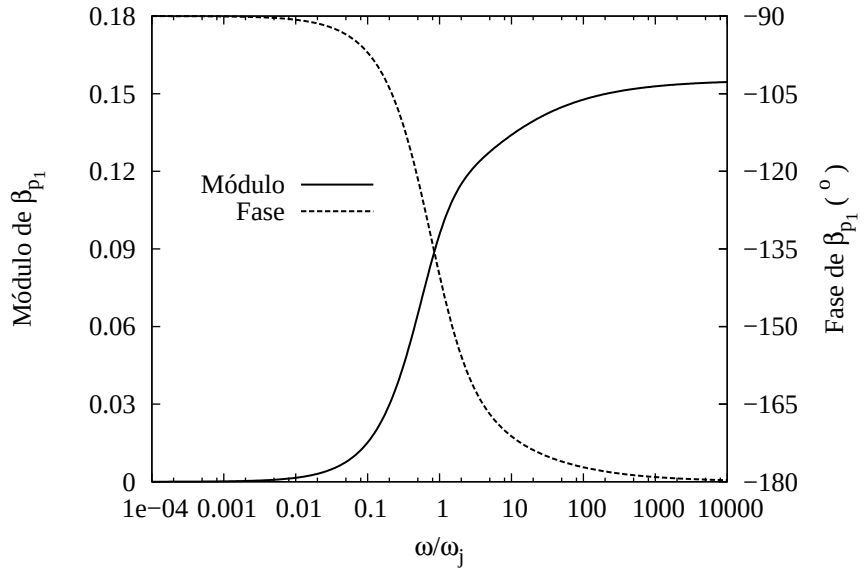

Figura 2.7: Módulo y fase del coeficiente de proporcionalidad entre el desplazamiento relativo del fluido y el desplazamiento del sólido (β_{p_1}) en función de ω/ω_j, para una onda compresional clásica que se propaga a través de la arenisca 1 saturada con gas.

al que encontramos para las ondas clásicas: para frecuencias por debajo de aproximadamente 1 por ciento del valor crítico la perturbación experimenta una fuerte atenuación, con un valor para Q_{p_2} del orden de 0.5; luego, a medida que la frecuencia aumenta el valor de Q_{p_2} también lo hace, y la pendiente de caída de $1/Q_{p_2}$ es máxima para frecuencias del orden del valor crítico. Es interesante notar también que el comportamiento del factor de calidad Q_{p2} versus ω/ω_j para la arenisca saturada con agua es prácticamente coincidente con el que obtenemos en el caso de la arenisca saturada con gas.

Por otro lado, la Figura 2.9 muestra la velocidad de fase de la onda lenta que se propaga a través de la arenisca 1 saturada con agua en un caso y con gas en otro, en función de ω/ω_j. En esta figura podemos observar que el comportamiento de la velocidad de fase de las ondas compresionales lentas es muy distinto al que obtuvimos en el caso de las ondas clásicas: en el límite de bajas frecuencias la velocidad de la onda lenta es prácticamente nula, tanto para el caso de la arenisca saturada con agua como con gas. Luego, a medida que aumenta la frecuencia también lo hace el valor de la velocidad de fase, estabilizándose para frecuencias muy altas en un valor de aproximadamente $v_{p_2} = 0.3$Km/s para el caso de la arenisca saturada con gas, y en $v_{p_2} = 0.9Km/s$ en el

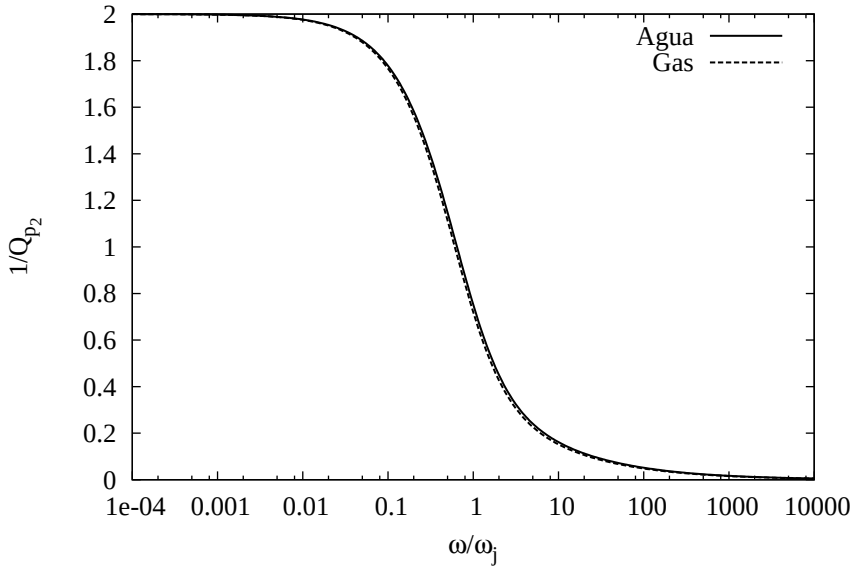

Figura 2.8: Inverso del factor de calidad Q_{p2} en función de ω/ω_j. La línea sólida muestra la respuesta de la arenisca 1 saturada con agua, y la línea punteada la de la misma arenisca saturada con gas.

caso de la arenisca saturada con agua. Es decir, la velocidad de fase de las ondas lentas toma valores significativos sólo para altas frecuencias. Por último, en todo el rango de frecuencias la velocidad de fase en la arenisca saturada con gas es menor que en el caso de la arenisca saturada con agua.

Analicemos ahora el comportamiento del desplazamiento relativo del fluido con respecto al desplazamiento del sólido en el caso de la propagación de una perturbación compresional lenta. Para esto, calculemos para distintas frecuencias el coeficiente de proporcionalidad entre estos desplazamientos, mediante la expresión

$$\beta_{p_2} = \frac{M_c s_2^2 - \rho_b}{\rho_f - \alpha K_{av} s_2^2}. \tag{2.57}$$

La Figura 2.10 muestra el módulo y fase de β_{p_2} para la arenisca 1 saturada con agua, en función de ω/ω_j. Podemos observar que en el caso de la propagación de ondas compresionales lentas, el comportamiento del desplazamiento del fluido en relación con el desplazamiento del sólido es muy distinto al que encontramos para las ondas rápidas. En primer lugar, la relación entre las magnitudes de los desplazamientos es levemente mayor a medida que aumenta la frecuencia, y en todo el rango de frecuencias analizado

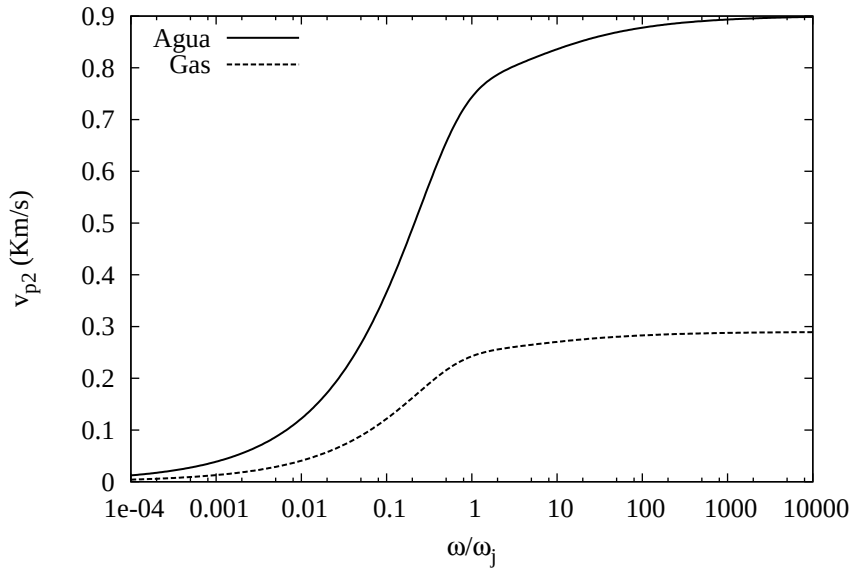

Figura 2.9: Velocidad de fase de la onda compresional lenta en función de ω/ω_j. La línea sólida muestra la respuesta de la arenisca 1 saturada con agua, y la línea punteada la de la misma arenisca saturada con gas.

esta relación es del orden de 3 a 3.15. Es decir, el módulo del desplazamiento relativo del fluido es del orden de 3 veces el del desplazamiento absoluto del sólido. Además, observando la fase de este parámetro podemos ver que en todo el rango de frecuencias analizado estos desplazamientos están prácticamente en contrafase.

La Figura 2.11 muestra el módulo y fase de β_{p_2} para la arenisca 1 saturada con gas, en función de ω/ω_j. Podemos observar que el comportamiento de este parámetro es muy similar al que observamos para la arenisca saturada con agua, pero la magnitud del módulo es muy distinta. En todo el rango de frecuencias analizado la magnitud del desplazamiento relativo del fluido comparada con la del desplazamiento del sólido es mayor a medida que aumenta la frecuencia, y lo notable de esta curva es que la magnitud del desplazamiento relativo del fluido es de aproximadamente 360 a 440 veces la del desplazamiento absoluto del sólido. Además, para todo el rango de frecuencias estos desplazamientos están prácticamente en contrafase.

Para concluir con este análisis, es interesante notar también que en general para las ondas compresionales planas, la relación entre el desplazamiento relativo del fluido y el desplazamiento absoluto del sólido es igual a la relación entre las divergencias de estos

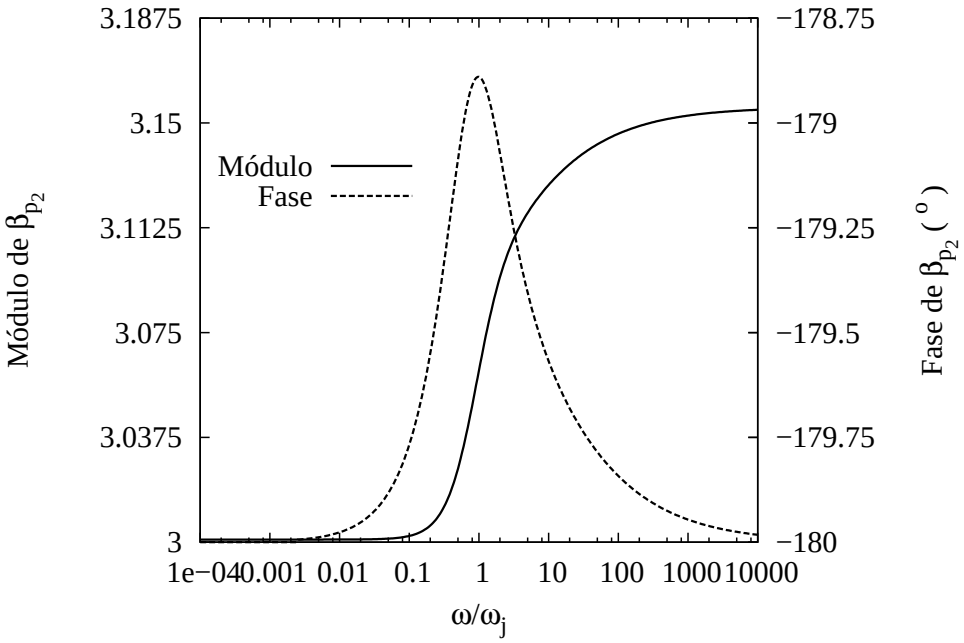

Figura 2.10: Módulo y fase del coeficiente de proporcionalidad entre el desplazamiento relativo del fluido respecto del sólido y el desplazamiento del sólido (β_{p_2}) en función de ω/ω_j, para una onda compresional lenta que se propaga a través de la arenisca 1 saturada con agua.

desplazamientos. Es decir,

$$\beta = \frac{u^f}{u^s} = \frac{\nabla \cdot u^f}{\nabla \cdot u^s}. \tag{2.58}$$

Luego, recordando que $u^f = \phi(\tilde{u}^f - u^s)$, es muy simple demostrar que

$$\frac{\nabla \cdot \tilde{u}^f}{\nabla \cdot u^s} = 1 + \beta/\phi. \tag{2.59}$$

La igualdad (2.59) nos permite determinar, a partir de la curva de β en función de la frecuencia, la relación entre la divergencia del desplazamiento absoluto del fluido y la del desplazamiento del sólido en función de la frecuencia. Al obtener tales curvas, que no son incluidas por brevedad, observamos que en el caso de la propagación de ondas compresionales clásicas a través de la arenisca, y para ambos fluidos porales, tales divergencias se encuentran prácticamente en fase para todo el rango de frecuencias analizado. Además, el módulo de tal relación es aproximadamente 1 para bajas frecuencias, y disminuye a medida que aumenta la frecuencia. Este comportamiento es muy distinto en el caso de

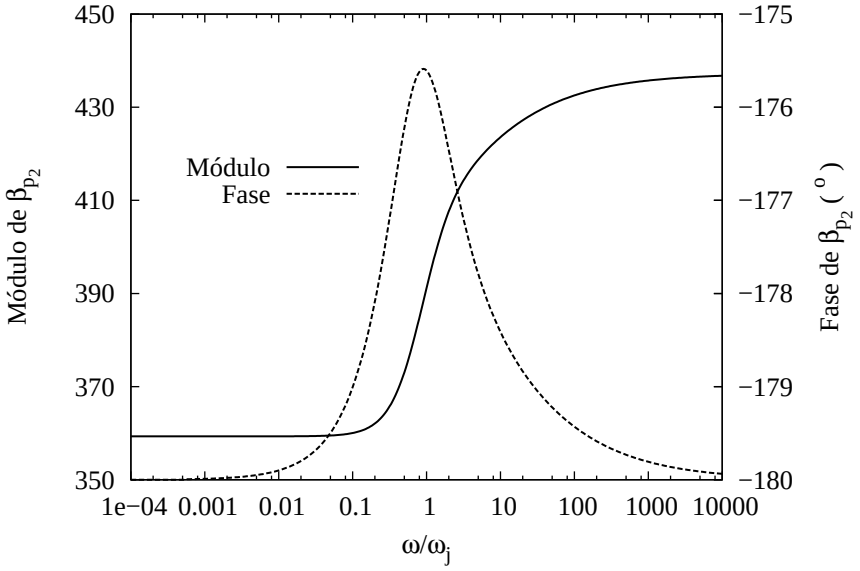

Figura 2.11: Módulo y fase del coeficiente de proporcionalidad entre el desplazamiento relativo del fluido respecto del sólido y el desplazamiento del sólido (β_{p_2}) en función de ω/ω_j, para una onda compresional lenta que se propaga a través de la arenisca 1 saturada con gas.

la propagación de ondas compresionales lentas: las divergencias de los desplazamientos absolutos están prácticamente en contrafase para todo el rango de frecuencias considerado, y la magnitud de la divergencia del desplazamiento del fluido es varias veces la del desplazamiento del sólido para los dos fluidos considerados. Esta propiedad de las ondas compresionales está de acuerdo con el análisis de ortogonalidad sobre las amplitudes de las divergencias de los desplazamientos que realizó Biot [6], en el que demuestra que en el rango de bajas frecuencias las divergencias de los desplazamientos absolutos están en fase en el caso de ondas compresionales clásicas y en contrafase en el caso de ondas lentas.

Remarquemos entonces que el comportamiento de las ondas lentas es muy distinto al de las ondas clásicas. Poseen una muy baja velocidad de fase, que es casi nula en el límite de bajas frecuencias. Además, sufren una fuerte atenuación por fricción viscosa en el límite de bajas frecuencias, la cual disminuye a medida que aumenta la frecuencia. Por último, en los casos analizados el desplazamiento relativo del fluido es muy importante en comparación con el desplazamiento absoluto del sólido, y estos desplazamientos están en contrafase en todo el rango de frecuencias. En las próximas secciones de este capítulo

demostraremos que en el límite de bajas frecuencias la onda lenta es en realidad un proceso de difusión de la presión del fluido. Estas perturbaciones adquieren el carácter de ondas de propagación sólo para altas frecuencias.

2.3.3 Desacople de los modos compresionales

En esta sección analizaremos con más detalle la propagación de ondas longitudinales clásicas y lentas, realizando un razonamiento inspirado en el trabajo de Dutta y Odé [30], en el cual se desacoplan ambos modos de propagación para demostrar el carácter difusivo de las ondas lentas en bajas frecuencias.

En primer lugar, recordemos que de acuerdo con las ecuaciones (2.56) y (2.57), en el caso de ondas planas compresionales monocromáticas la relación entre el desplazamiento relativo del fluido y el del sólido se puede expresar en función de los parámetros del medio y de la frecuencia. En este sentido, llamemos σ_{p1} (σ_{p2}) a $1/\beta_{p1}$ ($1/\beta_{p2}$). En ambos casos, sin escribir los subíndices,

$$\sigma = \frac{A}{B}. \tag{2.60}$$

Reemplazando en la ecuación (2.48) $A = \sigma B$, se puede despejar s^2 en función de σ

$$s^2 = \frac{\rho_f + \rho_b \sigma}{M_c \sigma + \alpha K_{av}}. \tag{2.61}$$

Luego, utilizando este resultado en la ecuación (2.49), se obtiene la siguiente igualdad que permite obtener σ en función de los parámetros del medio y de la frecuencia

$$(M_c\sigma + \alpha K_{av})(-\rho_f\sigma - g + ib/\omega) + (\rho_f + \rho_b\sigma)(\alpha K_{av}\sigma + K_{av}) = 0. \tag{2.62}$$

Por otra parte, en general si utilizamos la relación

$$\nabla^2 \bar{a} = \nabla(\nabla \cdot \bar{a}) - \nabla \times (\nabla \times \bar{a}) \tag{2.63}$$

en las ecuaciones (2.27) y (2.28), y teniendo en cuenta que en el caso de ondas compresionales $\nabla \times u^s = \nabla \times u^f = 0$, es muy simple demostrar que las ecuaciones de movimiento para un medio de Biot homogéneo se pueden escribir como

$$\begin{aligned} -\omega^2\rho_b u^s - \omega^2\rho_f u^f &= M_c\nabla^2 u^s + \alpha K_{av}\nabla^2 u^f, \\ -\omega^2\rho_f u^s - \omega^2 g u^f + i\omega b u^f &= \alpha K_{av}\nabla^2 u^s + K_{av}\nabla^2 u^f. \end{aligned} \tag{2.64}$$

Si perturbaciones compresionales monocromáticas arbitrarias (no necesariamente ondas planas) se propagan en un medio homogéneo, la respuesta del mismo se puede pensar

como la superposición de desplazamientos asociados con una componente compresional de tipo p_1 y otra componente compresional de tipo p_2. Entonces, podemos escribir los desplazamientos en las fases sólida y fluida como

$$u^s = u_1^s + u_2^s, \qquad u^f = u_1^f + u_2^f, \tag{2.65}$$

donde los subíndices 1 y 2 se corresponden con ondas compresionales rápidas y lentas, respectivamente. Además, considerando la linealidad del sistema, teniendo en cuenta que las perturbaciones compresionales rápidas y lentas son suma de ondas planas compresionales rápidas y lentas respectivamente, y recordando que para ondas planas compresionales la proporcionalidad entre el desplazamiento relativo del fluido y el del sólido es una propiedad del medio poroso saturado y de la frecuencia, existirán escalares σ_1 y σ_2 tales que

$$u_1^s = \sigma_1 u_1^f, \qquad u_2^s = \sigma_2 u_2^f. \tag{2.66}$$

Entonces, si escribimos los desplazamientos de la fase sólida en función de los desplazamientos de la fase fluida utilizando la definición de σ_1 y de σ_2 de la ecuación (2.66), y utilizando la ecuación (2.65) en las ecuaciones de movimiento (2.64), se obtienen las siguientes expresiones

$$-\omega^2(\sigma_{11}u_1^f + \sigma_{12}u_2^f) = c_1\nabla^2 u_1^f + c_2\nabla^2 u_2^f, \tag{2.67}$$

$$-\omega^2(\sigma_{21}u_1^f + \sigma_{22}u_2^f) + i\omega b(u_1^f + u_2^f) = c_3\nabla^2 u_1^f + c_4\nabla^2 u_2^f, \tag{2.68}$$

donde

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \rho_b\sigma_1 + \rho_f, & c_1 &= M_c\sigma_1 + \alpha K_{av}, \\ \sigma_{12} &= \rho_b\sigma_2 + \rho_f, & c_2 &= M_c\sigma_2 + \alpha K_{av}, \\ \sigma_{21} &= \rho_f\sigma_1 + g, & c_3 &= \alpha K_{av}\sigma_1 + K_{av}, \\ \sigma_{22} &= \rho_f\sigma_2 + g, & c_4 &= \alpha K_{av}\sigma_2 + K_{av}. \end{aligned} \tag{2.69}$$

Multiplicando por c_3 la ecuación (2.67), y multiplicando por c_1 la ecuación (2.68) y restando, resulta la siguiente ecuación

$$(\sigma_{11}c_3 - \sigma_{21}c_1 + ibc_1/\omega)\omega^2 u_1^f + (\sigma_{12}c_3 - c_1\sigma_{22} + ibc_1/\omega)\omega^2 u_2^f = (c_1c_4 - c_2c_3)\nabla^2 u_2^f. \tag{2.70}$$

Por otra parte, multiplicando la ecuación (2.67) por c_4 y la ecuación (2.68) por c_2 y restando las expresiones, obtenemos la siguiente ecuación

$$(\sigma_{11}c_4 - \sigma_{21}c_2 + ibc_2/\omega)\omega^2 u_1^f + (\sigma_{12}c_4 - \sigma_{22}c_2 + ibc_2/\omega)\omega^2 u_2^f = (c_2c_3 - c_1c_4)\nabla^2 u_1^f. \tag{2.71}$$

Ahora, como queremos *desacoplar* el comportamiento total en dos componentes independientes, debemos pedir que el término que multiplica a u_1^f en la ecuación (2.70) y el término que multiplica a u_2^f en la ecuación (2.71) se anulen. Al demandar esto, y al reemplazar con las expresiones (2.69), los términos que se anulan son de la forma

$$\Big((\rho_b\sigma + \rho_f)(\alpha K_{av}\sigma + K_{av}) - (\rho_f\sigma + g - ib/\omega)(M_c\sigma + \alpha K_{av})\Big)\omega^2 = 0, \tag{2.72}$$

con $\sigma = \sigma_1$ en el primer caso, y $\sigma = \sigma_2$ en el segundo. Comparando esta expresión con la ecuación (2.62), podemos verificar que al desacoplar el comportamiento total en dos componentes independientes obtenemos una ecuación cuadrática similar a la que tienen que satisfacer los σ de las ondas planas compresionales, como esperamos. La ecuación (2.72) también se puede escribir como

$$(\rho_b\alpha K_{av} - \rho_f M_c)\sigma^2 + (\rho_b K_{av} + (ib/\omega - g)M_c)\sigma + (\rho_f K_{av} + (ib/\omega - g)\alpha K_{av}) = 0. \tag{2.73}$$

Entonces, las ecuaciones (2.70) y (2.71) pueden reescribirse como

$$\nabla^2 u_1^f = D_1^2 u_1^f, \tag{2.74}$$

$$\nabla^2 u_2^f = D_2^2 u_2^f, \tag{2.75}$$

donde

$$\frac{D_1^2}{\omega^2} = \frac{\sigma_{11}c_4 - \sigma_{21}c_2 + ibc_2/\omega}{c_2c_3 - c_1c_4}, \tag{2.76}$$

$$\frac{D_2^2}{\omega^2} = \frac{\sigma_{12}c_3 - c_1\sigma_{22} + ibc_1/\omega}{c_1c_4 - c_2c_3}. \tag{2.77}$$

Ahora, obtendremos expresiones para D_1^2 y D_2^2 en función de σ_1, σ_2 y de los parámetros del medio. Utilizando las definiciones (2.69), si llamamos N al numerador de la expresión (2.76),

$$N = (\rho_b\sigma_1 + \rho_f)(\alpha K_{av}\sigma_2 + K_{av}) - (\rho_f\sigma_1 + g)(M_c\sigma_2 + \alpha K_{av}) + \frac{ib}{\omega}(M_c\sigma_2 + \alpha K_{av}), \tag{2.78}$$

y reagrupando términos,

$$N = -\sigma_1\Big(\rho_f(M_c\sigma_2 + \alpha K_{av}) - \rho_b(\alpha K_{av}\sigma_2 + K_{av})\Big) + \sigma_2\big(\rho_f\alpha K_{av} + (ib/\omega - g)M_c\big) + \rho_f K_{av} + (ib/\omega - g)\alpha K_{av}. \tag{2.79}$$

Ahora, de la ecuación (2.73),

$$(ib/\omega - g)M_c\sigma_2 + (\rho_f K_{av} + (ib/\omega - g)\alpha K_{av}) = (\rho_f M_c - \rho_b \alpha K_{av})\sigma_2^2 - \rho_b K_{av}\sigma_2, \quad (2.80)$$

y reemplazando esta expresión en la ecuación (2.79),

$$N = -\sigma_1 N^* + \sigma_2 \rho_f \alpha K_{av} + (\rho_f M_c - \rho_b \alpha K_{av})\sigma_2^2 - \rho_b K_{av}\sigma_2, \quad (2.81)$$

donde

$$N^* = \rho_f(M_c\sigma_2 + \alpha K_{av}) - \rho_b(\alpha K_{av}\sigma_2 + K_{av}). \quad (2.82)$$

Reagrupando (2.81), es muy simple demostrar que

$$N = (\sigma_2 - \sigma_1)N^*. \quad (2.83)$$

Además, si utilizamos nuevamente las definiciones (2.69), y si llamamos D al denominador de la expresión (2.76), encontramos

$$D = (M_c\sigma_2 + \alpha K_{av})(\alpha K_{av}\sigma_1 + K_{av}) - (M_c\sigma_1 + \alpha K_{av})(\alpha K_{av}\sigma_2 + K_{av}), \quad (2.84)$$

y realizando distributiva y reagrupando es simple demostrar que

$$D = (-\sigma_1 + \sigma_2)(-\alpha^2 K_{av}^2 + M_c K_{av}). \quad (2.85)$$

Luego, utilizando las ecuaciones (2.83) y (2.85) y la definición de N^*, encontramos la siguiente expresión para D_1^2

$$\frac{D_1^2}{\omega^2} = \frac{\rho_f(M_c\sigma_2 + \alpha K_{av}) - \rho_b(\alpha K_{av}\sigma_2 + K_{av})}{M_c K_{av} - \alpha^2 K_{av}^2}. \quad (2.86)$$

Con idéntico procedimiento se obtiene una expresión similar para D_2^2, pues si observamos las expresiones (2.76) y (2.77), y la simetría que existe entre los distintos parámetros definidos en (2.69), encontramos que la expresión para D_2^2/ω^2 será similar a la que obtuvimos para D_1^2/ω^2 pero intercambiando σ_1 por σ_2. Es decir,

$$\frac{D_2^2}{\omega^2} = \frac{\rho_f(M_c\sigma_1 + \alpha K_{av}) - \rho_b(\alpha K_{av}\sigma_1 + K_{av})}{M_c K_{av} - \alpha^2 K_{av}^2}. \quad (2.87)$$

Es muy interesante y conceptualmente importante notar que de la ecuación (2.73) se desprende que una de sus soluciones es de módulo acotado mientras que el módulo de la

otra tiende a infinito. Para observar esto, notemos primero que a partir de los coeficientes del polinomio cuadrático (2.73) se puede ver que si $\omega \to 0$ entonces

$$\sigma_1\sigma_2 \to \frac{ib\alpha K_{av}}{\rho_b\alpha K_{av} - \rho_f M_c}\frac{1}{\omega}, \tag{2.88}$$

$$\sigma_1 + \sigma_2 \to \frac{ibM_c}{\rho_f M_c - \rho_b\alpha K_{av}}\frac{1}{\omega}. \tag{2.89}$$

De cualquiera de estas dos igualdades se ve que al menos una de las dos raíces (σ_1 ó σ_2) debe tener módulo no acotado cuando ω tiende a cero. Por simetría de las igualdades, supongamos que σ_1 es tal raíz. Luego, de la ecuación (2.88) se encuentra que en el límite de bajas frecuencias

$$\omega\sigma_2 \to 0. \tag{2.90}$$

Entonces, utilizando esta ecuación en la expresión (2.89), obtenemos que si $\omega \to 0$,

$$\omega\sigma_1 \to \frac{ibM_c}{\rho_f M_c - \rho_b\alpha K_{av}}. \tag{2.91}$$

Luego, reemplazando con esta igualdad en la ecuación (2.88) encontramos que

$$\sigma_2 \to -\frac{\alpha K_{av}}{M_c}. \tag{2.92}$$

Es muy simple verificar que fue correcto suponer que la raíz asociada con las ondas rápidas (σ_1) es la que posee módulo no acotado en el límite de bajas frecuencias y, entonces, este σ se corresponde con las ondas lentas; es decir, es efectivamente σ_2. Con este objetivo, reemplazamos (2.92) en la ecuación (2.86), de donde obtenemos

$$\frac{D_1^2}{\omega^2} \approx -\rho_b/M_c. \tag{2.93}$$

Luego, si reemplazamos esta expresión en la ecuación (2.74),

$$\nabla^2 u_1^f = -\frac{\omega^2\rho_b}{M_c}u_1^f. \tag{2.94}$$

Antitransformando esta ecuación, resulta la ecuación hiperbólica estándar para una onda compresional de velocidad constante e igual a $\sqrt{M_c/\rho_b}$, es decir,

$$M_c\nabla^2 u_1^f = \rho_b\frac{\partial^2 u_1^f}{\partial t^2}. \tag{2.95}$$

Claramente esta ecuación es la que se asocia con las ondas compresionales tipo 1, de acuerdo con los resultados numéricos que obtuvimos previamente en este capítulo.

Físicamente el hecho de que $|\sigma_2|$ tenga un valor acotado para muy bajas frecuencias muestra que en el caso de ondas lentas el desplazamiento relativo del fluido es significativo respecto del movimiento del sólido. Por el contrario, que $|\sigma_1|$ tenga valores muy grandes para muy bajas frecuencias muestra que el desplazamiento relativo del fluido es despreciable en el caso de las ondas compresionales clásicas y en el límite de bajas frecuencias; es decir, ambas fases del medio se mueven en conjunto. Esta característica del movimiento relativo del fluido está de acuerdo con el análisis que efectuamos para ondas compresionales propagándose a través de la arenisca 1 saturada con agua y con gas, y muestra diferencias apreciables en la naturaleza de los dos tipos de ondas en el límite de bajas frecuencias.

2.3.4 Carácter difusivo de las ondas lentas en el rango de bajas frecuencias

Analicemos en esta sección el carácter difusivo de las ondas compresionales lentas en el límite de bajas frecuencias. Con este objetivo, considerando que si la frecuencia es muy baja, $|M_c\sigma_2|$ es del orden de $|\alpha K_{av}|$, y como $|\sigma_1|$ es de orden mucho mayor que $|\sigma_2|$,

$$|M_c\sigma_1| \gg |M_c\sigma_2| \approx |\alpha K_{av}|, \tag{2.96}$$

y entonces,

$$|M_c\sigma_1| \gg |\alpha K_{av}|. \tag{2.97}$$

Por otra parte, como $|\sigma_1| \to \infty$ cuando $\omega \to 0$, en el límite de bajas frecuencias se cumple

$$|\alpha\sigma_1| \gg 1. \tag{2.98}$$

Utilizando las expresiones (2.97) y (2.98) en la ecuación (2.87),

$$\frac{D_2^2}{\omega^2} \approx \frac{\sigma_1(\rho_f M_c - \alpha K_{av}\rho_b)}{K_{av}M_c - \alpha^2 K_{av}^2}. \tag{2.99}$$

Además, de los coeficientes de la ecuación cuadrática (2.73), sabemos que

$$\sigma_1\sigma_2 = \frac{\rho_f K_{av} - \alpha K_{av} g + ib\alpha K_{av}/\omega}{\rho_b \alpha K_{av} - \rho_f M_c}, \tag{2.100}$$

y de esta expresión, para frecuencias muy bajas,

$$\sigma_1 \approx \frac{ib\alpha K_{av}/\omega}{\sigma_2(\rho_b \alpha K_{av} - \rho_f M_c)}. \tag{2.101}$$

Utilizando la aproximación (2.101) en (2.99), y reemplazando en la ecuación (2.75), resulta

$$\nabla^2 u_2^f \approx \frac{ib\alpha K_{av}}{\sigma_2(\alpha^2 K_{av}^2 - K_{av} M_c)} \omega u_2^f. \tag{2.102}$$

Si además asumimos que en el rango de frecuencias considerado (muy cercano a la frecuencia nula) σ_2 es aproximadamente constante, teniendo en cuenta además que en el límite de bajas frecuencias $b = \eta/\kappa$ y antitransformando, encontramos

$$\nabla^2 u_2^f \approx \frac{\eta\alpha}{\kappa(\alpha^2 K_{av} - M_c)\sigma_2} \frac{\partial u_2^f}{\partial t}. \tag{2.103}$$

Esta es una ecuación de difusión para el desplazamiento relativo del fluido asociado con la onda compresional lenta. Veamos ahora qué ocurre con la presión del fluido: sabemos que los desplazamientos los podemos escribir como

$$u^s = \sigma_1 u_1^f + \sigma_2 u_2^f, \tag{2.104}$$

$$u^f = u_1^f + u_2^f. \tag{2.105}$$

Utilizando esta descomposición de los desplazamientos en las relaciones constitutivas (2.7), podemos expresar a la presión del fluido como la suma de dos componentes (p_{f1} y p_{f2}) asociadas con las ondas compresionales tipo 1 y 2,

$$p_f = p_{f1} + p_{f2}, \tag{2.106}$$

donde

$$p_{f1} = (-\alpha K_{av}\sigma_1 - K_{av})\nabla \cdot u_1^f, \tag{2.107}$$

$$p_{f2} = (-\alpha K_{av}\sigma_2 - K_{av})\nabla \cdot u_2^f. \tag{2.108}$$

A partir de estas igualdades Dutta y Odé [31] introdujeron dos módulos parciales de volumen,

$$K_1 = -\frac{p_{f1}}{\nabla \cdot u_1^f} = \alpha K_{av}\sigma_1 + K_{av}, \tag{2.109}$$

$$K_2 = -\frac{p_{f2}}{\nabla \cdot u_2^f} = \alpha K_{av}\sigma_2 + K_{av}.$$

Si llamamos v^f a la velocidad del fluido, entonces podemos escribir

$$v^f = v_1^f + v_2^f = i\omega(u_1^f + u_2^f), \tag{2.110}$$

donde $v_1^f = i\omega u_1^f$ y $v_2^f = i\omega u_2^f$ son las contribuciones de los dos tipos de ondas compresionales a la velocidad del fluido. Si tenemos en cuenta nuevamente que en el límite de bajas frecuencias $b(\omega) = \eta/\kappa$, de la ecuación (2.102) obtenemos

$$i\omega u_2^f = \frac{\kappa(\alpha^2 K_{av} - M_c)\sigma_2}{\eta\alpha}\nabla^2 u_2^f, \tag{2.111}$$

mientras que de la ecuación (2.109),

$$-\frac{\nabla p_{f2}}{K_2} = \nabla(\nabla \cdot u_2^f) = \nabla^2 u_2^f. \tag{2.112}$$

Utilizando esta última igualdad en la ecuación (2.111), podemos expresar la componente de onda lenta de la velocidad del fluido mediante

$$v_2^f = -\left(\frac{\kappa}{\eta}\right)^* \nabla p_{f2}, \tag{2.113}$$

donde

$$\left(\frac{\kappa}{\eta}\right)^* = \frac{\kappa}{\eta}\left(\frac{\alpha^2 K_{av} - M_c}{\alpha K_2}\sigma_2\right). \tag{2.114}$$

Es interesante notar que la ecuación (2.113) es equivalente a la ley de Darcy, pero en este caso el coeficiente de proporcionalidad entre el flujo de fluido debido a la onda lenta y el gradiente de presión no es $\left(\frac{\kappa}{\eta}\right)$, sino que es $\left(\frac{\kappa}{\eta}\right)^*$, el cual depende de la frecuencia.

Por otra parte, de la ecuación (2.109),

$$\frac{\partial p_{f2}}{\partial t} = -K_2 \nabla \cdot v_2^f, \tag{2.115}$$

y utilizando la expresión (2.113),

$$\frac{\partial p_{f2}}{\partial t} = \frac{\kappa}{\eta}\left(\frac{\alpha^2 K_{av} - M_c}{\alpha}\sigma_2\right)\nabla^2 p_{f2}. \tag{2.116}$$

Esta es una ecuación diferencial parabólica, y es la ecuación de difusión para el cambio en la presión del fluido debido a la propagación de una perturbación compresional lenta. Es muy frecuente escribirla como

$$\frac{\partial p_{f2}}{\partial t} = D\nabla^2 p_{f2}, \tag{2.117}$$

donde

$$D = \frac{\kappa}{\eta}\left(\frac{\alpha^2 K_{av} - M_c}{\alpha}\right)\sigma_2$$

es el *coeficiente de difusividad*, el que tiene unidades longitud al cuadrado sobre tiempo. Recordando que en el límite de bajas frecuencias $\sigma_2 \approx -\alpha K_{av}/M_c$, el coeficiente de difusividad en función de los parámetros del medio está dado por

$$D = \frac{\kappa}{\eta}\left(\frac{M_c K_{av} - \alpha^2 K_{av}^2}{M_c}\right). \tag{2.118}$$

Para analizar el comportamiento del proceso difusivo, consideremos una sola componente de frecuencias y asumamos que la presión solo depende de la coordenada z. Entonces, la ecuación (2.117) queda

$$i\omega p_{f2} = D\frac{\partial^2 p_{f2}}{\partial z^2}. \tag{2.119}$$

Luego, la solución general de esta ecuación será

$$p_{f2} = \left(A_1 e^{z\sqrt{i\omega/D}} + A_2 e^{-z\sqrt{i\omega/D}}\right) e^{i\omega t}, \tag{2.120}$$

que se puede escribir como

$$p_{f2} = \left(A_1 e^{z\sqrt{\omega/2D}} e^{iz\sqrt{\omega/2D}} + A_2 e^{-z\sqrt{\omega/2D}} e^{-iz\sqrt{\omega/2D}}\right) e^{i\omega t}. \tag{2.121}$$

Si pedimos que la perturbación sea acotada para z tendiendo a infinito, entonces A_1 es cero y la solución queda

$$p_{f2} = A e^{-\sqrt{\omega/2D}z} e^{i(\omega t - \sqrt{\omega/2D}z)}. \tag{2.122}$$

De esta expresión podemos ver que la presión del fluido decae exponencialmente con la distancia, y esta caída es mayor a medida que la frecuencia aumenta y que la difusividad es menor. Para ilustrar este comportamiento, supongamos que $A = 1$ y calculemos el módulo de la presión del fluido en función de la distancia z. La Figura 2.12 muestra tal parámetro, para una frecuencia angular $\omega = 50$ Hz, en el caso de la arenisca 1 saturada con agua en un caso y con gas en otro. Podemos ver que en el caso de la arenisca saturada con gas la presión disminuye más abruptamente con la distancia respecto del caso con agua, y esto está relacionado con el hecho de que la difusividad de la arenisca saturada con gas es menor que en el caso de la arenisca saturada con agua.

Cuando se estudia el proceso de la difusión de la presión del fluido asociado con la propagación de ondas lentas en medios porosos saturados, se suele definir una longitud

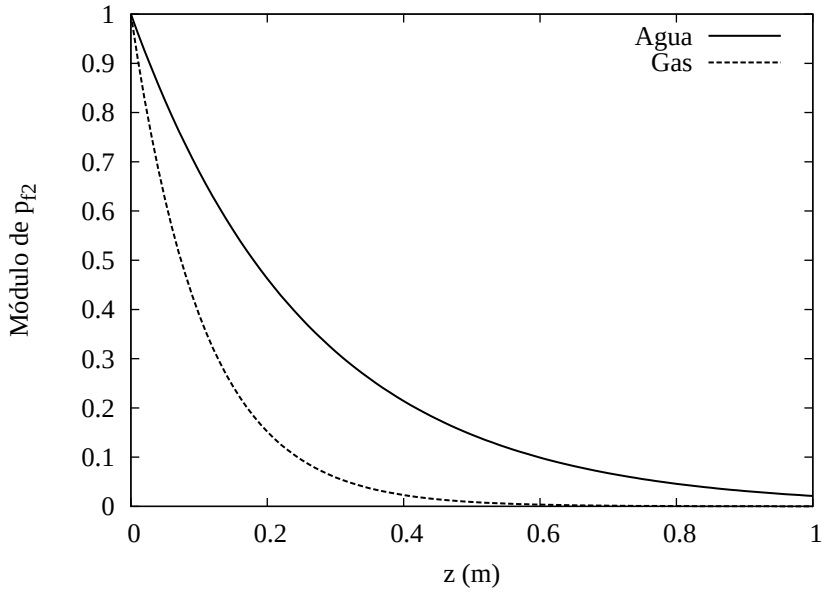

Figura 2.12: Módulo de la presión del fluido ($|p_{f2}|$) en función de la distancia z, para la arenisca 1 saturada con agua en un caso y con gas en otro.

característica denominada *longitud de difusión*. De acuerdo con Norris [67], la longitud de difusión L_d está dada por

$$L_d = \sqrt{D/\omega}. \tag{2.123}$$

Dado que no parece haber un acuerdo claro en la definición e interpretación física de este parámetro, es interesante notar que al reemplazar esta definición en la ecuación (2.122), se cumple

$$\frac{|p_{f2}(z = L_d)|}{|p_{f2}(z = 0)|} = e^{-1/\sqrt{2}} \approx \frac{1}{2}. \tag{2.124}$$

Es decir, para una distancia igual a la longitud de difusión el módulo de la presión del fluido disminuye a la mitad de su valor inicial. En los casos analizados en la Figura 2.12, la longitud de difusión es de aproximadamente 18 cm para la arenisca saturada con agua, y de 7.5 cm para el caso saturado con gas.

Para concluir este capítulo es importante remarcar que en el límite de bajas frecuencias, la componente compresional de las ecuaciones de Biot puede desacoplarse en una onda compresional de propagación que obedece una ecuación diferencial hiperbólica y una segunda onda compresional asociada con una ecuación diferencial parabólica. La perturbación asociada con la ecuación diferencial hiperbólica describe la propagación de ondas

compresionales clásicas, similares a las que se propagan a través de sólidos elásticos. Por otra parte, la ecuación diferencial parabólica se asocia con las ondas lentas, las cuales en este rango de frecuencias no son ondas de propagación sino que son procesos de difusión de la presión del fluido. Estos procesos difusivos se generan cada vez que las ondas clásicas interactúan con heterogeneidades del medio, a través de un proceso de conversión de energía entre la onda rápida incidente y las ondas lentas generadas (reflejadas y transmitidas) en las interfases de las heterogeneidades. Distintos autores han estudiado estas conversiones en el caso de interfases planas que separan dos semiespacios infinitos homogéneos (por ejemplo, [31] y [82], entre otros), y han encontrado que proporciones significativas de la energía de la onda clásica incidente puede convertirse a energía de ondas lentas, y luego disipada en los procesos difusivos. Los efectos de estas conversiones sobre el comportamiento de las ondas clásicas se analizarán en detalle en los próximos capítulos.

Capítulo 3

Efectos mesoscópicos: Simulación numérica de propagación de ondas

Tal como mencionamos en el capítulo anterior, la principal consecuencia de la Teoría de Biot es la existencia de una onda compresional adicional (onda lenta), que en el límite de bajas frecuencias no es una onda de propagación sino que es un proceso de difusión de la presión del fluido poral. La existencia de esta onda adicional puede modificar fuertemente el comportamiento de las ondas clásicas. Esto se debe al hecho de que cuando una onda clásica viaja a través de un medio heterogéneo se producen conversiones de energía entre esta perturbación y las ondas lentas generadas en las heterogeneidades. Si el medio contiene una gran cantidad de inhomogeneidades de escalas mesoscópicas, es decir, heterogeneidades de tamaño mayor que el espacio poral pero menor que las longitudes de onda predominantes, estas conversiones de energía se multiplican y producen importantes efectos de atenuación y dispersión de velocidad sobre la onda clásica primaria. Estos efectos de atenuación y dispersión se conocen con el nombre de *efectos mesoscópicos*, y son muy importantes en el contexto de la geofísica de exploración. De hecho, de acuerdo con resultados recientes, constituyen el mecanismo de atenuación más importante para las ondas compresionales clásicas que se propagan en rocas de reservorio a frecuencias sísmicas [72].

Es interesante notar que el proceso físico asociado con los efectos mesoscópicos puede visualizarse también de la siguiente manera: cuando una onda compresional clásica comprime al medio heterogéneo, las diferentes regiones pueden sufrir distintos esfuerzos e inducir distintas presiones en sus fluidos porales debido a que poseen propiedades elásticas diferentes. Estos gradientes en la presión del fluido poral producen flujo de fluido, lo que se traduce en pérdida de energía y dispersión de velocidad de la onda compresional clásica que se está propagando. Estos efectos también pueden producirse como resultado de la propagación de una onda de corte, particularmente cuando las heterogeneidades de mesoescala poseen una distribución geométrica anisotrópica [61].

White et al. [89, 88] fueron los primeros en estudiar las consecuencias del flujo gene-

rado por la propagación de ondas compresionales a través de un medio con heterogeneidades de mesoescala, y mostraron que este mecanismo puede producir efectos muy importantes en el caso de rocas parcialmente saturadas con agua y gas para frecuencias sísmicas. Particularmente, obtuvieron soluciones aproximadas para la respuesta sísmica de capas porosas planas saturadas alternadamente con agua y gas [89], y de concentraciones esféricas de gas distribuidas en el espacio poral de una roca porosa saturada con agua [88]. A partir de estos trabajos la comunidad geofísica reconoció la importancia de este fenómeno, y desde entonces distintos autores han realizado diversas contribuciones para estudiar a fondo este mecanismo de atenuación y dispersión. Algunos de ellos propusieron otros modelos analíticos para explicar la respuesta de rocas saturadas conteniendo heterogeneidades de mesoescala con propiedades muy específicas. En este sentido, podemos mencionar el trabajo de Pride y Berryman [71], en el que se presenta un modelo de promediación volumétrica para obtener la respuesta sísmica de un medio poroso que incluye heterogeneidades con una dada dimensión característica. Otra contribución importante se debe a Johnson [48], quien obtuvo una solución analítica para la respuesta de una roca parcialmente saturada de gas. Por otra parte, Norris [67] y Gurevich y Lopatnikov [41] profundizaron el conocimiento de la respuesta de medios porosos constituidos por capas alternantes. La principal desventaja que presentan estas teorías analíticas es que pueden ser utilizadas con exactitud sólo en el caso de rocas que contienen heterogeneidades de mesoescala con geometrías ideales y muy específicas.

Los efectos mesoscópicos también pueden estudiarse realizando simulación numérica de propagación de ondas, pues esto permite analizar el efecto de las heterogeneidades en la propagación de las perturbaciones generadas en la fuente. En principio, esta forma de analizar el mecanismo mesoscópico parece ser la más directa y, además, no estaría limitada a geometrías específicas para las heterogeneidades. Sin embargo, hasta la fecha no hay evidencias de que se haya utilizado este procedimiento para estudiar los efectos mesoscópicos en el caso de frecuencias sísmicas. Esto se debe posiblemente a la enorme relación entre las longitudes de onda para estas frecuencias y las dimensiones de las longitudes de difusión que típicamente se observan en rocas de reservorio saturadas con agua o gas. En el caso de frecuencias sónicas y mayores, podemos mencionar el trabajo que publicaron Helle et al. [44], en el que se realizaron experimentos numéricos para estudiar la propagación de ondas a través de una muestra de roca con saturación parcial de gas para frecuencias entre 10 y 500 KHz. Estos autores encontraron que las conversiones de

energía entre la onda compresional primaria y las ondas lentas generadas en las heterogeneidades del medio constituyen el principal mecanismo de atenuación del campo de onda primario.

En este capítulo presentaremos brevemente la teoría de White [89], y la utilizaremos para analizar los efectos mesoscópicos de algunos medios estratificados que alternan agua y gas en sus poros. Luego, implementaremos un procedimiento de elementos finitos de descomposición de dominio para realizar simulación numérica de propagación de ondas a través de dominios bidimensionales, con el objetivo de validar las conclusiones obtenidas mediante este procedimiento en el caso de medios estratificados y frecuencias sísmicas con las que se desprenden de la teoría analítica de White [89]. La finalidad de esta comparación es comprobar la utilidad de la simulación numérica de propagación de ondas para el estudio de los efectos mesoscópicos en geometrías generales, aún en el caso de frecuencias sísmicas. Los principales resultados de este capítulo fueron publicados en la referencia [77].

3.1 Revisión de la teoría de White

La propagación de una perturbación compresional a través de una sola interfase separando dos medios porosos saturados no se ve sustancialmente afectada por el flujo inducido a través de la superficie. Sin embargo, en ambientes sedimentarios de interés exploratorio suele observarse que una sección gruesa de roca está compuesta por capas finas que alternan distintas propiedades. En este sentido, muchos de los procesos sedimentarios son cíclicos por naturaleza. Aunque la estratificación no resulte periódica en sentido estricto, a menudo la propagación de ondas en medios estratificados puede aproximarse utilizando un medio periódico. Por ejemplo, frecuentemente la saturación neta de gas en espesores importantes ocurre en capas finas, separadas por rocas saturadas con otros fluidos. En estos casos, es esperable que los efectos de flujo inducido en las superficies individuales se superpongan y terminen produciendo consecuencias significativas sobre el comportamiento de la onda compresional que se propaga a través del medio [89].

Con esta motivación, White et al. [89] consideraron un medio periódico, estratificado, compuesto por capas alternantes, tal como muestra la Figura 3.1. En ella podemos observar que la roca está compuesta por capas planas de materiales tipo 1 y 2, de espesores d_1 y d_2, respectivamente. Estos autores suponen además que una onda compresional clásica

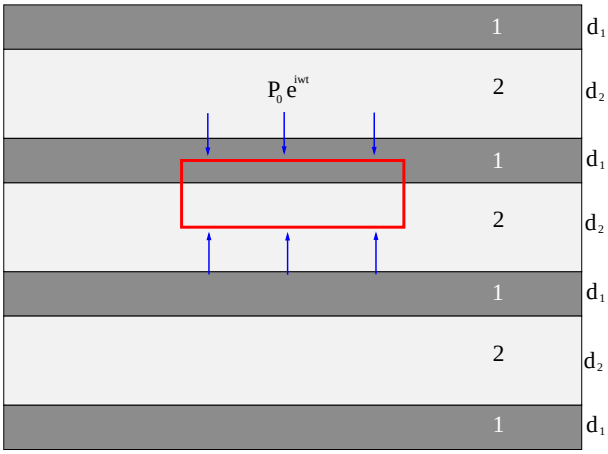

Figura 3.1: Geometría del medio periódico estratificado que alterna dos tipos de medios porosos saturados. Este modelo unidimensional simple es el utilizado en la Teoría de White. El rectángulo rojo muestra el volumen elemental representativo seleccionado para obtener las propiedades equivalentes del medio heterogéneo.

viaja perpendicularmente a la estratificación, y que la longitud de onda es mucho mayor que los espesores d_1 y d_2. Es decir, es un medio con heterogeneidades de mesoescala. Bajo estas suposiciones, el módulo de onda plana complejo *equivalente* del medio heterogéneo puede obtenerse considerando esfuerzos y deformaciones aplicados sobre un volumen elemental representativo del medio. Dado que por simetría la onda compresional no puede generar flujo en los centros de las capas planas, White et al. [89] tomaron un volumen elemental rectangular con lados paralelos a la estratificación y ubicados en los centros de dos capas consecutivas, similar al rectángulo rojo de la Figura 3.1. Este volumen se caracteriza por tener dimensiones mucho menores que la longitud de onda, es representativo del medio heterogéneo y además el flujo a través de sus caras es nulo.

Con el objetivo de determinar el módulo de onda plana complejo equivalente, estos autores aplicaron una compresión unidimensional oscilatoria de la forma $P_0 e^{i\omega t}$ sobre las caras horizontales del volumen elemental, como muestra el esquema de la Figura 3.1. Luego, aproximaron la deformación resultante y la relación entre esta deformación y la presión aplicada les permitió obtener el módulo de onda plana complejo equivalente, el cual contiene la información de dispersión de velocidad y atenuación del medio heterogéneo [35, 74]. Este módulo para una onda compresional clásica que viaja en la

dirección perpendicular a la estratificación resulta [89]

$$\overline{M}_c = \left[\frac{1}{M_0} + \frac{2(r_2 - r_1)^2}{i\omega(d_1 + d_2)(I_1 + I_2)}\right]^{-1}, \tag{3.1}$$

donde

$$M_0 = \left(\frac{p_1}{M_{c_1}} + \frac{p_2}{M_{c_2}}\right)^{-1}, \tag{3.2}$$

con $p_l = d_l/(d_1 + d_2)$, $l = 1, 2$.

Omitiendo el subíndice l por claridad, los coeficientes M_c son los módulos de onda plana "cerrados" (en ausencia de flujo) de cada capa,

$$r = \frac{\alpha K_{av}}{M_c} \tag{3.3}$$

es la relación entre la tensión del fluido de la onda compresional rápida y el esfuerzo normal total, mientras que

$$I = \frac{\eta}{\kappa k}\coth\left(\frac{kd}{2}\right) \tag{3.4}$$

es una impedancia relacionada con la onda compresional lenta,

$$k = \sqrt{\frac{i\omega\eta}{\kappa K_E}} \tag{3.5}$$

es el número de onda complejo de la onda lenta, y

$$K_E = \frac{M_m K_{av}}{M_c}, \tag{3.6}$$

es un módulo efectivo, donde

$$M_m = K_m + \frac{4}{3}\mu \tag{3.7}$$

es el módulo de onda plana de la onda compresional rápida de la matriz seca.

El módulo de onda plana complejo equivalente $\overline{M}_c$ y la densidad media del medio heterogéneo $\bar{\rho} = p_1\rho_b^1 + p_2\rho_b^2$, donde ρ_b^1 y ρ_b^2 son las densidades de los dos tipos de materiales, definen al sólido viscoelástico equivalente. Estos parámetros permiten obtener la atenuación y dispersión de velocidad del medio heterogéneo original. En este sentido, usando el concepto de velocidad compleja (V_{pc}), se cumple [11]

$$\bar{\rho}V_{pc}^2 = \overline{M}_c. \tag{3.8}$$

Esta velocidad compleja permite obtener la velocidad de fase y atenuación de la onda compresional clásica mediante [11]

$$v_p(\omega) = \left(Re\left(\frac{1}{V_{pc}}\right)\right)^{-1}, \tag{3.9}$$

$$Q_p^{-1}(\omega) = \frac{Im(V_{pc}^2)}{Re(V_{pc}^2)}. \tag{3.10}$$

Si en este análisis asumimos que las propiedades de las matrices de los medios 1 y 2 son las mismas, es decir, si los medios sólo difieren en sus fluidos porales (agua y gas, por ejemplo), entonces la frecuencia aproximada en la que se ubica el pico de atenuación está dada por [13]

$$f_m = \frac{8\kappa_1 K_{E_1}}{\pi\eta_1 d_1^2} = \frac{\kappa_1}{\eta_1}\frac{8K_{av_1}(K_{m_1} + \frac{4}{3}\mu_1)}{\pi M_{c_1} d_1^2}, \tag{3.11}$$

donde el subíndice 1 se refiere al medio que contiene agua en su espacio poral para el caso de un medio estratificado que alterna capas con agua y con gas. Esta ecuación indica que las frecuencias en las que se producen las máximas pérdidas de energía por la presencia de heterogeneidades de mesoescala se mueven hacia menores valores para viscosidades mayores y para menores permeabilidades. Es decir, este mecanismo de atenuación se comporta de manera opuesta al mecanismo de atenuación intrínseca de Biot. Es interesante notar que, tal como observaron Carcione y Picotti [13], la frecuencia del pico de atenuación dada por la ecuación (3.11) se obtiene pidiendo que la longitud de difusión sea igual a $d_1/4$.

Como ya se mencionó, el mecanismo mesoscópico de atenuación se debe a la generación de ondas lentas en las heterogeneidades. Para frecuencias lo suficientemente bajas tales que las longitudes características de las heterogeneidades son mucho menores que la longitud de difusión definida por la ecuación (2.123), hay tiempo suficiente para que se produzca el proceso de difusión de presiones y, entonces, para que se equilibre la presión del fluido. Es decir, la presión en los fluidos del medio heterogéneo tiende al estado uniforme (estado de "isostress"). En estos casos, los efectos mesoscópicos son despreciables y las propiedades de la roca se pueden obtener utilizando el módulo de Gassmann considerando un módulo de volumen efectivo para el fluido dado por la fórmula de Reuss [62, 13]

$$\frac{1}{K_f} = \frac{p_1}{K_{f_1}} + \frac{p_2}{K_{f_2}}. \tag{3.12}$$

En el otro extremo del espectro ($\omega \to \infty$), cuando las longitudes características de las heterogeneidades son mucho mayores que la longitud de difusión, no hay tiempo para que haya comunicación entre las presiones de las distintas capas pues el proceso difusivo se desarrolla únicamente en los fluidos inmediatamente próximos a las interfases entre las capas. Cuando ocurre esto, las presiones de los diferentes fluidos no se ven afectadas por el proceso difusivo, y entonces pueden asumirse espacialmente uniformes y distintas entre sí. En consecuencia, los efectos de flujo inducido del fluido pueden ignorarse. En esta situación, el módulo de onda plana equivalente es real y las propiedades de la roca pueden obtenerse utilizando el teorema de Hill [13, 45, 62], que permite determinar el límite para altas frecuencias

$$\overline{M}_c(\omega \to \infty) = \left(\frac{p_1}{M_{c_1}} + \frac{p_2}{M_{c_2}} \right)^{-1}. \tag{3.13}$$

Por último, para frecuencias intermedias los procesos de difusión de presiones de los fluidos generan gradientes de presión, con la consecuente atenuación y dispersión de velocidad de la onda clásica que viaja a través del medio. Estos efectos se ilustran a continuación

3.1.1 Ejemplos numéricos

En esta sección utilizaremos el modelo de White que presentamos previamente para analizar la respuesta sísmica de medios unidimensionales sencillos, similares al que muestra la Figura 3.1. Con este objetivo, supongamos que la matriz sólida es homogénea, y que las heterogeneidades de mesoescala vienen dadas por distintos tipos de fluidos saturantes. Asumimos también que la matriz sólida de este modelo estratificado es la arenisca 2 de la Tabla 2.1, y que las capas de material tipo 1 poseen agua en sus poros, mientras que las tipo 2 poseen gas, con propiedades dadas en la Tabla 2.2.

Analicemos dos casos distintos. En el primero (caso "A"), supongamos que las capas de los medios tipo 1 y 2 tienen espesores equivalentes e iguales a 0.4m. En el segundo (caso "B"), estos espesores también son iguales entre si, pero con un valor 0.2m. Luego, utilizando la ecuación (3.1) obtenemos el módulo de onda plana complejo equivalente, y mediante las expresiones (3.9) y (3.10) obtenemos la velocidad de fase y atenuación del medio en función de la frecuencia.

La Figura 3.2 muestra la velocidad de fase en función de la frecuencia lineal para los casos A y B. En ella podemos observar la dispersión de velocidad debido al flujo

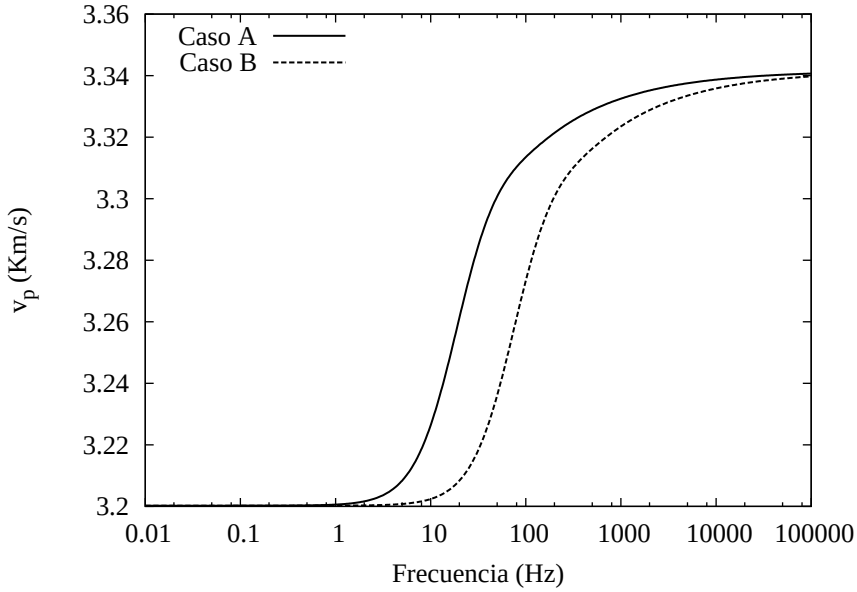

Figura 3.2: Velocidad de fase obtenida con la teoría de White para un medio estratificado que alterna capas con agua y con gas. En el caso A, las capas tienen un espesor de 0.4m, mientras que en el caso B, 0.2m.

inducido por la onda compresional que viaja perpendicularmente a la estratificación del medio. En ambos casos la velocidad de fase aumenta con la frecuencia desde un valor de aproximadamente 3.2 Km/s para bajas frecuencias hasta 3.34 Km/s en el límite de altas frecuencias. Es interesante notar en estas curvas que en los extremos de bajas y altas frecuencias las velocidades de fase de los dos casos coinciden. Este comportamiento se debe al hecho de que los medios heterogéneos de los dos experimentos difieren únicamente en los espesores de las capas, y además, las relaciones entre los espesores (p_1 y p_2) son iguales. Luego, utilizando la fórmula de Reuss (3.12) para obtener el módulo de volumen efectivo para el fluido en un extremo del espectro, y la fórmula (3.13) para obtener el módulo de onda plana equivalente en el otro, se observa que las velocidades deben coincidir, tanto en el límite de bajas como de altas frecuencias. De hecho, usando estas fórmulas se encuentra que la velocidad de fase en el límite de bajas frecuencias debe ser en ambos casos de aproximadamente 3.2 Km/s, mientras que en el límite de altas frecuencias, 3.34 Km/s, lo que está de acuerdo con la Figura 3.2.

La Figura 3.3 muestra el inverso del factor de calidad ($1/Q_p$) en función de la frecuencia lineal para los casos A y B. Podemos observar que el pico de atenuación se produce

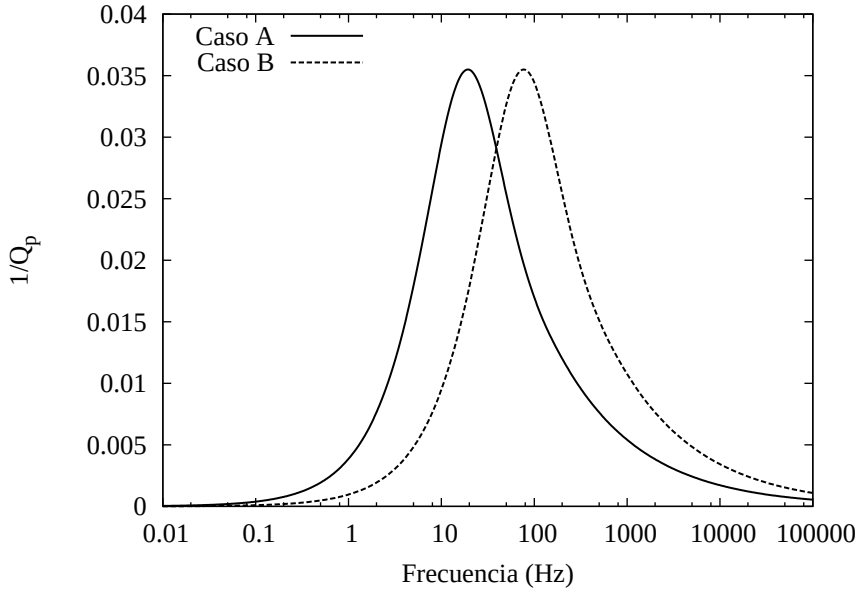

Figura 3.3: Inverso del factor de calidad obtenido con la teoría de White para un medio estratificado que alterna capas con agua y con gas. En el caso A, las capas tienen un espesor de 0.4m, mientras que en el caso B, 0.2m.

para menores frecuencias en el caso A, es decir, cuando la longitud característica de las heterogeneidades es mayor. Este hecho está de acuerdo con la ecuación (3.11). En esta figura podemos observar también los altos niveles de atenuación debidos al flujo inducido por la onda compresional que viaja a través del medio heterogéneo. La magnitud máxima de la pérdida, es decir el mínimo valor de Q_p, es prácticamente el misma en ambos casos e igual a $Q_p \approx 28$. Este pico de atenuación se produce para una frecuencia de aproximadamente 20Hz en el caso A, y de 77Hz en el caso B.

3.2 Propagación de ondas en medios que contienen heterogeneidades de mesoescala

Tal como mencionamos en la introducción de este capítulo, la simulación numérica de propagación de ondas permite analizar de manera directa la dispersión de velocidades y pérdida de amplitudes producidas por heterogeneidades de mesoescala. El procedimiento para visualizar y cuantificar estos efectos consiste en definir un dominio que contiene las heterogeneidades de mesoescala, generar perturbaciones en el mismo y mediante la

resolución numérica de las ecuaciones de movimiento analizar los cambios de forma y amplitud que experimenta la onda clásica primaria a medida que viaja a través de las heterogeneidades, lo que permite determinar el factor de calidad equivalente del medio. La principal ventaja de esta forma de trabajo radica en que no nos limita a medios que poseen heterogeneidades de geometrías ideales, como ocurre con los métodos analíticos.

Con el objetivo previamente mencionado, en esta sección utilizaremos un método de elementos finitos para realizar simulación numérica de propagación de ondas, resolviendo las ecuaciones de movimiento (2.17) agregando un término adicional vinculado con la fuente. En este sentido, si $F(x,\omega) = (F^s(x,\omega), F^f(x,\omega))$ es el término de la fuente, donde $F^s(x,\omega)$ y $F^f(x,\omega)$ están relacionados con la fase sólida y fluida, respectivamente, debemos resolver las siguientes ecuaciones

$$-\omega^2\mathcal{P}u(x,\omega) + i\omega\mathcal{B}u(x,\omega) - \mathcal{L}(u(x,\omega)) = F(x,\omega), \quad x \in \Theta, \tag{3.14}$$

donde Θ es el dominio bidimensional en el cual analizaremos el problema.

También debemos establecer condiciones de borde adecuadas para definir completamente nuestro problema diferencial. En tal sentido, sea Γ la frontera del dominio Θ, y sea ν la normal unitaria exterior sobre Γ. Definamos también un vector unitario χ tangente a Γ, de modo que $\{\nu, \chi\}$ es un sistema ortonormal sobre Γ. Con el propósito de minimizar los efectos asociados a los bordes del dominio computacional (reflexiones espúreas), utilizaremos las condiciones de borde absorbentes propuestas por Santos et al. [85] para medios porosos no disipativos. Por lo tanto, si definimos

$$\mathcal{G}_\Gamma(u) = \Big(\sigma(u)\nu\cdot\nu, \sigma(u)\nu\cdot\chi, p_f(u)\Big)^t, \quad S_\Gamma(u) = \big(u^s\cdot\nu, u^s\cdot\chi, u^f\cdot\nu\big)^t, \tag{3.15}$$

resolveremos las ecuaciones (3.14) con las siguientes condiciones de contorno

$$-\mathcal{G}_\Gamma(u(x,\omega)) = i\omega\mathcal{D}S_\Gamma(u(x,\omega)), \qquad x \in \Gamma. \tag{3.16}$$

Estas condiciones de borde fueron obtenidas a partir de consideraciones cinemáticas y dinámicas sobre los frentes de onda que arriban a la frontera [85]. La matriz $\mathcal{D}$ en la expresión (3.16) es definida positiva, y está dada por $\mathcal{D} = \mathcal{A}^{\frac{1}{2}}\mathcal{N}^{\frac{1}{2}}\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}$, donde $\mathcal{N} = \mathcal{A}^{-\frac{1}{2}}\mathcal{M}^{\frac{1}{2}}\mathcal{A}^{-\frac{1}{2}}$ y

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \rho_b & 0 & \rho_f \\ 0 & \rho_b - \frac{(\rho_f)^2}{g} & 0 \\ \rho_f & 0 & g \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M} = \begin{pmatrix} \lambda_c + 2\mu & 0 & \alpha\, K_{av} \\ 0 & \mu & 0 \\ \alpha\, K_{av} & 0 & K_{av} \end{pmatrix}. \tag{3.17}$$

Para resolver el problema planteado tenemos que establecer una formulación variacional de las ecuaciones (3.14) bajo las condiciones de borde (3.16). Para esto, necesitamos introducir notación. Dado $X \subset \mathbb{R}^2$ con frontera ∂X, sean $(\cdot,\cdot)_X$ y $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\partial X}$ los productos internos complejos en $L^2(X)$ y $L^2(\partial X)$ para funciones escalares, vectoriales o matriciales. También, para $s \in \mathbb{R}$, $\|\cdot\|_{s,X}$ y $|\cdot|_{s,X}$ denotan la norma y seminorma usual para el espacio de Sobolev $H^s(X)$. Por otra parte, si $X = \Theta$ o $X = \Gamma$, el subíndice X puede omitirse, de modo que $(\cdot,\cdot) = (\cdot,\cdot)_\Theta$ y $\langle\cdot,\cdot\rangle = \langle\cdot,\cdot\rangle_\Gamma$. También, sean

$$\begin{aligned} H(div;\Theta) &= \{v \in [L^2(\Theta)]^2 : \nabla\cdot v \in L^2(\Theta)\}, \\ H^1(div;\Theta) &= \{v \in [H^1(\Theta)]^2 : \nabla\cdot v \in H^1(\Theta)\}, \end{aligned}$$

con las normas

$$\|v\|_{H(div;\Theta)} = \left[\|v\|_0^2 + \|\nabla\cdot v\|_0^2\right]^{1/2}, \quad \|v\|_{H^1(div;\Theta)} = \left[\|v\|_1^2 + \|\nabla\cdot v\|_1^2\right]^{1/2}.$$

Introduzcamos también el espacio $\mathcal{V} = [H^1(\Theta)]^2 \times H(div;\Theta)$. Entonces, multiplicando la ecuación (3.14) por $v \in \mathcal{V}$, integrando por partes y aplicando las condiciones de borde (3.16), se encuentra que la solución u de la ecuación (3.14) bajo las condiciones de borde absorbentes (3.16) satisface *la forma débil o variacional*:

$$\begin{aligned} -\omega^2 (\mathcal{P}u, v) + i\omega (\mathcal{B}u, v) + \sum_{l,m} \left(\sigma_{lm}(u), \epsilon_{lm}(v^{(1)})\right) - \left(p_f(u), \nabla\cdot v^{(2)}\right) \\ +i\omega \langle \mathcal{D}\ S_\Gamma(u), S_\Gamma(v)\rangle = (F, v), \qquad v = \left(v^{(1)}, v^{(2)}\right)^t \in \mathcal{V}. \end{aligned} \tag{3.18}$$

El argumento presentado por Santos y Sheen [84] en el caso de una generalización del modelo de Biot para un medio compuesto por dos sólidos y un fluido puede usarse aquí para demostrar que bajo la suposición de existencia de la solución del problema diferencial, la forma débil (3.18) tiene una única solución para cualquier frecuencia ω distinta de cero.

3.2.1 Algoritmo numérico

Para analizar los efectos de las heterogeneidades de mesoescala en la propagación de ondas clásicas, vamos a resolver numéricamente la ecuación (3.18) en un dominio rectangular Θ en el plano (x, y). Con este objetivo, sea $\mathcal{T}^h(\Theta)$ una partición no solapada de Θ en rectángulos Θ_j de diámetro acotado por h, de modo que $\overline{\Theta} = \cup_{j=1}^J \overline{\Theta}_j$, donde

en este contexto la barra superior denota la clausura del conjunto. Utilizamos dos espacios de elementos finitos distintos asociados con la partición $\mathcal{T}^h(\Theta)$ para discretizar los desplazamientos de las fases sólida y fluida. Para aproximar cada componente (horizontal y vertical) del desplazamiento del sólido utilizamos el espacio de elementos finitos no conforme denotado $\mathcal{NC}^h$, presentado por Douglas et al. [28]. Por otra parte, para aproximar el desplazamiento del fluido usamos la parte vectorial del espacio de Raviart-Thomas-Nedelec [75, 65] de orden cero, denotado $\mathcal{W}^h$.

Definamos estos espacios de elementos finitos localmente sobre un cuadrado de referencia $\widehat{R} = [-1,1]^2$: para cada componente del desplazamiento del sólido, sea

$$\widehat{\mathcal{NC}}(\widehat{R}) = \mathrm{Span}\{1, \hat{x}, \hat{y}, \alpha(\hat{x}) - \alpha(\hat{y})\}, \quad \alpha(\hat{x}) = \hat{x}^2 - \frac{5}{3}\hat{x}^4,$$

donde los grados de libertad son los valores en los puntos medios de los lados de $\widehat{R}$. Por otra parte, para el vector desplazamiento del fluido, si $\psi^L(\hat{x}) = \frac{-1+\hat{x}}{2}$, $\psi^R(\hat{x}) = \frac{1+\hat{x}}{2}$, $\psi^B(\hat{y}) = \frac{-1+\hat{y}}{2}$, $\psi^T(\hat{y}) = \frac{1+\hat{y}}{2}$, sea

$$\widehat{\mathcal{W}}(\widehat{R}) = \mathrm{Span}\big\{(\psi^L(\hat{x}), 0)^t, (\psi^R(\hat{x}), 0)^t, (0, \psi^B(\hat{y}))^t, (0, \psi^T(\hat{y}))^t\big\}.$$

La Figura 3.4 muestra los grados de libertad (gdl) locales asociados con cada componente del desplazamiento del sólido y del fluido.

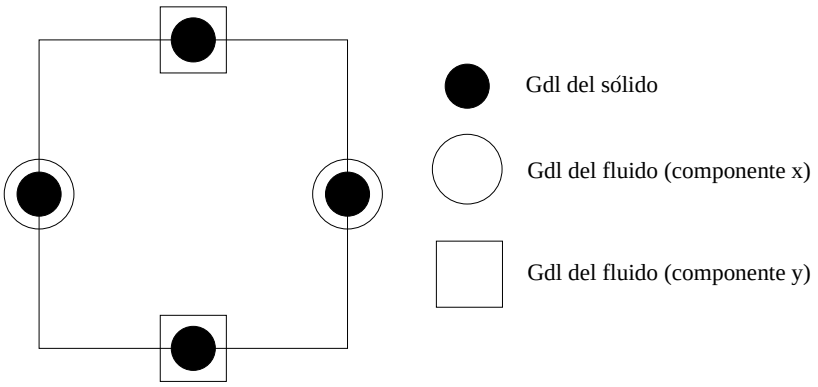

Figura 3.4: Grados de libertad (gdl) asociados con cada componente del desplazamiento del sólido y del fluido.

Los espacios de elementos finitos asociados con la partición $\mathcal{T}^h$ están definidos por traslaciones y escalados como se muestra a continuación. Para cada Θ_j, sea $F_{\Theta_j} : \widehat{R} \to \Theta_j$

un mapeo afín invertible tal que $F_{\Theta_j}(\widehat{R}) = \Theta_j$, y definimos

$$\begin{aligned} \mathcal{NC}_j^h &= \{v = (v_1, v_2)^t : v_i = \widehat{v}_i \circ F_{\Theta_j}^{-1}, \widehat{v}_i \in \widehat{\mathcal{NC}}(\widehat{R}),\ i = 1, 2\}, \\ \mathcal{W}_j^h &= \{w : w = \widehat{w} \circ F_{\Theta_j}^{-1}, \widehat{w} \in \widehat{\mathcal{W}}(\widehat{R})\}. \end{aligned}$$

Sea $\Gamma_j = \partial\Theta \cap \partial\Theta_j$, $\Gamma_{jk} = \partial\Theta_j \cap \partial\Theta_k$, y denotemos mediante ξ_j y ξ_{jk} a los puntos medios de los segmentos Γ_j y Γ_{jk}, respectivamente. Entonces, si llamamos

$$\begin{aligned} \mathcal{NC}^h &= \{v : v_j = v|_{\Theta_j} \in \mathcal{NC}_j^h,\ v_j(\xi_{jk}) = v_k(\xi_{jk})\ \forall (j,k)\}, \\ \mathcal{W}^h &= \{w \in H(div;\Theta) : w_j = w|_{\Theta_j} \in \mathcal{W}_j^h\}, \end{aligned}$$

el espacio de elementos finitos para aproximar la solución u queda entonces definido por

$$\mathcal{V}^h = (\mathcal{NC}^h)^2 \times \mathcal{W}^h.$$

La teoría de aproximación estándar implica que, para todo $\varphi = \left(\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}\right)^t \in [H^2(\Theta)]^2 \times H^1(div;\Theta)$,

$$\inf_{p \in \mathcal{NC}^h} \left[\|\varphi^{(1)} - p\|_0 + h \left(\sum_j \|\varphi^{(1)} - p\|_{1,\Theta_j}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \leq Ch^2 \|\varphi^{(1)}\|_2, \tag{3.19a}$$

$$\inf_{p \in \mathcal{W}^h} \|\varphi^{(2)} - p\|_0 \leq Ch \|\varphi^{(2)}\|_1, \tag{3.19b}$$

$$\inf_{p \in \mathcal{W}^h} \|\varphi^{(2)} - p\|_{H(div;\Theta)} \leq Ch \left(\|\varphi^{(2)}\|_1 + \|\nabla \cdot \varphi^{(2)}\|_1 \right). \tag{3.19c}$$

El procedimiento *global* de elementos finitos se define de la siguiente manera: encontrar $u^h = \left(u^{(1,h)}, u^{(2,h)}\right)^t \in \mathcal{V}^h$ tal que

$$\begin{aligned} -\omega^2 \left(\mathcal{P}u^h, v\right) + i\omega \left(\mathcal{B}u^h, v\right) + \sum_j \left[\left(\sigma_{lm}(u^h), \epsilon_{lm}(v^{(1)})\right)_{\Theta_j} - \left(p_f(u^h), \nabla \cdot v^{(2)}\right)_{\Theta_j} \right] \\ + i\omega \left\langle \mathcal{D}\ S_\Gamma(u^h), S_\Gamma(v) \right\rangle = (F, v), \qquad v = \left(v^{(1)}, v^{(2)}\right)^t \in \mathcal{V}^h. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Santos y Sheen [84] presentaron la siguiente estimación *a priori* para el error del procedimiento global:

Teorema:

Sea $u = (u^s, u^f) \in \mathcal{V}$ y $u^h \in \mathcal{V}^h$ las soluciones de los problemas (3.18) y (3.20), respectivamente. Luego, tenemos la siguiente estimación del error en la norma de la energía: para $h > 0$ lo suficientemente pequeño se cumple

$$\begin{aligned} &\|u^s - u^{(s,h)}\|_{1,h} + \|\nabla \cdot (u^f - u^{(f,h)})\|_0 \\ &\qquad + |u^{(s)} - u^{(s,h)}|_{0,\Gamma} + |(u^f - u^{(f,h)}) \cdot \nu|_{0,\Gamma} \\ &\leq C(\omega) h \left[\|u^s\|_2 + \|u^f\|_{\frac{3}{2}} + \|\nabla \cdot u^f\|_1 \right]. \end{aligned}$$

La simulación numérica de propagación de ondas con el objetivo de estudiar los efectos mesoscópicos requiere un número muy grande de grados de libertad, lo que se debe a distintas razones. Por un lado, el dominio debe ser lo suficientemente grande como para que la onda clásica primaria pueda viajar algunas longitudes de onda y manifieste de manera significativa los efectos mesoscópicos. Por el otro, el tamaño de la malla debe ser lo suficientemente pequeño como para permitir describir las heterogeneidades de mesoescala (de dimensiones características mucho menores que la longitud de onda) y, además, para que los procesos de difusión de presiones de los fluido que se generan en las heterogeneidades (en los casos de bajas frecuencias) sean debidamente resueltos. Sumado al problema del gran número de grados de libertad, ocurre que no podemos utilizar métodos iterativos para resolver el problema algebraico asociado con el procedimiento global (3.20), pues el mismo es complejo y no-coercivo. Por estas dos razones, este problema algebraico no puede ser resuelto de manera eficiente. Para superar este inconveniente, utilizaremos un algoritmo de descomposición de dominio paralelizado que presentamos a continuación.

Definamos ν_{jk} la normal unitaria exterior al borde Γ_{jk} que va desde Θ_j hacia Θ_k, y sea ν_j la normal unitaria exterior a Γ_j. Sean χ_j y χ_{jk} dos vectores unitarios tangentes a Γ_j y Γ_{jk} tales que $\{\nu_j, \chi_j\}$ y $\{\nu_{jk}, \chi_{jk}\}$ son sistemas ortonormales sobre Γ_j y Γ_{jk}, respectivamente. Luego, consideremos la descomposición del problema (3.14) bajo las condiciones de borde absorbentes (3.16) sobre Θ_j como sigue: para $j = 1, \ldots, J$, encontrar $u_j(x, \omega)$ tal que

$$
\begin{aligned}
-\omega^2 \mathcal{P} u_j + i\omega \mathcal{B} u_j - \mathcal{L}(u_j) &= F, \qquad \Theta_j, && (3.21a)\\
\mathcal{G}_{\Gamma_{jk}}(u_j) + i\omega \beta_{jk} S_{\Gamma_{jk}}(u_j) &= \mathcal{G}_{\Gamma_{kj}}(u_k) - i\omega \beta_{jk} S_{\Gamma_{kj}}(u_k), \quad \Gamma_{jk}, && (3.21b)\\
-\mathcal{G}_{\Gamma_j}(u_j) &= i\omega \mathcal{D} S_{\Gamma_j}(u_j), \qquad \Gamma_j, && (3.21c)
\end{aligned}
$$

donde $\mathcal{G}_{\Gamma_{jk}}$ y $\mathcal{G}_{\Gamma_j}$ están definidos por las expresiones (3.15). En las ecuaciones anteriores, β_{jk} es una función matricial definida positiva, y definida sobre los bordes interiores Γ_{jk}. Las condiciones de transmisión de Robin (3.21b) imponen la continuidad del desplazamiento del sólido, de la componente normal del desplazamiento del fluido y de los esfuerzos en las interfases interiores Γ_{jk}.

Luego, siguiendo los trabajos de Douglas et al. [28] y de Santos y Sheen [84], introducimos un conjunto de multiplicadores de Lagrange λ^h_{jk} asociados con los valores de las

fuerzas en los puntos medios ξ_{jk} de Γ_{jk}, en el sentido que $\lambda^h_{jk} \sim \mathcal{G}_{jk}(u_j)(\xi_{jk})$. Estos multiplicadores de Lagrange λ^h_{jk} pertenecen al siguiente espacio de funciones definido sobre las interfases interiores Γ_{jk}:

$$\Lambda^h = \left\{\lambda^h \colon \lambda^h|_{\Gamma_{jk}} = \lambda^h_{jk} \in [P_0(\Gamma_{jk})]^3 = \Lambda^h_{jk},\ \forall\{j,k\}\right\},$$

donde $P_0(\Gamma_{jk})$ es el espacio constituido por las funciones constantes sobre Γ_{jk}. Además, para $\Gamma = \Gamma_j$ o $\Gamma = \Gamma_{jk}$, sea $\langle\langle u, v\rangle\rangle_\Gamma$ la aproximación de $\langle\cdot,\cdot\rangle_\Gamma$ utilizando la cuadratura del punto medio. Es decir, $\langle\langle u, v\rangle\rangle_\Gamma = (u\overline{v})(\xi_{jk})|\Gamma|$, donde $|\Gamma|$ es la medida de Γ.

Entonces, la iteración de la descomposición de dominio se define como sigue: Para todo $j = 1, \cdots, J$, se elige un valor inicial cualquiera $\left(u_j^{\{h,0\}}, \lambda_{jk}^{\{h,0\}}\right) \in \mathcal{NC}^h_j \times \mathcal{W}^h_j \times \Lambda^h_{jk}$. Luego, para $n = 1, 2, 3, \cdots$, y $j = 1, \cdots, J$, se determina $\left(u_j^{\{h,n\}}, \lambda_{jk}^{\{h,n\}}\right) \in \mathcal{NC}^h_j \times \mathcal{W}^h_j \times \Lambda^h_{jk}$ tal que satisfaga

$$\begin{aligned}
&-\omega^2\left(\mathcal{P}u_j^{\{h,n\}}, v\right)_j + i\omega\left(\mathcal{B}u_j^{\{h,n\}}, v\right)_j \\
&+\sum_{l,m}\left(\sigma_{lm}(u_j^{\{h,n\}}), \epsilon_{lm}(v^{(1)})\right)_j - \left(p_f(u_j^{\{h,n\}}), \nabla\cdot v^{(2)}\right)_j \qquad (3.22a)\\
&\quad +i\omega\left\langle\mathcal{D}\ S_{\Gamma_j}(u_j^{\{h,n\}}), S_{\Gamma_j}(v)\right\rangle_{\Gamma_j} + \sum_k\left\langle\left\langle i\omega\beta_{jk}\mathcal{S}_{\Gamma_{jk}}(u_j^{\{h,n\}}), \mathcal{S}_{\Gamma_{jk}}(v)\right\rangle\right\rangle_{\Gamma_{jk}} \\
&= (F, v)_{\Theta_j} - \sum_k\left\langle\left\langle i\omega\beta_{jk}\mathcal{S}_{\Gamma_{jk}}(u_k^{\{h,n-1\}}), \mathcal{S}_{\Gamma_{jk}}(v)\right\rangle\right\rangle_{\Gamma_{jk}} \\
&\quad +\sum_k\left\langle\left\langle\lambda_{kj}^{\{h,n-1\}}, \mathcal{S}_{\Gamma_{jk}}(v)\right\rangle\right\rangle_{\Gamma_{jk}}, \quad v \in \mathcal{NC}^h(\Theta_j)\times\mathcal{W}^h_j, \\
&\lambda_{jk}^{\{h,n\}} = \lambda_{kj}^{\{h,n-1\}} - i\omega\beta_{jk}[S_{\Gamma_{jk}}(u_j^{\{h,n\}}) + S_{\Gamma_{kj}}(u_k^{\{h,n-1\}})](\xi_{jk}), \quad \text{en } \Gamma_{jk}, \forall k. \qquad (3.22b)
\end{aligned}$$

La ecuación (3.22b), usada para actualizar los multiplicadores de Lagrange, se obtiene directamente evaluando la ecuación (3.21b) en el punto medio ξ_{jk}. La ecuación (3.22a) nos permite recuperar un sistema lineal de 12 ecuaciones, del cual obtenemos los grados de libertad asociados con los desplazamientos de las fases sólida y fluida en cada subdominio Θ_j para la $n-$ésima iteración. La matriz β_{jk} se elige de modo que tiene la misma forma que la matriz $\mathcal{D}$, y sus entradas se obtienen promediando los coeficientes involucrados en la definiciones de las matrices $\mathcal{A}$ y $\mathcal{M}$ sobre ambos lados del borde Γ_{jk}.

El proceso iterativo (3.22a)–(3.22b) es de tipo Jacobi, y converge a la solución u^h del problema (3.20) [84]. Un proceso iterativo el doble de rápido puede definirse realizando

iteraciones de tipo *red–black* [26, 42, 84]. Por último, la solución en el dominio espacio-tiempo se obtiene resolviendo la ecuación (3.22) para un número finito de frecuencias temporales y usando la transformada inversa de Fourier [27].

3.2.2 Experimentos numéricos

Con el fin de analizar la eficiencia de la simulación numérica de propagación de ondas para estudiar los efectos mesoscópicos, utilicemos el algoritmo numérico recientemente presentado para analizar el comportamiento de una onda compresional que viaja a través de un medio estratificado similar a los considerados en la teoría de White.

En tal sentido, supongamos que una onda compresional clásica se propaga a través de un dominio cuadrado Θ, de 800m de lado y constituido por dos subdominios rectangulares Θ_{hom} y Θ_{per}, tales que

$$\begin{aligned} \Theta_{hom} &= \{0 < x < 800\text{m}, \qquad 0 < y < 8.8\text{m}\}, \\ \Theta_{per} &= \{0 < x < 800\text{m}, \qquad 8.8 \leq y < 800\text{m}\}. \end{aligned}$$

El subdominio Θ_{per} está formado por capas planas horizontales de 0.4m de espesor, que contienen alternadamente agua y gas en sus poros pero poseen la misma matriz sólida (arenisca 2 de la Tabla 2.1). Es decir, el modelo estratificado que estamos considerando en esta zona es similar al caso "A" que estudiamos cuando presentamos la teoría de White. Por otra parte, el subdominio Θ_{hom} es una capa plana homogénea que se encuentra en la base del dominio, de 8.8m de espesor, y que se corresponde con la arenisca 2 de la Tabla 2.1 completamente saturada con agua. Consideramos esta pequeña zona homogénea para que la fuente se encuentre en un medio poroso homogéneo, y de esta manera aseguramos la generación de frentes de onda circulares.

El término de fuente $\left(F^s, F^f\right)$ es una perturbación compresional puntual, ubicada dentro de la región Θ_{hom} en el punto $(x_f, y_f) = (400\text{m}, 4\text{m})$ y aplicada a la matriz sólida. La expresión para este término es

$$F^s(x, y, \omega) = \nabla\delta_{x_f,y_f} g(\omega), \qquad F^f(x, y, \omega) = 0, \tag{3.23}$$

donde δ_{x_f,y_f} denota la distribución de Dirac en (x_f, y_f). La función $g(\omega)$ es la transformada de Fourier de la función

$$g(t) = -2\xi(t - t_0)e^{-\xi(t-t_0)^2}, \tag{3.24}$$

con $\xi = 8\ f_0^2$, $t_0 = 1.25/f_0$ y $t = 0$ es el momento en que empieza a actuar esta fuente. Como queremos comparar los efectos mesoscópicos obtenidos previamente con la teoría de White con el comportamiento que se desprende de la simulación numérica de la propagación de ondas, elegimos el valor de f_0 de modo que la frecuencia central (dominante) de la fuente sea igual a la frecuencia donde se produce el pico de atenuación mesoscópica de White para el caso A (20 Hz).

Consideremos tres receptores R_1, R_2, R_3 en la línea vertical que pasa por la fuente, y cuyas ubicaciones (x_{Ri}, y_{Ri}) son $x_{Ri} = 400$m para los tres receptores, con $y_{R1} = 230$m, $y_{R2} = 456$m, $y_{R3} = 682$m. Colocando la fuente y los 3 receptores alineados en una dirección perpendicular a la estratificación logramos que la incidencia de las ondas que llegan a los receptores sea prácticamente normal a las interfases y, entonces, las condiciones del experimento se asemejan a las hipótesis de la teoría de White.

Luego, utilizamos el algoritmo paralelo de descomposición de dominio (3.22a)- (3.22b) para encontrar las transformadas de Fourier de los desplazamientos del sólido y del fluido, para 110 frecuencias igualmente espaciadas en el intervalo $(0, 60\text{Hz})$. Como trabajamos con muy bajas frecuencias, utilizamos las expresiones (2.25) para los coeficientes de acoplamiento de masa y de fricción viscosa . Además, para el factor de estructura usamos la relación propuesta por Berryman [5] para medios de alta porosidad,

$$S = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\phi}\right). \tag{3.25}$$

Implementamos el algoritmo utilizando una partición uniforme $\mathcal{T}^h$ de Θ en 2000×2000 cuadrados iguales de 0.4m de lado. La solución en el dominio espacio-tiempo se obtuvo realizando una transformada inversa de Fourier.

La Figura 3.5 muestra la componente vertical de la velocidad de las partículas de la fase sólida del medio en función del tiempo para los tres receptores. En ella podemos observar el arribo a cada uno de los receptores de la onda compresional clásica generada en la fuente. Es muy interesante notar que se produce una caída muy importante de la amplitud del pulso a medida que la onda viaja a través del medio heterogéneo, la que está relacionada con el efecto de divergencia esférica, pérdida de energía por la presencia de heterogeneidades de mesoescala y, en menor medida, por el flujo global de Biot.

Para aislar las pérdidas de energía debidas al mecanismo mesoscópico de atenuación, repetimos esta simulación numérica pero suponiendo que la región Θ_{per} es homogénea: consideramos que esta zona está completamente saturada de agua en un caso, y de

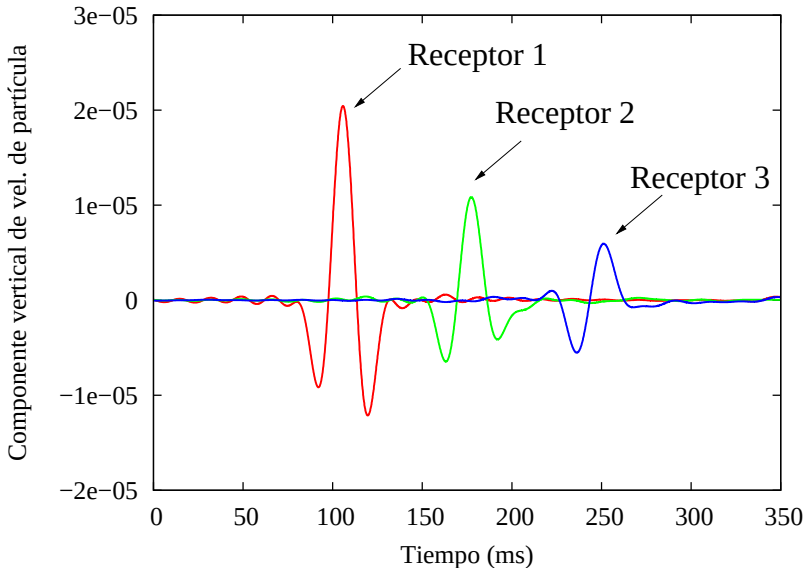

Figura 3.5: Componente vertical de la velocidad de las partículas de la fase sólida del medio en función del tiempo, para un medio estratificado que alterna capas de 0.4m de espesor conteniendo agua y gas en sus poros.

gas en otro. Bajo estas condiciones la onda compresional que se genera en la fuente no encuentra heterogeneidades de mesoescala en su camino, y dado que las caídas de amplitud por divergencia esférica y flujo global son cualitativamente similares en los tres experimentos, las diferencias entre el caso heterogéneo y los dos casos homogéneos se deberán principalmente al mecanismo mesoscópico de atenuación. En las Figuras 3.6 y 3.7 podemos observar que, para los tres receptores, las amplitudes de los pulsos compresionales son mayores en los casos homogéneos. Además, las velocidades con las que caen las amplitudes en los casos homogéneos son mucho menores que en el caso del medio conteniendo heterogeneidades de mesoescala, enfatizando el efecto de estas heterogeneidades sobre la propagación de la onda compresional clásica.

Con el objetivo de facilitar la comparación entre los casos homogéneos y el caso heterogéneo, la Figura 3.8 muestra, para el tercer receptor, la componente vertical de la velocidad de las partículas de la fase sólida para los tres casos (medio homogéneo saturado con agua, con gas, y medio heterogéneo estratificado conteniendo agua y gas alternadamente). En esta figura resulta muy claro el efecto que tienen las heterogeneidades de mesoescala sobre la onda, produciéndole una drástica caída de amplitud. También

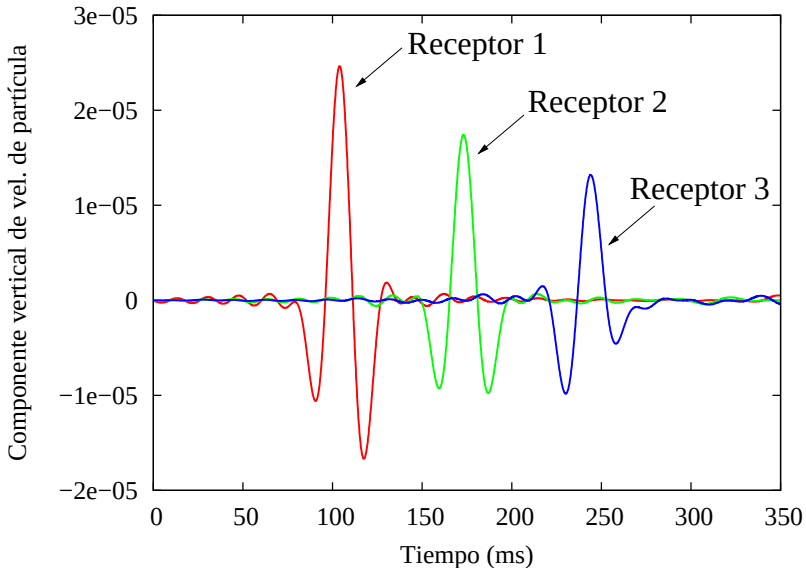

Figura 3.6: Componente vertical de la velocidad de las partículas de la fase sólida del medio en función del tiempo, para un medio homogéneo conteniendo agua en sus poros.

podemos observar, en el caso heterogéneo, un retardo en el arribo del pulso y un ensanchamiento del mismo, mostrando los efectos de la dispersión de velocidad producida por el flujo inducido por la onda.

Con el objetivo de evaluar la utilidad de la simulación numérica para estudiar los efectos mesoscópicos, podemos determinar el factor de calidad equivalente del medio y compararlo con el valor que obtuvimos utilizando la teoría analítica de White. Para estimar el factor de calidad a partir de los sismogramas, utilizaremos el método del corrimiento en frecuencia ("Frequency-shift method"), propuesto por Quan y Harris [73] y que presentamos brevemente a continuación.

Supongamos que $A(f, R_i)$ es el espectro de amplitud de la componente vertical del desplazamiento de la fase sólida, observado en el receptor R_i. Llamemos f_s al centroide de $A(f, R_i)$, definido mediante la fórmula

$$f_s = \frac{\int_o^\infty f A(f, R_i) df}{\int_o^\infty A(f, R_i) df}.$$

Analizando la variación del centroide estimado para distintos receptores podemos determinar el factor de calidad del medio viscoelástico en estudio. Esto se debe al hecho de que en los medios disipativos las componentes de mayores frecuencias del espectro de

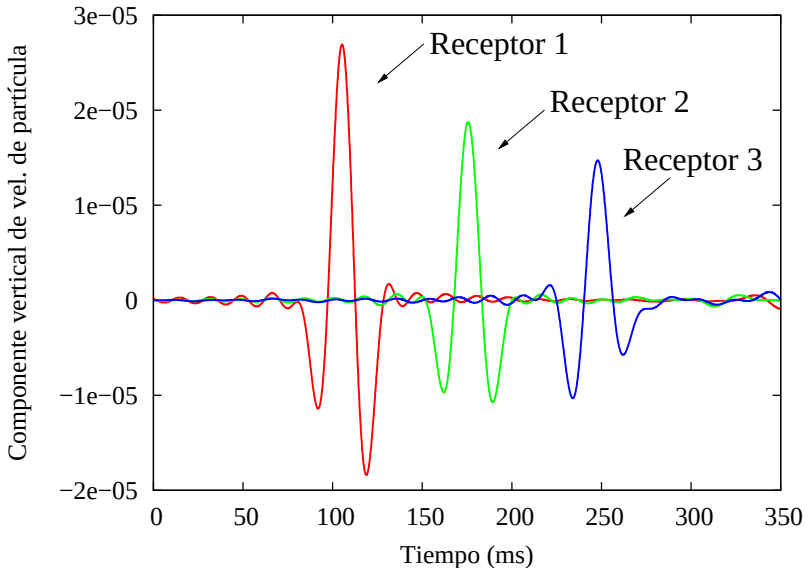

Figura 3.7: Componente vertical de la velocidad de las partículas de la fase sólida del medio en función del tiempo, para un medio homogéneo conteniendo gas en sus poros.

amplitud sufren mayor atenuación. De este modo, a medida que una onda se propaga el centroide del espectro de amplitud se corre hacia menores frecuencias siguiendo una ley que es función del factor de calidad. Entonces, analizando el corrimiento en frecuencia del centroide puede estimarse el factor de calidad del medio. Siguiendo estas ideas, si consideramos dos receptores R_i y R_j alineados con la fuente, ubicados a una distancia d_i y d_j medidas desde la fuente, podemos considerar que la señal recibida en el receptor más cercano a la fuente (R_i) es la fuente para el otro receptor (R_j). Luego, si aproximamos el espectro de amplitud de la señal $A(f, R_i)$ en el receptor R_i utilizando una función Gaussiana con varianza σ_i, se cumple la siguiente relación [73]

$$\frac{\pi(d_j - d_i)}{Q_p \tilde{v}_p} = (f_i - f_j)/\sigma_i^2, \tag{3.26}$$

donde f_i y f_j son los centroides de los espectros de amplitud en los receptores R_i y R_j, respectivamente. En la ecuación (3.26), $\tilde{v}_p$ es la velocidad de fase compresional promedio para la región que contiene a los dos receptores y para el rango de frecuencias considerado. En la práctica, el término $(d_j - d_i)/\tilde{v}_p$ se puede aproximar por la diferencia entre los tiempos de arribo del pulso a los dos receptores R_i y R_j, y entonces la ecuación (3.26) nos permite estimar el factor de calidad equivalente Q_p para la región que contiene

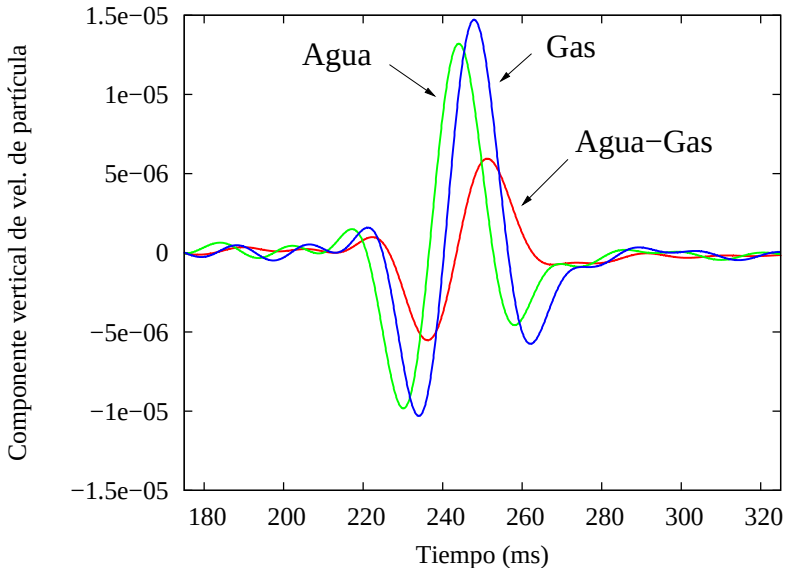

Figura 3.8: Componente vertical de la velocidad de las partículas de la fase sólida del medio en función del tiempo, para el tercer receptor. Las distintas curvas se corresponden con los tres experimentos numéricos realizados.

a los dos receptores.

La Figura 3.9 muestra los espectros de amplitud de la componente vertical de la velocidad de las partículas sólidas del medio en los tres receptores, en función de la frecuencia. En ella podemos observar que a medida que aumenta la distancia fuente-receptor, la amplitud de los espectros es menor y se produce una reducción en la parte de las mayores frecuencias, que está asociada con el mecanismo mesoscópico de atenuación. Utilizando el método de corrimiento en frecuencia, se encuentra un valor $Q_p = 29.96$ utilizando los receptores R_1 y R_2, $Q_p = 28$ para los receptores R_1 y R_3, y $Q_p = 24.64$ para los receptores R_2 y R_3. Recordando que la teoría analítica de White aplicada a este tipo de medios nos entregó un valor para el factor de calidad $Q_p = 28$ para frecuencia cercanas a los 20Hz (es decir, para la frecuencia dominante de la fuente que utilizamos en este experimento numérico), podemos concluir que el comportamiento que obtenemos mediante la propagación de ondas está en excelente concordancia con la teoría de White.

Realicemos ahora este mismo análisis para un caso similar pero suponiendo que las capas horizontales que componen al medio Θ_{per} tienen un espesor de 0.2m. Es decir, estamos considerando el "caso B" que estudiamos cuando presentamos la teoría de White.

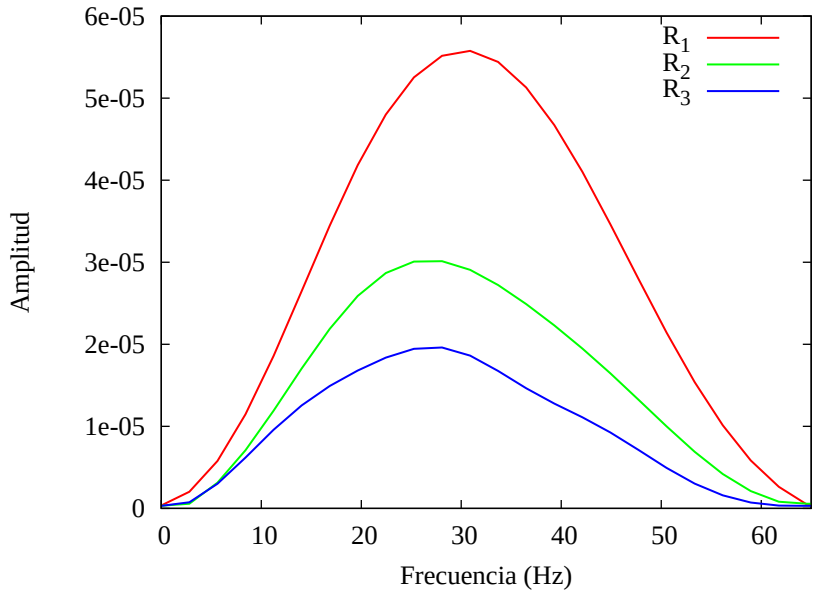

Figura 3.9: Espectros de amplitud de la componente vertical de la velocidad de las partículas sólidas del medio en los tres receptores R_1, R_2 y R_3 en función de la frecuencia.

Supongamos entonces que el dominio Θ es un cuadrado de lado 320m, constituido por dos subdominios rectangulares Θ_{hom} y Θ_{per}, definidos mediante

$$\begin{aligned} \Theta_{hom} &= \{0 < x < 320\text{m}, \qquad 0 < y < 4.4\text{m}\}, \\ \Theta_{per} &= \{0 < x < 320\text{m}, \qquad 4.4 \leq y < 320\text{m}\}. \end{aligned}$$

Como en el caso anterior, Θ_{hom} es una capa plana homogénea que se encuentra en la base del dominio, y que se corresponde con la arenisca 2 saturada con agua. En este caso, el espesor de este subdominio rectangular es de 4.4m. Por otra parte, Θ_{per} es un medio estratificado con matriz homogénea (arenisca 2) que alterna capas de 0.2m de espesor conteniendo agua y gas en sus poros.

Ubicamos la fuente externa dentro del subdominio homogéneo, en las coordenadas $(x_f, y_f) = (160\text{m}, 4\text{m})$, y es una perturbación compresional puntual aplicada sobre la matriz sólida, similar a la que utilizamos en el ejemplo anterior. Además, en este caso el valor de f_0 fue elegido de modo que la frecuencia central de la fuente es de 77Hz. Es decir, centramos el espectro de la fuente en un valor cercano a la frecuencia donde se produjo el pico de atenuación con la teoría de White para el caso B.

Para implementar el algoritmo numérico consideramos 110 frecuencias distribuidas en

el intervalo $(0, 242\text{Hz})$, y utilizamos una partición uniforme del dominio en 1600×1600 elementos cuadrados de lado $h = 0.2\text{m}$. En este ejemplo también consideramos tres receptores, cuyas ubicaciones son $x_{Ri} = 160\text{m}$, $i = 1, 2, 3$, con $y_{R1} = 49\text{m}$, $y_{R2} = 139\text{m}$, $y_{R3} = 229\text{m}$.

La Figura 3.10 muestra la componente vertical de la velocidad de las partículas de la fase sólida del medio en función del tiempo, para los tres receptores. Podemos observar una drástica caída de amplitud a medida que la onda se aleja de la fuente, la que está relacionada con la divergencia esférica, pérdida de energía por la presencia de heterogeneidades de mesoescala y, en menor medida, por el flujo global de Biot. En este caso, trabajando nuevamente con el método de corrimiento en frecuencia obtenemos $Q_p = 28.33$ usando los receptores R_1 y R_2, $Q_p = 25.32$ con R_1 y R_3, y $Q_p = 22.21$ usando los receptores R_2 y R_3. También en este experimento estos valores están en excelente concordancia con el valor $Q_p = 28$ obtenido con la teoría de White para este tipo de medios, para una frecuencia de 77Hz (es decir, para la frecuencia dominante de la fuente).

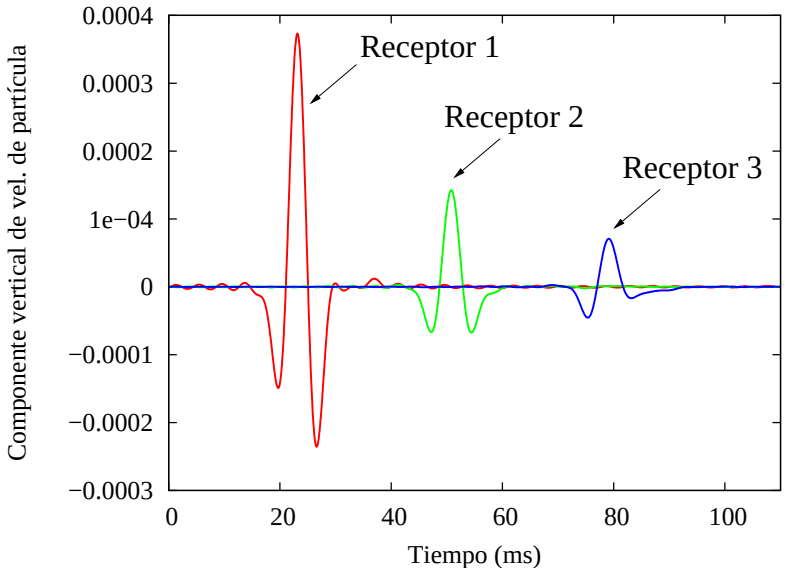

Figura 3.10: Componente vertical de la velocidad de las partículas de la fase sólida del medio en función del tiempo, para un medio estratificado que alterna capas de 0.2m de espesor conteniendo agua y gas en sus poros.

Esta buena correspondencia entre la teoría analítica de White y los niveles de atenuación estimados numéricamente a partir del comportamiento de las ondas clásicas

que viajan a través del medio heterogéneo, nos muestra que el algoritmo numérico que presentamos en este capítulo puede utilizarse satisfactoriamente para estudiar los efectos mesoscópicos en medios que contienen heterogeneidades de geometrías irregulares, incluso para frecuencias sísmicas. Además, si bien en los experimentos analizamos la respuesta de una onda compresional, este algoritmo numérico permite también analizar los efectos mesoscópicos en el caso de la propagación de una onda de corte.

Como ya se señaló, la principal ventaja de esta forma de trabajo es que no nos limita a medios que poseen heterogeneidades con geometrías ideales, como lo hacen los métodos analíticos. Sin embargo, esta metodología es computacionalmente muy costosa, pues por un lado el dominio debe tener dimensiones del orden de algunas longitudes de onda de la perturbación clásica para que la misma pueda manifestar los efectos mesoscópicos. Por otro lado, el tamaño de la malla (h) debe ser muy pequeño con respecto a la longitud de onda para poder representar correctamente las heterogeneidades de mesoescala y, en los casos de bajas frecuencias, para que los procesos de difusión de presiones de los fluidos que se generan en las inhomogeneidades del medio se resuelvan correctamente. Es así que en los experimentos numéricos que mostramos en este capítulo tuvimos que utilizar mallas computacionales de millones de elementos. El algoritmo paralelo de descomposición de dominio que presentamos nos permite tratar el problema del gran número de grados de libertad, y si se cuenta con un cluster con un número importante de procesadores se puede realizar la simulación numérica en un tiempo razonable.

Este costo computacional tan importante nos motiva a buscar una metodología alternativa para analizar los efectos mesoscópicos, que evite simular la propagación de las ondas clásicas a través del medio. En tal sentido, en el próximo capítulo presentaremos experimentos numéricos que nos permitirán determinar los efectos mesoscópicos de muestras representativas del medio heterogéneo de una manera muy conveniente.

Capítulo 4

Efectos mesoscópicos: Sólidos viscoelásticos equivalentes

En el capítulo anterior, observamos que el flujo de fluido inducido por una onda compresional clásica que viaja a través de un medio que contiene heterogeneidades de mesoescala puede producir efectos muy importantes sobre el comportamiento de la onda primaria. También vimos que este mecanismo de atenuación y dispersión se puede estudiar realizando simulación numérica de propagación de ondas a través del medio de interés. Si bien es cierto que esta forma de analizar los efectos mesoscópicos tiene la ventaja de permitir estudiar heterogeneidades de mesoescala de cualquier forma y tamaño, es computacionalmente muy costosa debido a la enorme cantidad de puntos resultante de la relación entre las dimensiones del medio a analizar y el tamaño de la malla h necesario para resolver el problema adecuadamente.

Este hecho nos motivó a proponer una forma alternativa de trabajo que nos permita estudiar los efectos mesoscópicos de un modo computacionalmente más conveniente. En este sentido, en este capítulo tenemos dos objetivos. Por un lado, obtendremos los módulos de onda plana y de corte complejos (viscoelásticos) *equivalentes* para muestras representativas de los medios heterogéneos de interés. Esto nos conducirá a la definición de un sólido viscoelástico equivalente con la misma atenuación y dispersión de velocidad que experimenta la onda clásica (compresional o de corte) al viajar a través de la muestra de roca considerada. Para lograr esto, no realizaremos simulación numérica de propagación de ondas sino que, inspirados en los experimentos que se realizan en laboratorios, aplicaremos esfuerzos armónicos compresionales y de corte sobre un modelo computacional de roca, y a partir del cambio de volumen y forma que experimenta estimaremos los módulos complejos equivalentes. Utilizaremos la teoría de Biot para modelar la respuesta del medio poroso frente a los esfuerzos aplicados, y propondremos un procedimiento de elementos finitos para aproximar las soluciones de los problemas de valores de contorno asociados con estos experimentos. Para validar esta metodología, la compararemos con resultados de teorías analíticas para ciertos modelos ideales simples.

En este contexto, cabe remarcar que Masson y Pride [61] presentaron recientemente

un trabajo en el que se aplican esfuerzos dependientes del tiempo sobre los lados de una muestra representativa del medio. Luego, calculando numéricamente los promedios de los campos de esfuerzo y deformación de la muestra en el dominio espacio-temporal, determinaron los módulos viscoelásticos efectivos del material.

Por otra parte, a una escala mesoscópica las distribuciones de las propiedades de las rocas (parámetros físicos, geométricos, distribución de fluidos, litología) son generalmente inciertas, debido a la gran variabilidad espacial que suelen poseer y al hecho de que en general no se cuenta con observaciones directas. Por esta razón, surge un segundo objetivo para este capítulo que consiste en representar las heterogeneidades mediante funciones estocásticas, y realizar repetidamente los experimentos numéricos que mencionamos previamente siguiendo un procedimiento de tipo Monte Carlo. Esto nos permitirá obtener los promedios y varianzas de los módulos complejos equivalentes para medios porosos altamente heterogéneos. Estos parámetros representan las propiedades estadísticas de la respuesta de un conjunto de muestras representativas que contienen heterogeneidades descriptas por una dada densidad espectral, y permiten analizar cómo las fluctuaciones espaciales de los parámetros afectan la respuesta sísmica de las rocas.

A lo largo del capítulo presentaremos también ejemplos numéricos, en los que utilizaremos la metodología propuesta para analizar la sensibilidad de los efectos mesoscópicos a distintos tipos de heterogeneidades en las propiedades del fluido y de la matriz de las rocas. Además, calcularemos los promedios y varianzas de los módulos equivalentes en el caso de medios que contienen heterogeneidades estocásticas cuasi-fractales para ilustrar la aplicación de la metodología Monte Carlo. Tanto la metodología como las principales conclusiones de este capítulo fueron plasmadas en un artículo publicado en la referencia [80].

4.1 Experimentos numéricos para obtener los módulos complejos equivalentes

Como ya hemos mencionado, utilizar la simulación numérica de propagación de ondas para estudiar los efectos mesoscópicos es computacionalmente costoso, o incluso irrealizable en algunos casos. Una metodología distinta y muy conveniente para resolver este problema consiste en aplicar esfuerzos armónicos compresionales y de corte sobre una muestra representativa del medio poroso saturado en estudio. Los cambios de volumen y forma experimentados por la roca nos permiten determinar sus módulos de onda plana

y de corte complejos *equivalentes*. Para lograr esto, definiremos un sólido viscoelástico equivalente con la misma atenuación y dispersión de velocidad que la roca original. Esta idea de representar la respuesta de un medio poroso altamente heterogéneo mediante un sólido viscoelástico equivalente constituye un ejemplo de lo que en la literatura se conoce como "*upscaling* numérico", puesto que este procedimiento implica un cambio de escala y una reducción significativa en el número de parámetros involucrados.

Para comenzar con la formulación de este problema, mostramos en la Figura 4.1 una representación esquemática de un experimento oscilatorio de compresión que aplicamos sobre una muestra representativa de roca para estimar su módulo de onda plana complejo equivalente. El vector ν es el vector normal unitario exterior sobre los bordes de la muestra, y σ es el tensor de tensión total definido por la expresión (2.4). En este experimento suponemos que la muestra está "sellada" en sus cuatro lados (es decir, no permitimos que el fluido entre o salga de la misma), lo que constituye una hipótesis razonable para hallar la respuesta sísmica en el rango de frecuencias sísmicas (1 a 10^4Hz) [61, 76, 62]. Luego, sometemos a la roca a una compresión armónica de la forma $\Delta P e^{i\omega t}$ sobre su cara superior, y consideramos fuerzas tangenciales nulas en sus cuatro lados. Además, no permitimos desplazamientos del sólido en el lado inferior, ni desplazamientos horizontales del sólido en los lados laterales de la muestra.

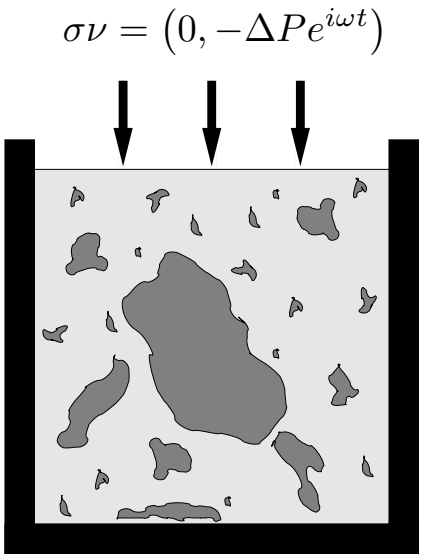

Figura 4.1: Representación esquemática de un experimento oscilatorio de compresión para estimar el módulo de onda plana equivalente de la muestra.

Si V es el volumen original de la muestra, su cambio de volumen complejo y oscilatorio $\Delta V(\omega)$ nos permite definir el módulo de onda plana complejo *equivalente*, $\overline{M_c}(\omega)$, a través de la relación

$$\frac{\Delta V(\omega)}{V} = -\frac{\Delta P}{\overline{M_c}(\omega)}. \tag{4.1}$$

La ecuación (4.1) es exacta para el caso de un sólido viscoelástico homogéneo bajo condiciones de borde similares a las impuestas a la fase sólida de la muestra de roca y en el caso estático ($\omega = 0$).

Considerando el caso de muestras bidimensionales, para determinar el cambio de volumen que sufre la muestra representativa de roca, proponemos resolver las ecuaciones de movimiento (2.17) bajo las siguientes condiciones de borde

$$\begin{aligned}
\sigma(u)\nu &= (0, -\Delta P), \quad (x,y) \in \Gamma^T, \\
\sigma(u)\nu \cdot \chi &= 0, \quad (x,y) \in \Gamma^L \cup \Gamma^R, \\
u^s \cdot \nu &= 0, \quad (x,y) \in \Gamma^L \cup \Gamma^R, \\
u^s &= 0, \quad (x,y) \in \Gamma^B, \\
u^f \cdot \nu &= 0, \quad (x,y) \in \Gamma^L \cup \Gamma^R \cup \Gamma^B \cup \Gamma^T,
\end{aligned} \tag{4.2}$$

donde Γ^L, Γ^R, Γ^B y Γ^T son los lados izquierdo, derecho, inferior y superior de la muestra de roca, respectivamente. Además, χ es un vector unitario tangente a los bordes de la muestra y el factor $e^{i\omega t}$ se omite, pues el problema está formulado en el dominio espacio-frecuencia.

Suponiendo que la muestra es un cuadrado de lado L, los desplazamientos verticales de la fase sólida $u_2^s(x, L, \omega)$ sobre Γ^T nos permiten obtener el desplazamiento vertical promedio $u_2^{s,T}(\omega)$ del lado superior de la roca. Para cada frecuencia ω, el cambio de volumen generado por el experimento de compresión puede aproximarse mediante $\Delta V(\omega) \approx L u_2^{s,T}(\omega)$, y utilizando la relación (4.1) podemos estimar el módulo de onda plana equivalente $\overline{M}_c(\omega)$. Tal como lo hicimos en el capítulo anterior, este módulo de onda plana nos permite calcular la velocidad compresional compleja

$$V_{pc}(\omega) = \sqrt{\frac{\overline{M}_c(\omega)}{\overline{\rho_b}}}, \tag{4.3}$$

donde $\overline{\rho_b}$ es la densidad promedio de la muestra. Luego, la velocidad de fase compresional

equivalente $v_p(\omega)$ y el factor de calidad equivalente $Q_p(\omega)$ están dados por

$$v_p(\omega) = \left[\mathrm{Re}\left(\frac{1}{V_{pc}(\omega)}\right)\right]^{-1}, \qquad \frac{1}{Q_p(\omega)} = \frac{\mathrm{Im}(V_{pc}(\omega)^2)}{\mathrm{Re}(V_{pc}(\omega)^2)}. \tag{4.4}$$

Siguiendo un razonamiento similar, podemos estimar el módulo de corte complejo *equivalente* de la muestra de roca aplicando el experimento que se muestra en la Figura 4.2. En este caso, no permitimos que el sólido pueda moverse en el borde inferior de la muestra, el fluido no puede entrar o salir de la misma, y aplicamos esfuerzos de corte sobre los lados laterales y superior.

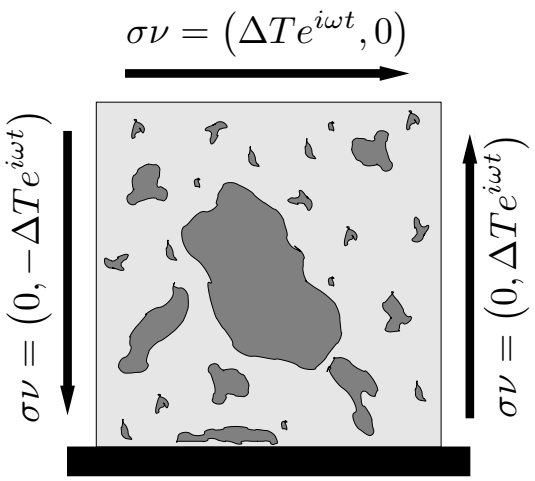

Figura 4.2: Representación esquemática de un experimento oscilatorio de corte para estimar el módulo de corte complejo equivalente de la muestra.

En este caso, el cambio de forma que sufre la roca nos permite recuperar su módulo de corte complejo equivalente, $\overline{\mu}_c(\omega)$, mediante la relación

$$tg(\theta(\omega)) = \frac{\Delta T}{\overline{\mu}_c(\omega)}, \tag{4.5}$$

donde $\theta(\omega)$ es el ángulo entre las posiciones originales de los lados laterales de la muestra y las nuevas posiciones de los mismos al aplicar los esfuerzos de corte. La relación (4.5) es exacta para un sólido viscoelástico homogéneo sometido a las condiciones de borde mencionadas y en el caso estático.

Para estimar el cambio de forma sufrido por la muestra de roca, debemos resolver las

ecuaciones de movimiento (2.17) bajo las siguientes condiciones de borde

$$\begin{aligned} \sigma(u)\nu &= g(x,y), \quad (x,y) \in \Gamma^T \cup \Gamma^L \cup \Gamma^R, \\ u^s &= 0, \quad (x,y) \in \Gamma^B, \\ u^f \cdot \nu &= 0, \quad (x,y) \in \Gamma, \end{aligned} \tag{4.6}$$

donde

$$g(x,y) = \begin{cases} (0, -\Delta T), & (x,y) \in \Gamma^L, \\ (0, \Delta T), & (x,y) \in \Gamma^R, \\ (\Delta T, 0), & (x,y) \in \Gamma^T, \end{cases} \tag{4.7}$$

y ΔT es la amplitud constante del esfuerzo oscilatorio aplicado. Los desplazamientos horizontales $u_1^s(x, L, \omega)$ sobre el borde superior de la muestra nos permiten determinar su desplazamiento horizontal promedio $u_1^{s,T}(\omega)$. Entonces, para cada frecuencia ω el cambio de forma de la muestra puede ser aproximado mediante $tg(\theta(\omega)) \approx u_1^{s,T}(\omega)/L$, y utilizando la ecuación (4.5) podemos estimar $\overline{\mu}_c(\omega)$. La velocidad compleja de corte está dada por

$$V_{sc}(\omega) = \sqrt{\frac{\overline{\mu}_c(\omega)}{\overline{\rho_b}}}. \tag{4.8}$$

Esta velocidad compleja nos permite calcular la velocidad de fase equivalente $v_s(\omega)$ y el factor de calidad equivalente $Q_s(\omega)$ mediante relaciones análogas a (4.4),

$$v_s(\omega) = \left[\mathrm{Re}\left(\frac{1}{V_{sc}(\omega)}\right)\right]^{-1}, \qquad \frac{1}{Q_s(\omega)} = \frac{\mathrm{Im}(V_{sc}(\omega)^2)}{\mathrm{Re}(V_{sc}(\omega)^2)}. \tag{4.9}$$

Con el objetivo de estimar numéricamente estos módulos complejos equivalentes, resolvemos las ecuaciones de movimiento (2.17) bajo las condiciones de borde (4.2) o (4.6) utilizando un procedimiento de elementos finitos. En este sentido, para aproximar el desplazamiento del sólido usamos funciones bilineales (espacio de elementos finitos conformes), mientras que para el desplazamiento del fluido usamos un subespacio cerrado de la parte vectorial del espacio de Raviart-Thomas-Nedelec de orden cero [75, 65]. En el Apéndice A se presentan estos espacios y los detalles del procedimiento de elementos finitos. Además, allí se prueba la unicidad de las soluciones de las formas débiles asociadas con estos problemas para $\omega > 0$ y pequeño, como así también que el error asociado con estos problemas de elementos finitos, medido en la norma de la energía, es del orden del tamaño de la malla computacional (h).

Con respecto al tamaño de la malla, en el rango de bajas frecuencias h tiene que ser lo suficientemente pequeño como para que los procesos de difusión de las presiones de los fluidos se resuelvan correctamente, tal como mencionamos en el capítulo anterior. En el caso en que la frecuencia considerada sea mayor que el valor crítico a partir del cual la onda lenta se empieza a comportar como una onda de propagación, el tamaño de la malla debe tomarse de modo tal que las longitudes de las ondas lentas que se generan en las discontinuidades del medio queden correctamente muestreadas.

Por último, es importante mencionar que el tamaño de la muestra de roca no es arbitrario: tiene que ser lo suficientemente grande como para que la muestra constituya un volumen representativo del medio heterogéneo en estudio. Al mismo tiempo, tiene que ser mucho menor que las longitudes de onda asociadas con cada frecuencia con la que se excita al medio. Para determinar una cota máxima para la longitud del lado L, en los ejemplos numéricos que mostramos en este capítulo verificamos que los experimentos de compresión y de corte aplicados a muestras homogéneas de lado L compuestas por cualquiera de los diferentes materiales que conforman al medio heterogéneo produzcan niveles de atenuación y dispersión despreciables para la mayor de las frecuencias consideradas.

4.1.1 Validación de los procedimientos

Con el objetivo de validar el procedimiento propuesto para estimar el módulo de onda plana equivalente, tomamos una muestra cuadrada de roca compuesta por dos capas poroelásticas horizontales de 0.2m de espesor cada una, una de ellas saturada con agua y la otra, con gas. Asumimos que las propiedades físicas de las dos matrices sólidas son homogéneas y similares, y se corresponden con la arenisca 1 de la Tabla 2.1. Por otra parte, las propiedades físicas de los fluidos se encuentran en la Tabla 2.2.

Respecto de la malla utilizada en el procedimiento de elementos finitos, consideramos una partición de 75×75 elementos cuadrados para aproximar las soluciones de los problemas. Luego, comparamos la velocidad de fase y el factor de calidad compresional estimados con el procedimiento propuesto para frecuencias entre 0.1 y 100 Hz con los valores obtenidos usando la teoría de White et al. [89] pero, en este último caso, considerando un medio periódico compuesto por capas horizontales de 0.4m de espesor saturadas con agua o gas, alternadamente. Esta comparación es válida porque las condiciones de borde del experimento de compresión que propusimos en este capítulo

se pueden asociar con el experimento propuesto por White et al. [89], pero aplicado al medio periódico que resulta de realizar una reflexión con respecto al eje x de la muestra de roca estudiada (ver Figura 3.1).

La Figura 4.3 muestra la velocidad de fase compresional equivalente, obtenida con el experimento de compresión (puntos) y con la teoría analítica de White (línea), en función de la frecuencia. Podemos ver que se produce una muy buena concordancia entre los resultados obtenidos con los dos procedimientos. Por otra parte, la Figura 4.4 muestra el inverso del factor de calidad equivalente en función de la frecuencia, obtenido con el experimento de compresión (puntos) y con la teoría de White (línea). También en este caso se produce una excelente coincidencia entre las respuestas determinadas con las dos metodologías. Estas dos figuras nos permiten concluir que el experimento de compresión que propusimos en este capítulo constituye una metodología muy conveniente y satisfactoria para obtener el módulo de onda plana viscoelástico equivalente de muestras representativas de medios heterogéneos.

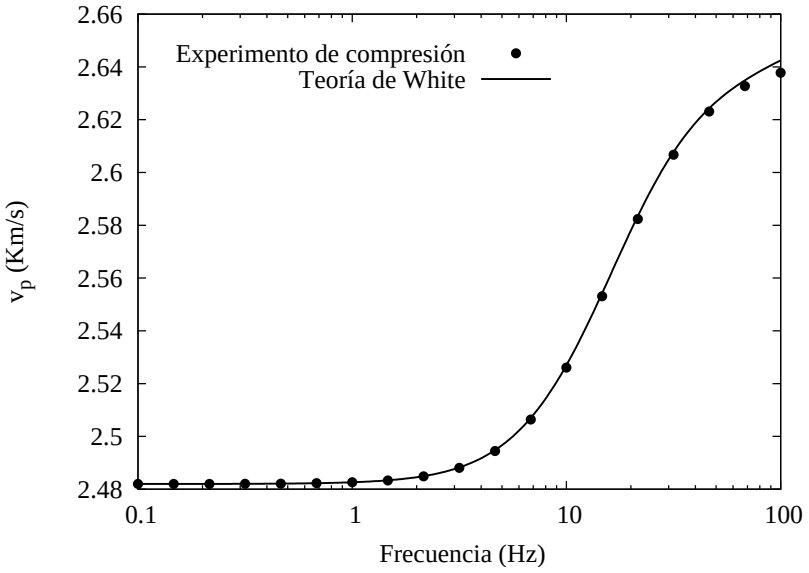

Figura 4.3: Velocidad de fase compresional equivalente obtenida mediante el experimento de compresión (puntos) y usando la teoría de White (línea) para frecuencias entre 0.1 y 100Hz.

Para validar el procedimiento que permite estimar el módulo de corte equivalente,

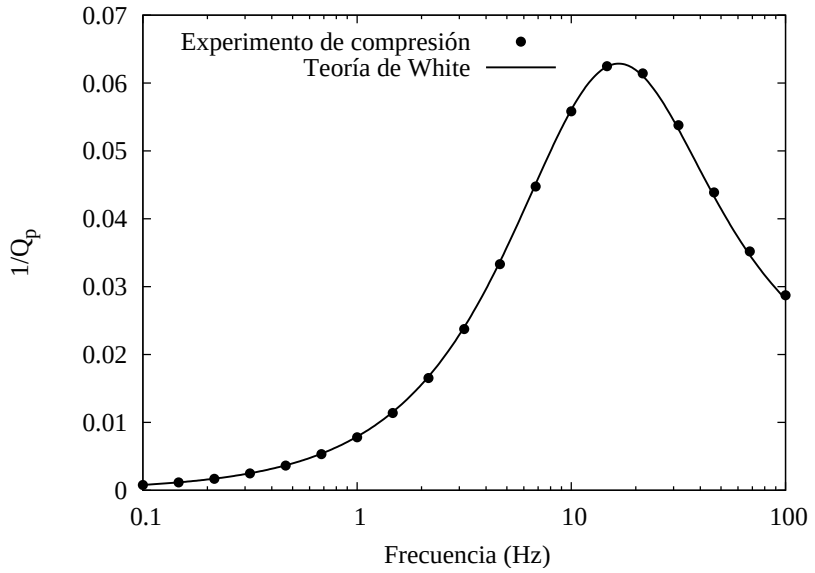

Figura 4.4: Inverso del factor de calidad compresional equivalente obtenido mediante el experimento de compresión (puntos) y usando la teoría de White (línea) para frecuencias entre 0.1 y 100Hz.

tomamos una muestra de roca cuadrada compuesta por dos capas horizontales de espesores T_1 y T_2, respectivamente, tales que $T_1 + T_2 = 1$m. Asumimos que ambas capas están saturadas con agua pero que sus matrices sólidas son diferentes: la matriz sólida de la capa de espesor T_1 es la arenisca 1, mientras que la de la otra capa es una lutita, con propiedades físicas dadas en la Tabla 2.1. Entonces, en este caso verificamos que el módulo de corte equivalente obtenido con el experimento de corte para diferentes valores del contenido de lutita $T_2/(T_1 + T_2)$ y en el límite de bajas frecuencias, coincida con el obtenido usando un promedio de Reuss para una mezcla efectiva de arenisca y lutita [62]. Se produjo una muy buena correspondencia entre las dos curvas y, además, la parte imaginaria de este módulo resultó ser despreciable debido a las muy bajas frecuencias que utilizamos en este experimento. Para evitar extendernos demasiado, no mostraremos estas curvas.

4.2 Análisis paramétrico de los efectos mesoscópicos

En esta sección utilizaremos los experimentos oscilatorios para estudiar la sensibilidad de los efectos mesoscópicos a distintos tipos de heterogeneidades en las propiedades de

las rocas y de los fluidos. Como se desprende del análisis realizado en el Capítulo 2, en el rango de frecuencias donde realizamos estos experimentos numéricos ($0-100$Hz), la onda lenta es un proceso de difusión de la presión del fluido poral. El procedimiento presentado en este trabajo es válido también para frecuencias por encima del valor crítico en el que las ondas lentas comienzan a comportarse como ondas de propagación, siempre que el tamaño del dominio y la malla sean correctamente elegidos, tal como fue comentado previamente.

Para analizar los niveles de atenuación y dispersión de velocidad causados por distintos tipos de heterogeneidades, consideramos muestras representativas de rocas heterogéneas y obtenemos sus factores de calidad y velocidades de fase equivalentes para distintas frecuencias. En los experimentos A a D, asumimos que las muestras de roca son cuadrados de lado 0.5m, y usamos una partición del dominio en 100×100 elementos cuadrados iguales para aproximar las soluciones de los problemas de condiciones de contorno. Dado que los experimentos de corte aplicados a estas muestras de roca produjeron niveles de atenuación y dispersión de velocidad despreciables, no mostraremos tales curvas. Por otra parte, en el experimento E consideramos una muestra de roca cuadrada de lado 0.07m y una partición del dominio en 75×75 elementos cuadrados.

A. Sensibilidad de los efectos mesoscópicos a la geometría de la distribución espacial de los fluidos

En este caso, consideramos rocas parcialmente saturadas con agua y gas; es decir, muestras poroelásticas con distribuciones espacialmente variables de agua y gas en la forma de manchas (*patches*) completamente saturadas con gas y zonas completamente saturadas con agua. No consideramos mezcla de los dos fluidos ni fuerzas capilares, y asumimos que los dos fluidos ocupan distintas regiones mesoscópicas de las muestras. Consideramos matrices sólidas homogéneas, que se corresponden con la arenisca 1 de la Tabla 2.1. Los siguientes casos nos permitirán analizar cómo difieren los efectos mesoscópicos según las distintas geometrías que tomamos para las manchas de gas:

- A1: La muestra de roca contiene una capa horizontal saturada con gas ubicada en su centro

- A2: La muestra de roca contiene un círculo saturado con gas ubicado en su centro

- A3: La muestra de roca contiene una distribución cuasi-fractal saturada de gas, tal como muestra la Figura 4.5 a), donde las zonas negras están saturadas con gas, mientras que las blancas son regiones saturadas con agua

- A4: La muestra de roca contiene una distribución cuasi-fractal saturada con gas, tal como muestra la Figura 4.5 b)

- A5: La muestra de roca contiene una distribución cuasi-fractal saturada con gas, tal como muestra la Figura 4.5 c)

- A6: La muestra de roca contiene una distribución cuasi-fractal saturada con gas, tal como muestra la Figura 4.5 d).

En los seis casos, las distribuciones de gas y agua son elegidas de modo que las muestras de roca tienen siempre la misma saturación total de gas, aproximadamente igual a 0.08. Además, los valores que utilizamos para las propiedades físicas de los fluidos son los que se encuentran en la Tabla 2.2.

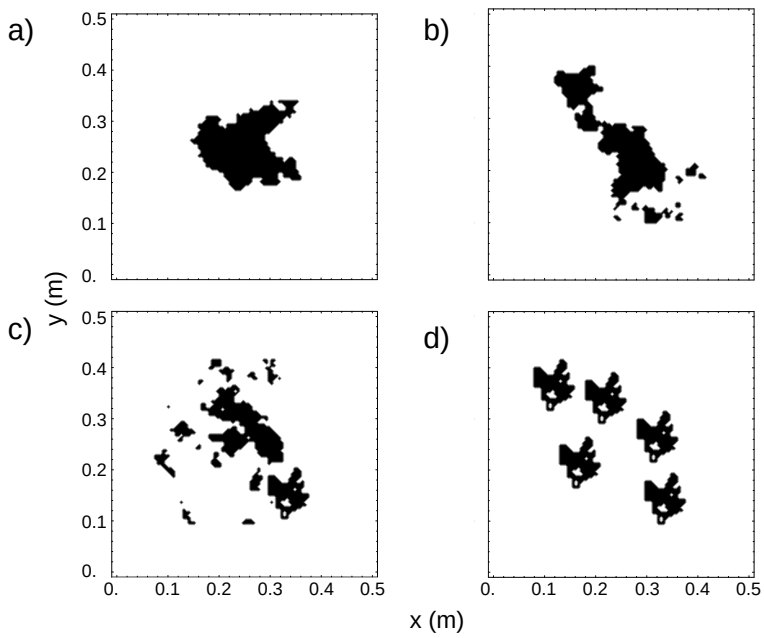

Figura 4.5: Distribuciones cuasi-fractales de gas. En todos los casos la saturación de gas es de aproximadamente 0.08.

Para generar las distribuciones cuasi-fractales de gas que mostramos en la Figura 4.5, usamos un campo fractal estocástico basado en las llamadas "funciones de autocorrelación de von Karman". Siguiendo el trabajo de Frankel y Clayton [33], y más recientemente el de Santos et al. [83], consideramos un caso particular para el cual la densidad espectral de potencia del campo estocástico está dado por

$$S_d(k_x, k_y) = S_0(1 + k^2a^2)^{-(H+E/2)}, \tag{4.10}$$

donde $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ es el número de onda radial, a la longitud de correlación, H es un coeficiente de autosimilaridad ($0 < H < 1$) y S_0 es una constante de normalización. La ecuación (4.10) corresponde a un proceso fractal de dimensión $D = E + 1 - H$ a escalas mucho menores que a. El primer paso para generar estas distribuciones consiste en asignar a cada celda de la malla computacional un número pseudo-aleatorio usando un generador de números aleatorios asociado con una distribución uniforme (ruido blanco). Luego, se aplica la transformada de Fourier a este campo, y se filtra su espectro de amplitud utilizando la función (4.10). A continuación, se antitransforma el espectro filtrado para volver al dominio espacial, obteniéndose de esta manera un modelo *microheterogéneo* de saturación de agua S_w^j, donde j indica la celda. Finalmente, para construir la distribución binaria se establece un nivel de corte S^*, y se asume que cada celda j que satisface $S_w^j \leq S^*$ está completamente saturada de gas, y en caso contrario, está completamente saturada de agua.

En el caso particular de los experimentos que analizamos en esta sección usamos una dimensión fractal $D = 2.2$, un coeficiente de autosimilaridad $H = 0.8$ y diferentes longitudes de correlación. En el caso de la distribución de fluidos de la Figura 4.5 d), podemos ver que posee una única longitud característica, y fue obtenida mediante la repetición de una pequeña parte de la distribución que se encuentra en la Figura 4.5c. Elegimos esta configuración particular para estudiar el rol que juegan las distintas escalas espaciales en el comportamiento del material.

A nivel discreto, el mayor número de onda que puede ser representado por los campos fractales está determinado por el tamaño de la malla h, mientras que el menor es proporcional al tamaño del dominio [43]. Consecuentemente, el tamaño de la malla debe elegirse del orden del tamaño de las menores heterogeneidades. Estas restricciones en el menor y mayor número de onda, junto con la longitud de correlación, restringen los tamaños de las heterogeneidades que la malla elegida y el tamaño del dominio pueden

representar. En los experimentos que presentamos aquí, luego que la malla fue elegida y que la distribución cuasi-fractal de los fluidos fue obtenida, realizamos un refinamiento de la malla y resolvimos los problemas de condiciones de borde en la malla fina y la gruesa para verificar que las soluciones coincidieran.

Analicemos ahora el campo de presión del fluido inducido por el experimento de compresión. En tal sentido, la Figura 4.6 muestra la amplitud normalizada de la presión del fluido inducida por el experimento de compresión aplicado sobre la muestra de roca del caso A3. La frecuencia de excitación utilizada tiene un valor de 11.5Hz, que luego veremos es el valor aproximado de la frecuencia en la que se produce el máximo de atenuación por efectos mesoscópicos para esta muestra de roca. Observando esta figura es interesante notar que a pesar de que el cambio de volumen experimentado por las zonas saturadas con gas es mayor que el producido sobre las regiones saturadas con agua, los cambios de presión inducidos en los patches de agua son mayores que los producidos en las zonas saturadas con gas. Este efecto puede entenderse analizando la ecuación (2.7),

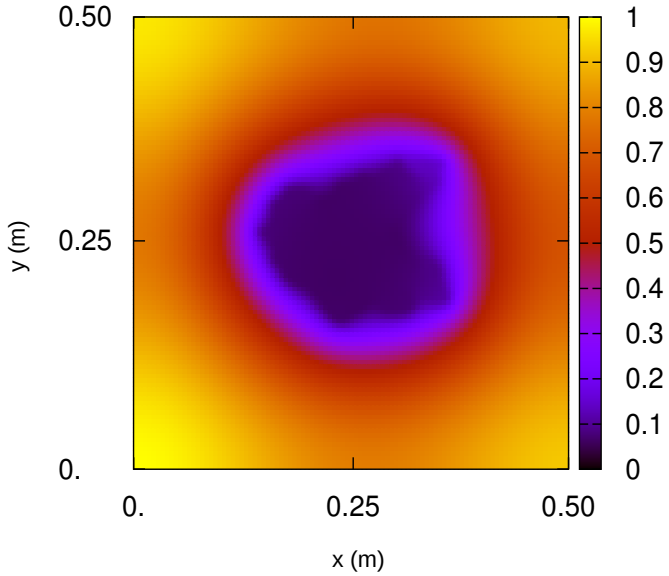

Figura 4.6: Amplitud normalizada de la presión del fluido para el caso A3. La frecuencia de excitación es 11.5 Hz.

y teniendo en cuenta que el módulo de volumen del gas es mucho menor que el del agua, y consecuentemente (utilizando la relación (2.10)) lo mismo es cierto para el parámetro K_{av}. El gradiente establecido en el campo de presión del fluido, que tiene sus máximos

valores en las zonas de contacto entre las regiones saturadas con agua y las que están saturadas con gas, produce flujo de fluido y ondas lentas que se difunden alejándose de las interfases, generando pérdida de energía y dispersión de velocidades.

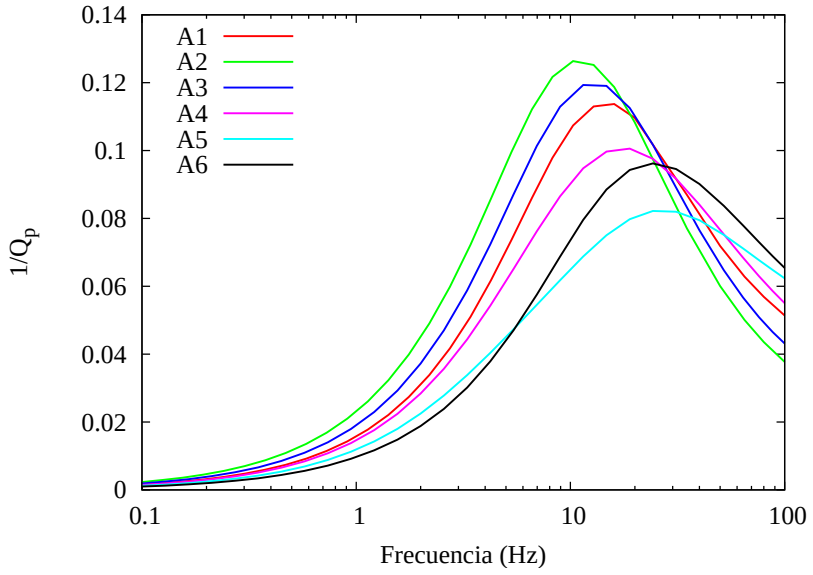

Figura 4.7: Inverso del factor de calidad compresional equivalente obtenido aplicando el experimento de compresión a las muestras de roca de los experimentos A1 a A6. En todos los casos las muestras poseen una saturación total de gas de 0.08.

La Figura 4.7 muestra el comportamiento del inverso del factor de calidad compresional equivalente en función de la frecuencia, para los experimentos A1 a A6. En ella podemos observar la importancia de los efectos mesoscópicos en estos casos, con niveles de atenuación muy importantes (valores de Q_p incluso por debajo de 10 en algunos experimentos). Comparando las curvas podemos ver que a pesar de que la saturación neta de gas es siempre la misma, se producen diferencias significativas entre las respuestas. Estas discrepancias se deben exclusivamente a las distintas geometrías de las distribuciones de los fluidos porales. Es interesante notar también que a medida que la irregularidad de los patches de gas aumenta, el pico de atenuación se mueve hacia mayores frecuencias y la pérdida máxima es menor.

Además, comparando las respuestas de las geometrías ideales (círculo y capa plana) con las distribuciones cuasi-fractales, podemos observar la importancia de considerar la naturaleza aleatoria de las distribuciones de los fluidos. En este contexto, en el caso

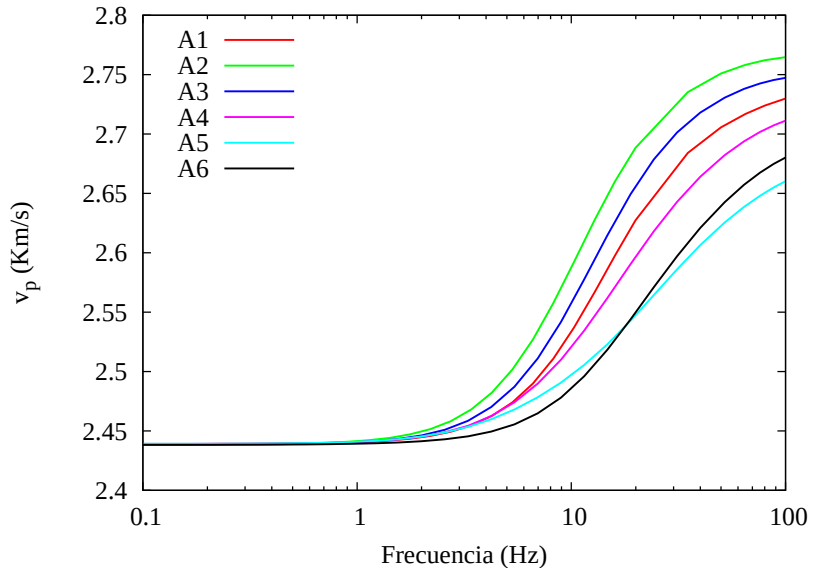

Figura 4.8: Velocidad de fase compresional equivalente obtenida aplicando el experimento de compresión a las muestras de roca de los experimentos A1 a A6. En todos los casos las muestras poseen una saturación total de gas de 0.08.

de las distribuciones aleatorias resulta muy difícil predecir teóricamente la existencia y ubicación de un pico de atenuación en el rango de frecuencias analizado, debido a las diversas escalas espaciales de las heterogeneidades. Por otro lado, comparando las curvas de atenuación asociadas con las distribuciones cuasi-fractales multiescala con la curva correspondiente a la distribución que posee una única longitud característica (caso A6), podemos observar diferencias significativas no sólo en las magnitudes de las pérdidas sino también en las posiciones de los picos de atenuación. Luego, podemos concluir que modelar una distribución heterogénea de gas que contiene diversas escalas espaciales con una distribución que posee una única longitud característica similar al tamaño promedio de las manchas de gas puede producir un comportamiento incorrecto de la muestra de roca en estudio.

Por último, la Figura 4.8 muestra la velocidad de fase compresional equivalente en función de la frecuencia de excitación del experimento. Podemos observar una dispersión de velocidad creciente muy importante en el rango de frecuencias que consideramos, que es menor a medida que la irregularidad de las heterogeneidades aumenta.

B. Sensibilidad de los efectos mesoscópicos a la permeabilidad de la roca

Para estudiar el rol que tiene la permeabilidad de la roca en los efectos mesoscópicos, consideramos una distribución de fluidos similar a la que describe la Figura 4.5a). Suponemos también que las dos zonas (con agua y con gas) poseen la misma matriz sólida (la arenisca 1 de la Tabla 2.1). Los casos que analizamos se corresponden con distintos valores de permeabilidad para las zonas saturadas con agua y con gas:

- B1: $\kappa_1 = \kappa_2 = 0.1\text{D}$
- B2: $\kappa_1 = \kappa_2 = 1\text{D}$
- B3: $\kappa_1 = \kappa_2 = 10\text{D}$
- B4: $\kappa_1 = 0.1\text{D}$, $\kappa_2 = 10\text{D}$
- B5: $\kappa_1 = 10\text{D}$, $\kappa_2 = 0.1\text{D}$,

donde κ_1 es la permeabilidad de las zonas saturadas con gas y κ_2 la de las zonas con agua.

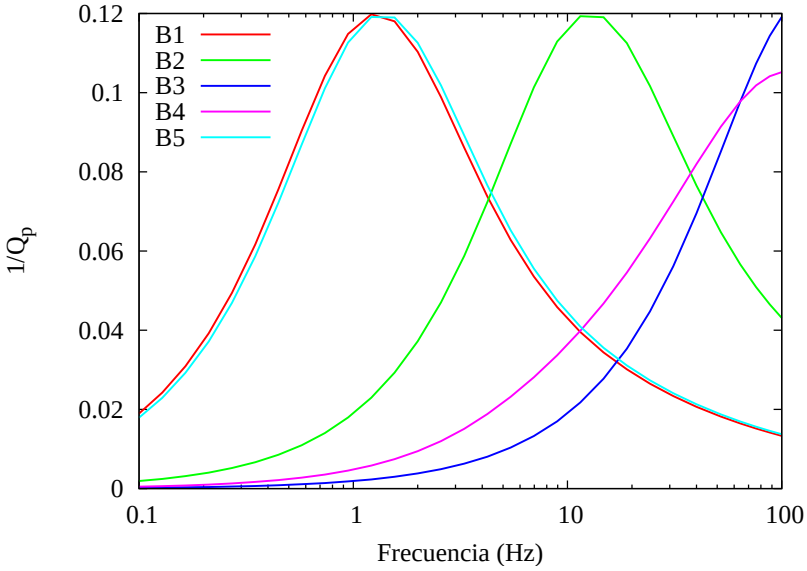

Figura 4.9: Inverso del factor de calidad compresional equivalente obtenido aplicando el experimento de compresión a la distribución de agua y gas de la Figura 4.5a), para distintos valores de permeabilidad de la roca.

La Figura 4.9 muestra el inverso del factor de calidad compresional equivalente en función de la frecuencia. Podemos observar que este parámetro es altamente sensible a la permeabilidad κ_2 de la región conteniendo al fluido más incompresible (agua en este caso), mientras que es prácticamente insensible a la permeabilidad de la otra región. Este hecho está de acuerdo con los resultados obtenidos por Carcione y Picotti [13] para medios unidimensionales. Particularmente, podemos notar que la frecuencia en la que se produce el pico de atenuación se mueve hacia mayores valores a medida que κ_2 aumenta, pero la magnitud de la pérdida se mantiene prácticamente constante. Este comportamiento que observamos para la ubicación del pico de atenuación está cualitativamente de acuerdo con la estimación para la frecuencia del máximo de atenuación para medios estratificados, según la expresión (3.11).

La dispersión de velocidad compresional equivalente también es muy sensible a la permeabilidad de la región que contiene al fluido más incompresible, y prácticamente insensible a la permeabilidad de la otra región. Podemos observar este comportamiento en la Figura 4.10, que muestra la velocidad de fase compresional equivalente en función de la frecuencia.

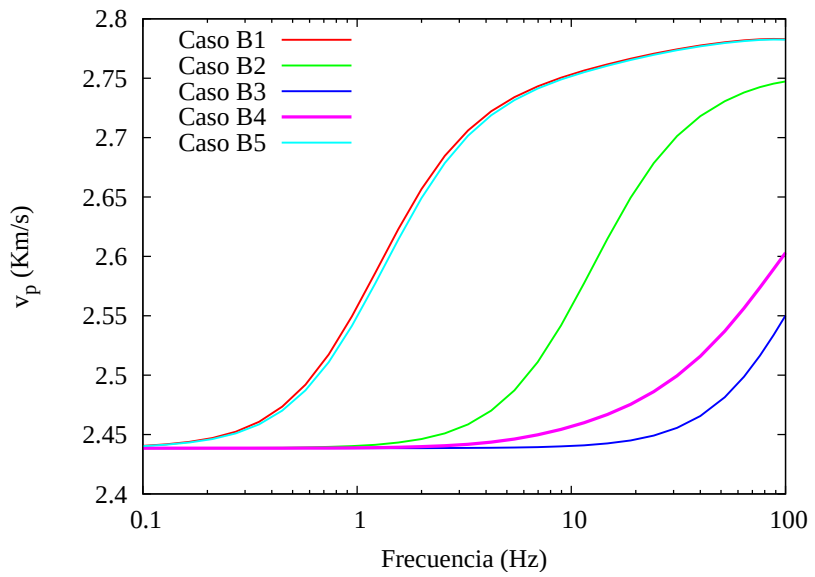

Figura 4.10: Velocidad de fase compresional equivalente obtenida aplicando el experimento de compresión a la distribución de agua y gas de la Figura 4.5a), para distintos valores de permeabilidad de la roca.

C. Sensibilidad de los efectos mesoscópicos a la viscosidad del fluido

Con el objetivo de analizar el papel que juega la viscosidad de los distintos fluidos en los efectos mesoscópicos, consideramos muestras con matrices sólidas homogéneas, que se corresponden con la arenisca 1 de la Tabla 2.1. Suponemos también que las rocas contienen distribuciones de fluidos similares a la que describe la Figura 4.5c). En los casos C1 a C5, las manchas negras representan zonas saturadas con gas y las blancas con petróleo (con propiedades dadas en la Tabla 2.2). Por otra parte, en el caso C6 las zonas negras también son regiones saturadas con gas pero las blancas son zonas saturadas con agua. Los casos consideran distintos valores para las viscosidades de los fluidos, siempre dentro de rangos admisibles para distintos gases de hidrocarburos y tipos de petróleos a diferentes condiciones de presión, temperatura y salinidad:

- C1: $\eta_{gas} = 0.00015$ Poise, $\eta_{oil} = 0.01$ Poise
- C2: $\eta_{gas} = 0.0015$ Poise, $\eta_{oil} = 0.1$ Poise
- C3: $\eta_{gas} = 0.015$ Poise, $\eta_{oil} = 1$ Poise
- C4: $\eta_{gas} = 0.00015$ Poise, $\eta_{oil} = 1$ Poise
- C5: $\eta_{gas} = 0.015$ Poise, $\eta_{oil} = 0.01$ Poise
- C6: $\eta_{gas} = 0.0015$ Poise, $\eta_{agua} = 0.03$ Poise,

donde η_{gas}, η_{oil} y η_{agua} denotan la viscosidad del gas, del petróleo y del agua, respectivamente.

La Figura 4.11 muestra el inverso del factor de calidad compresional equivalente en función de la frecuencia. Comparando los casos C1 a C5 podemos notar que el factor de calidad compresional equivalente es altamente sensible a la viscosidad del fluido más incompresible (petróleo en estos casos), mientras que es prácticamente insensible a la viscosidad del otro fluido. Además, podemos ver que si bien la frecuencia en la que se produce el pico de atenuación se mueve hacia mayores valores a medida que el fluido más incompresible es menos viscoso, este parámetro físico prácticamente no afecta la magnitud de la pérdida. Este comportamiento para la ubicación del pico de atenuación también está cualitativamente de acuerdo con la relación (3.11) para medios unidimensionales.

Por otra parte, es muy interesante comparar los casos C1 y C5 con el caso C6: dado que la viscosidad del agua en el caso C6 es muy similar a los valores de la viscosidad

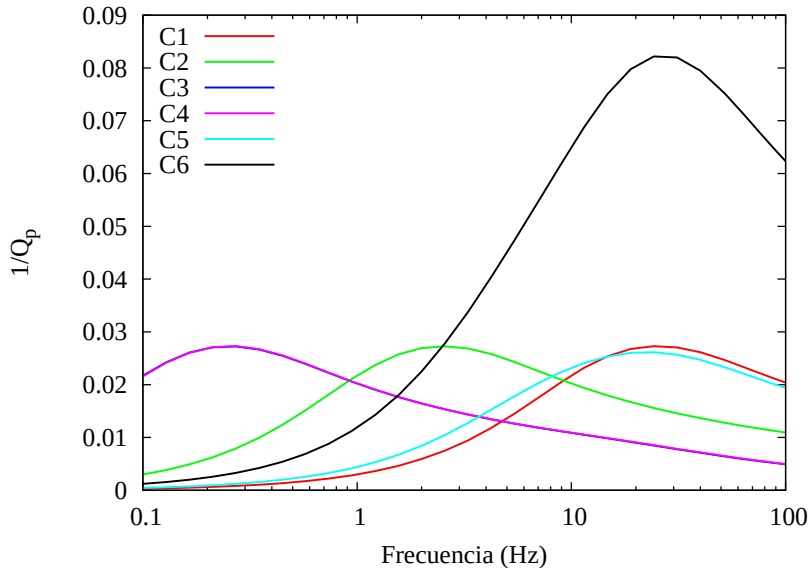

Figura 4.11: Inverso del factor de calidad compresional equivalente en función de la frecuencia, para los experimentos C1 a C6.

del petróleo en los casos C1 y C5, las frecuencias en las que se producen los máximos de atenuación de estos tres casos son muy similares. Sin embargo, la magnitud de la pérdida en el caso C6 es mucho mayor que en los otros dos casos, y esto se debe a que el contraste entre los módulos de volumen del agua y del gas es mayor que el dado entre el petróleo y el gas.

La Figura 4.12 muestra la velocidad de fase compresional equivalente para los casos C1 a C6, en función de la frecuencia. Podemos observar que el comportamiento de la dispersión de velocidad también es muy sensible a la viscosidad del fluido más incompresible, mientras que es prácticamente insensible a la viscosidad del otro fluido.

D. Sensibilidad de los efectos mesoscópicos a heterogeneidades en las propiedades del fluido y de la matriz

Para analizar los efectos mesoscópicos en el caso de heterogeneidades tanto en las propiedades del fluido como en la matriz sólida, consideramos muestras de roca que poseen distribuciones heterogéneas de porosidad, con valores que oscilan entre 0.2 y

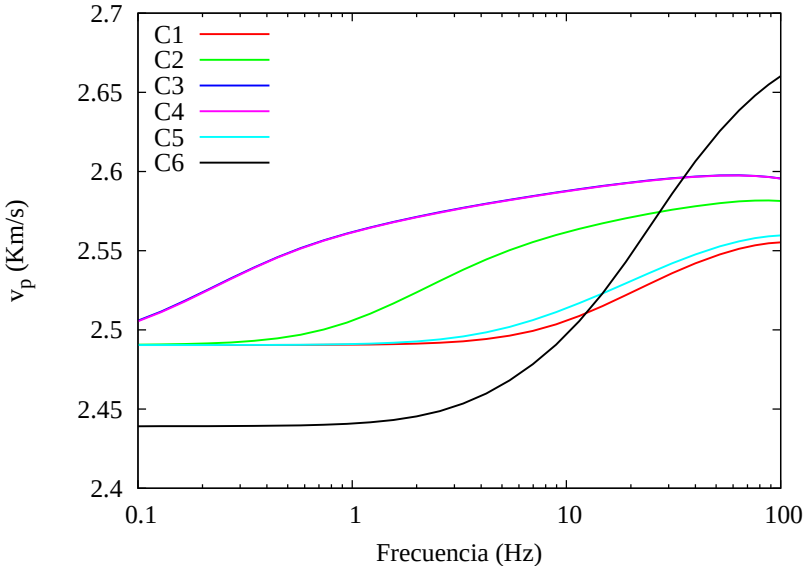

Figura 4.12: Velocidad de fase compresional equivalente en función de la frecuencia, para los experimentos C1 a C6.

0.4, y siguiendo distribuciones cuasi-fractales. Para generar estas distribuciones no utilizamos un nivel de corte como el que fue necesario para obtener las distribuciones binarias que consideramos en los experimentos anteriores, sino que usamos directamente los modelos de microheterogeneidades que resultan luego de aplicar el filtro (4.10). La Figura 4.13 muestra las distribuciones de porosidad que seleccionamos para estos experimentos; en ellas, las celdas negras se corresponden con valores de porosidad de 0.2 y las blancas, 0.4, mientras que las zonas grises poseen valores intermedios de porosidad entre 0.2 y 0.4. Para generarlas, consideramos una longitud de correlación $a = 0.005$m en el caso a), y $a = 0.1$m en el caso b), y las elegimos de modo que los valores promedio de porosidad de las muestras son iguales a 0.3 en ambos casos. Para resaltar el efecto de estas heterogeneidades, también incluimos en este conjunto de experimentos tres muestras homogéneas, con valores de porosidad 0.2, 0.3 y 0.4, respectivamente.

Los cambios en porosidad implican cambios en los otros parámetros físicos de la matriz sólida. Para tenerlos en cuenta, usamos el modelo de Krief et al. [53] para calcular los módulos de corte y de volumen en cada celda computacional de las matrices sólidas de las muestras. Además, empleamos la relación de Kozeny-Carman [62] para obtener el campo de permeabilidad correspondiente.

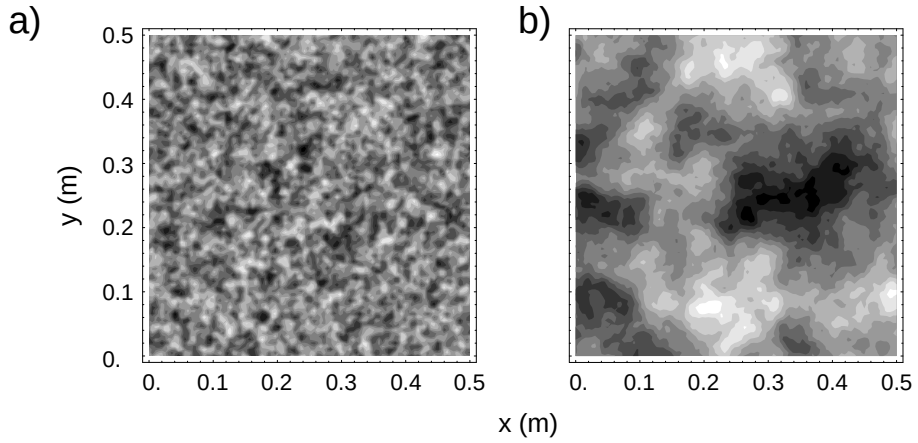

Figura 4.13: Distribuciones de porosidad seleccionadas para analizar los efectos mesoscópicos producidos por heterogeneidades en las propiedades del fluido y de la matriz sólida. Las longitudes de correlación que usamos para generarlas son $a = 0.005$m en el caso a), y $a = 0.1$m en el caso b). En ambos casos las muestras poseen una porosidad promedio igual a 0.3.

Con respecto a las heterogeneidades en las propiedades del fluido, en todos los experimentos consideramos una distribución de agua y gas similar a la que describe la Figura 4.5c). Los casos que analizamos son:

- D1: La distribución de porosidad está dada por la Figura 4.13 a)
- D2: La distribución de porosidad está dada por la Figura 4.13 b)
- D3: La matriz sólida es homogénea, y posee un valor de porosidad igual a 0.2
- D4: La matriz sólida es homogénea, y posee un valor de porosidad igual a 0.3
- D5: La matriz sólida es homogénea, y posee un valor de porosidad igual a 0.4.

La Figura 4.14 muestra el inverso del factor de calidad compresional equivalente para los experimentos D1 a D5. Comparando las distintas curvas podemos ver que en estos casos la magnitud de la pérdida por efectos mesoscópicos es muy sensible a la porosidad promedio de la muestra de roca. Además, la frecuencia en la que se produce el pico de atenuación se mueve hacia mayores valores a medida que este parámetro físico aumenta. Es muy interesante también observar que las curvas de los casos D1,D2 y D4 muestran comportamientos muy similares. Este hecho sugiere que la respuesta de una muestra

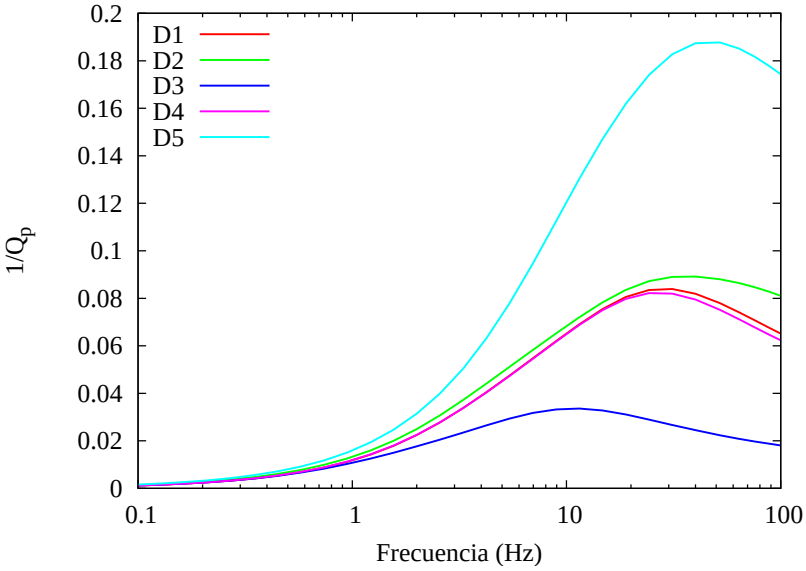

Figura 4.14: Inverso del factor de calidad compresional equivalente para la distribución de agua y gas de la Figura 4.5c). Las distintas curvas se corresponden con distintas heterogeneidades en las propiedades de la matriz.

saturada con agua y gas, y que contiene una distribución de porosidad heterogénea se asemeja al comportamiento de una roca con matriz homogénea, que posee un valor de porosidad similar al valor medio de la porosidad de la roca heterogénea y conteniendo la misma distribución de fluidos.

Por otra parte, la Figura 4.15 muestra la velocidad de fase compresional equivalente en función de la frecuencia, para estos experimentos. En ella podemos observar que en todos los casos el flujo de fluido inducido por la onda produce un leve aumento de la velocidad de fase con la frecuencia. Como es de esperar, las mayores velocidades ocurren en el caso de menor porosidad (D3), mientras que los menores valores suceden en el caso de mayor porosidad (D5). También en el caso de la velocidad de fase, los comportamientos de los experimentos D1, D2 y D4 son muy similares.

E. Sensibilidad de los efectos mesoscópicos a variaciones litológicas

Los efectos mesoscópicos también pueden producirse por heterogeneidades de mesoescala asociadas con la litología de la roca. En este experimento analizamos la respuesta de una muestra de roca saturada con agua, cuya matriz sólida está compuesta por una mezcla

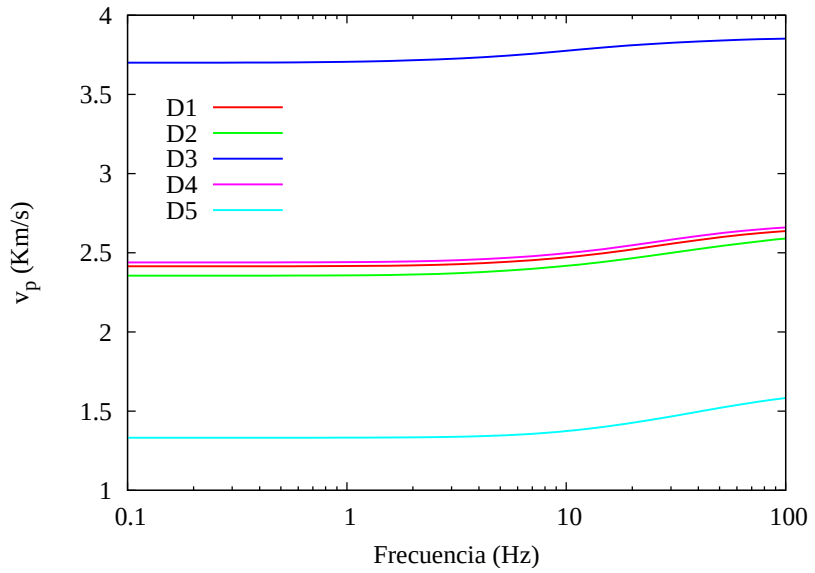

Figura 4.15: Velocidad de fase compresional equivalente para la distribución de agua y gas de la Figura 4.5c). Las distintas curvas se corresponden con distintas heterogeneidades en las propiedades de la matriz.

de dos materiales diferentes: la arenisca 3 y la lutita de la Tabla 2.1.

Como en los experimentos anteriores, en este caso asumimos que la distribución irregular de arenisca y lutita puede representarse usando un campo fractal estocástico asociado con la densidad espectral de von Karman. El procedimiento para generar las distribuciones binarias es similar al que usamos para crear las configuraciones irregulares de agua y gas pero, en este caso, el color de cada celda indica si la misma contiene arenisca o lutita. Además, elegimos el nivel de corte de modo que la fracción total de arenisca que contiene la muestra de roca es 0.5. Los parámetros que seleccionamos para la densidad espectral fractal son $H = 0.8$, $D = 2.2$ y la longitud de correlación $a = 0.0005$m.

La Figura 4.16 muestra la distribución de arenisca y lutita que consideramos para este experimento. Las zonas negras se corresponden con celdas que poseen lutita, mientras que las blancas contienen arenisca. Estas variaciones litológicas producen efectos mesoscópicos no despreciables en el caso de la propagación de una onda compresional clásica a través del medio, tal como podemos apreciar en la Figura 4.17. La velocidad de fase compresional equivalente muestra una dispersión prácticamente despreciable, con un incremento de 1.7% en el rango de frecuencias que consideramos, razón por la cual no

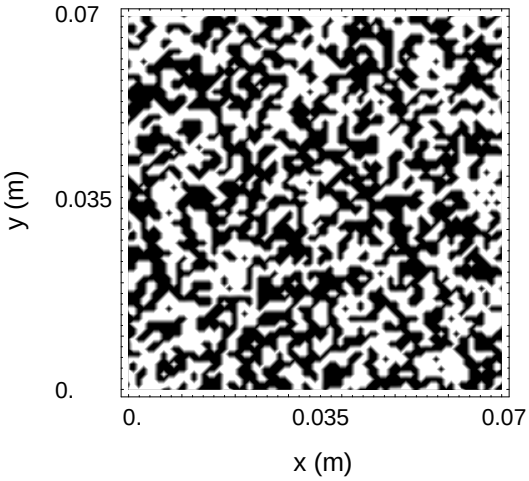

Figura 4.16: Distribución de arenisca y lutita usada en el experimento numérico E. Las zonas negras se corresponden con celdas que contienen lutita, mientras que las blancas poseen arenisca.

incluimos esta curva.

Lo que es particularmente interesante de la Figura 4.17 es el hecho de que estas heterogeneidades de mesoescala producen gradientes no despreciables en el campo de presión de fluido también en el caso de la aplicación del experimento de corte, induciendo pérdidas de energía y dispersión de velocidad. De hecho, en esta figura podemos observar valores del factor de calidad equivalente Q_s del orden de 70 para frecuencias cercanas a 20Hz. Este resultado demuestra que las ondas de corte que se propagan a través de estos medios son afectadas de manera significativa por los efectos mesoscópicos. Con respecto a la dispersión de velocidad experimentada por la onda de corte, también en este caso es es prácticamente despreciable, con un incremento de 1.5% en el rango de frecuencias que consideramos, y por esta razón no presentamos esta curva.

Para concluir el análisis paramétrico que ha sido presentado en esta sección, resulta interesante remarcar que el hecho de que los efectos mesoscópicos sean altamente sensibles a ciertos parámetros de las rocas, tales como permeabilidad, porosidad, viscosidad de los fluidos saturantes, tipo y grado de saturación de fluidos, entre otros, sugiere que una comprensión más profunda de este fenómeno permitiría extraer valiosa información a partir de la respuesta sísmica de los medios porosos saturados heterogéneos de interés.

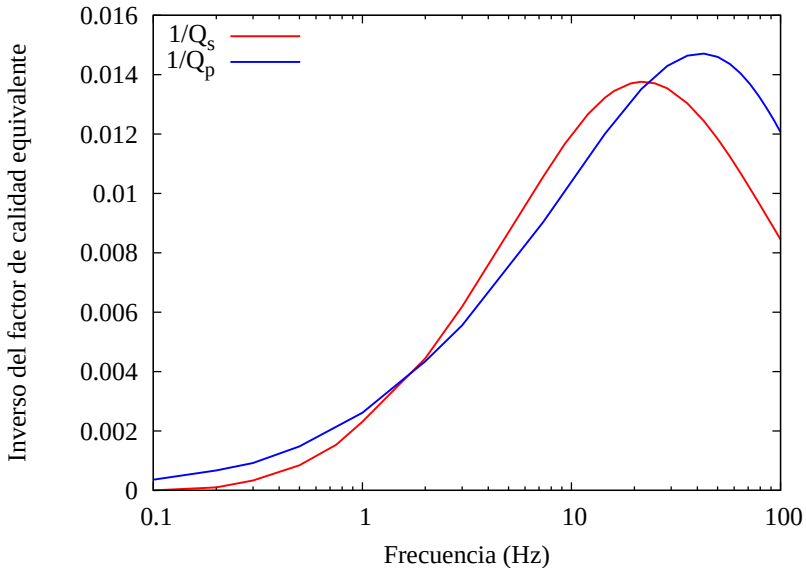

Figura 4.17: Inversos de los factores de calidad compresional y de corte equivalentes para la mezcla de arenisca y lutita, en función de la frecuencia.

4.3 Comportamiento estadístico de medios altamente heterogéneos

Los experimentos de compresión y de corte que definimos previamente nos permiten estimar los módulos complejos equivalentes de muestras de roca, siempre que conozcamos en detalle la configuración espacial de sus propiedades. Sin embargo, dado que las propiedades de las rocas a mesoescala suelen poseer gran variabilidad espacial, puede ocurrir que no tengamos un conocimiento preciso de la distribución de las mismas a tales escalas. En estos casos, como ya mencionamos previamente, las heterogeneidades pueden modelarse utilizando funciones estocásticas con una dada densidad espectral. Por ejemplo, Helle et al. [44] han usado las funciones de autocorrelación de von Karman para modelar distribuciones irregulares de fluidos, mientras que Masson y Pride [61] analizaron el comportamiento de materiales con propiedades tomadas aleatoriamente de ciertas funciones de distribución de probabilidad. Sin embargo, debemos tener en cuenta que para diferentes realizaciones de las variables aleatorias se obtendrán diferentes respuestas del sistema. El estudio de este tipo de problemas dio origen a los métodos de Simulación Monte Carlo, cuyas bases fueron sentadas por Metropolis y Ulam [63], y constituyen una herramienta esencial en los campos de la ingeniería de reservorios, hidrología, física,

biología, economía, etc. Estos métodos permiten cuantificar la incertidumbre de las predicciones numéricas obtenidas con parámetros inciertos a partir de un número limitado de realizaciones [3]. En el contexto del problema que nos ocupa, aplicaremos el procedimiento Monte Carlo tomando muestras representativas de material poroso conteniendo heterogeneidades aleatorias caracterizadas por cierta densidad espectral, y resolviendo los problemas de condiciones de contorno para cada realización. Este procedimiento nos permitirá obtener los promedios y varianzas de los módulos complejos equivalentes de las muestras. Tales parámetros representan el comportamiento estadístico de las respuestas de las muestras de roca en estudio.

Siguiendo esta metodología estocástica, cualquier propiedad espacial en el sólido o en el fluido $p(x, y)$ es considerada como una muestra (o realización) tomada aleatoriamente de un conjunto de procesos aleatorios físicamente significativos $P(x, y, \gamma)$, donde γ es la variable aleatoria. Este concepto nos permite definir las propiedades estadísticas del proceso estocástico $P(x, y, \gamma)$ y de cualquier cantidad (aleatoria) obtenida como salida de nuestro modelo. Por ejemplo, la media del conjunto $P(x, y, \gamma)$ podría interpretarse como el promedio de mediciones repetidas de la propiedad.

En nuestro caso, un conjunto finito de realizaciones $P(x, y, \gamma_n)$, con $n = 1, \cdots, N_R$, es generado usando una dada densidad espectral. Para cada frecuencia temporal ω y realización γ_n, las velocidades de fase e inversos de los factores de calidad equivalentes $\beta^n(\omega)$, $\beta = V_p, 1/Q_p, V_s, 1/Q_s$, son funciones aleatorias determinadas realizando promedios espaciales de los desplazamientos calculados en ciertos puntos del dominio, tal como fue explicado en la derivación de las fórmulas (4.4) y (4.9). Luego, las medias y varianzas de las funciones aleatorias $\beta^n(\omega)$ representan el comportamiento estadístico de las respuestas de las muestras de roca en consideración.

Para analizar la convergencia de la técnica Monte Carlo en función del número de realizaciones N_R, calculamos el promedio en frecuencia de las varianzas en la forma

$$\| \sigma_\beta^2(N_R) \| = \frac{1}{N_F} \sum_{m=1}^{N_F} \sigma_\beta^2(\omega_m, N_R), \tag{4.11}$$

donde

$$\langle \beta(\omega_m, N_R) \rangle = \frac{1}{N_R} \sum_{n=1}^{N_R} \beta^n(\omega_m), \tag{4.12}$$

$$\sigma_\beta^2(\omega_m, N_R) = \frac{1}{(N_R - 1)} \sum_{n=1}^{N_R} \left[\beta^n(\omega_m) - \langle \beta(\omega_m, N_R) \rangle \right]^2, \tag{4.13}$$

y N_F es el número de frecuencias consideradas.

Siguiendo el criterio que usaron Guarracino y Santos [37], efectuamos las simulaciones Monte Carlo con N_R^* realizaciones, de modo que las varianzas (4.11) de las cantidades calculadas se estabilizan en valores constantes. Entonces, los valores $\langle\beta(\omega_m, N_R^*)\rangle$ definen los promedios de las velocidades de fase e inversos de los factores de calidad equivalentes para los materiales heterogéneos que estamos estudiando.

4.3.1 Aplicación del procedimiento Monte Carlo: comportamiento estadístico de rocas saturadas con distribuciones irregulares de agua y gas

Para ilustrar la aplicación de esta metodología estadística, obtengamos los promedios y desviaciones estándar de las velocidades de fase e inversos de los factores de calidad equivalentes de rocas saturadas con distribuciones irregulares de agua y gas, de acuerdo con cierta densidad espectral.

Con este objetivo, consideremos muestras cuadradas de roca de lado 0.5m, saturadas con manchas irregulares de agua y gas. Tal como hicimos previamente en este capítulo, para generar las distribuciones de los fluidos usamos un campo fractal estocástico basado en las funciones de autocorrelación de von Karman, tomando una dimensión fractal $D = 2.2$, un coeficiente de autosimiliradidad $H = 0.8$ y una longitud de correlación $a = 0.1$m. En cada realización, y al momento de hacer binaria la distribución de fluidos, elegimos el nivel de corte de modo que la saturación total de gas de cada muestra es la misma, e igual a 0.1.

Suponemos también que las matrices sólidas son homogéneas en todos los casos, y se corresponden con la arenisca 1 de la Tabla 2.1. En cada realización, para estimar numéricamente los módulos complejos equivalentes utilizamos una partición del dominio en 75×75 elementos cuadrados de lado $h = 0.5/75$m.

Podemos ver en la Figura 4.18 distribuciones irregulares de agua y gas correspondientes a cuatro muestras particulares del conjunto de realizaciones que consideramos para aplicar la técnica Monte Carlo. En esta figura, las zonas negras se corresponden con regiones completamente saturadas con gas, mientras que las blancas son zonas saturadas con agua. En los cuatro casos la saturación neta de gas de las muestras es 0.1, y las diferencias entre las geometrías de las distribuciones de los fluidos producen distintas respuestas sísmicas. Esta particularidad la podemos observar en las Figuras 4.19 y 4.20, donde se muestran el inverso del factor de calidad y la velocidad de fase compresional

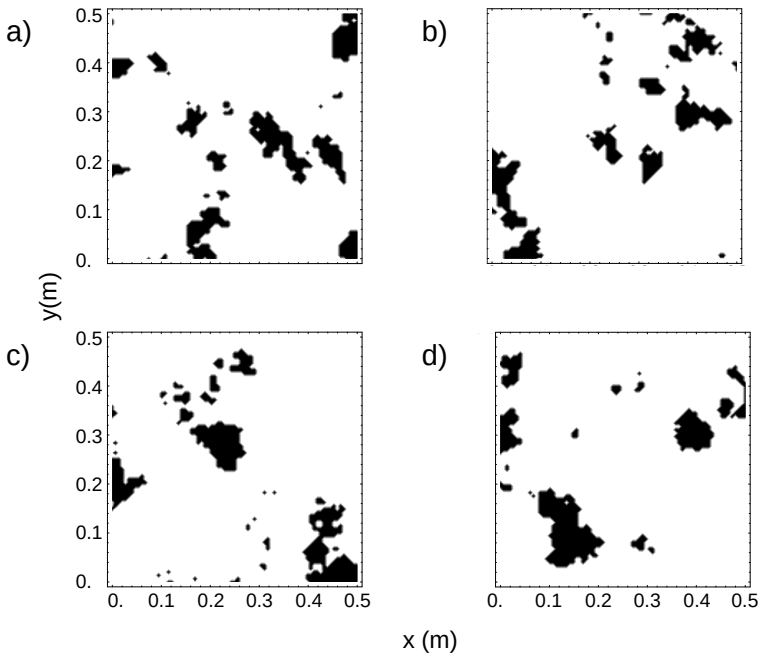

Figura 4.18: Distribuciones de agua y gas para 4 realizaciones particulares. En todos los casos, la saturación neta de gas es 0.1.

equivalente, respectivamente, para las 4 realizaciones particulares y en función de la frecuencia. Podemos notar en estas curvas que si bien los comportamientos de las distintas muestras son cualitativamente similares, difieren al verlos en detalle.

Luego, para aplicar la metodología Monte Carlo, completamos un juego de experimentos que involucra 70 realizaciones, y analizamos estadísticamente su comportamiento. En tal sentido, la Figura 4.21 muestra el promedio en frecuencia de las varianzas del inverso del factor de calidad compresional equivalente en función del número total de realizaciones, N_R. En esta figura podemos observar que luego de 70 realizaciones este parámetro se estabiliza en un valor constante y muy pequeño. Lo mismo ocurre con las varianzas de la velocidad de fase compresional equivalente, como lo podemos ver en la Figura 4.22. Estos resultados sugieren que los promedios y varianzas de la velocidad de fase compresional equivalente y del inverso del factor de calidad compresional equivalente determinados en el conjunto de 70 realizaciones que estamos considerando, representan muy bien el comportamiento estadístico de los medios altamente heterogéneos en estudio.

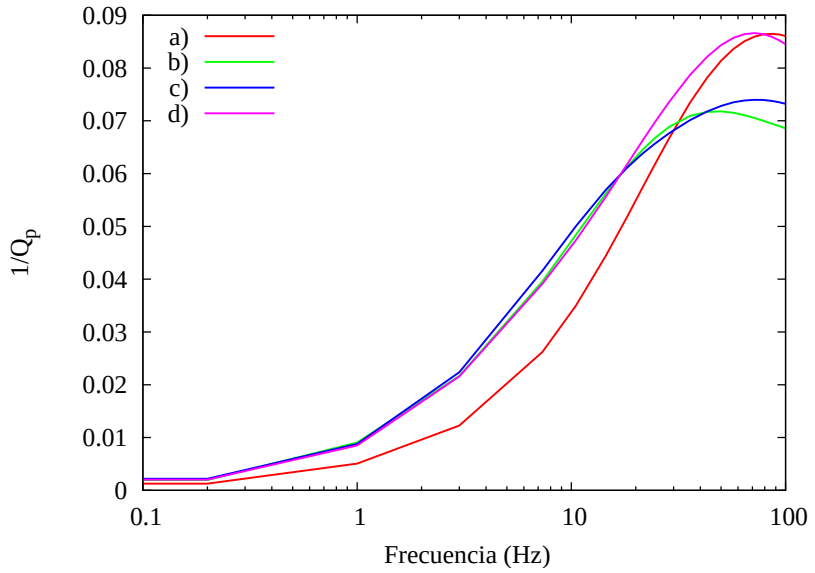

Figura 4.19: Inverso del factor de calidad compresional equivalente para las 4 realizaciones particulares que se muestran en la Figura 4.18, en función de la frecuencia.

La Figura 4.23 muestra el comportamiento del promedio del inverso del factor de calidad compresional equivalente en función de la frecuencia (considerando 70 realizaciones), y su correspondiente intervalo de desviación estándar (indicado con líneas punteadas). Podemos observar niveles de atenuación muy importantes en prácticamente todo el rango de frecuencias considerado, con un valor mínimo del factor de calidad equivalente (promedio) del orden de 12 para frecuencias cercanas a 40Hz.

Por otro lado, la Figura 4.24 muestra el promedio de la velocidad de fase compresional equivalente en función de la frecuencia (considerando 70 realizaciones), y su correspondiente intervalo de desviación estándar (líneas punteadas). Podemos ver en esta figura una importante dispersión creciente de la velocidad de fase compresional promedio en el rango de frecuencias que consideramos.

Es muy interesante notar la falta de incertidumbre para las bajas frecuencias. Esta particularidad se debe al hecho de que para longitudes de onda muy grandes el medio es visto como homogéneo, independientemente de la realización, y entonces hay poca dispersión entre las respuestas de las distintas muestras. A medida que la frecuencia aumenta, las longitudes de onda comienzan a *ver* las diferencias entre las distintas realizaciones, con el consecuente incremento en las varianzas.

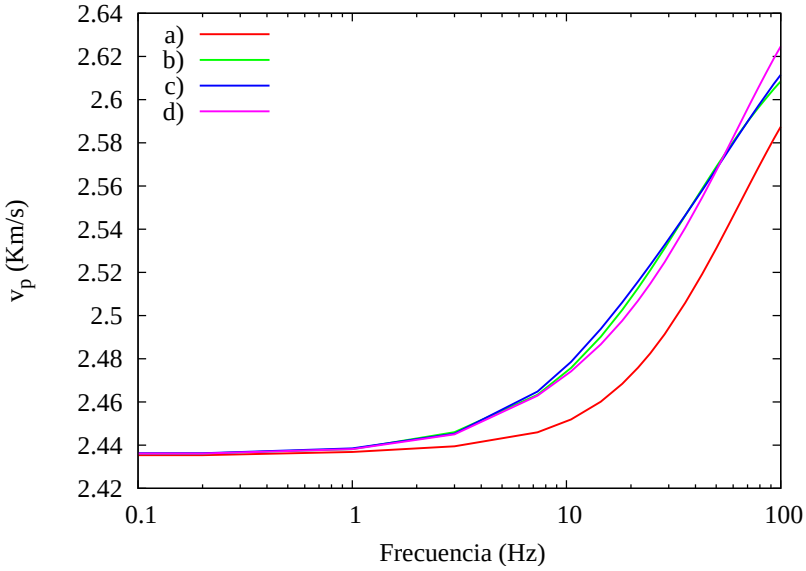

Figura 4.20: Velocidad de fase compresional equivalente para las 4 realizaciones particulares que se muestran en la Figura 4.18, en función de la frecuencia.

Con el fin de obtener el comportamiento estadístico de los módulos de corte equivalentes de estas muestras, aplicamos también el experimento de corte al mismo conjunto de rocas. Como esperamos, el promedio de estos módulos tiene parte imaginaria despreciable, mientras que su parte real posee un valor muy cercano al módulo de corte de la matriz seca. Esto ocurre porque el experimento de corte aplicado a rocas que poseen matrices sólidas homogéneas produce gradientes despreciables en el campo de presión del fluido y, consecuentemente, efectos mesoscópicos poco importantes.

Para finalizar este capítulo, cabe remarcar que en el contexto de la geofísica de exploración, los procedimientos numéricos expuestos pueden ser de gran utilidad para obtener la respuesta sísmica de una zona de interés. Esto se debe al hecho de que los mismos permitirían reemplazar los medios porosos heterogéneos que constituyen cada una de las regiones del modelo geológico en estudio por sólidos viscoelásticos equivalentes, donde los efectos mesoscópicos son tenidos en cuenta resolviendo un conjunto de problemas de valores de contorno sobre muestras representativas. Desde un punto de vista computacional, esto es muy conveniente dado que la realización de simulación numérica de propagación de ondas a través de un sólido viscoelástico heterogéneo es mucho más eficiente que cualquier procedimiento numérico basado en la discretización de las ecuaciones

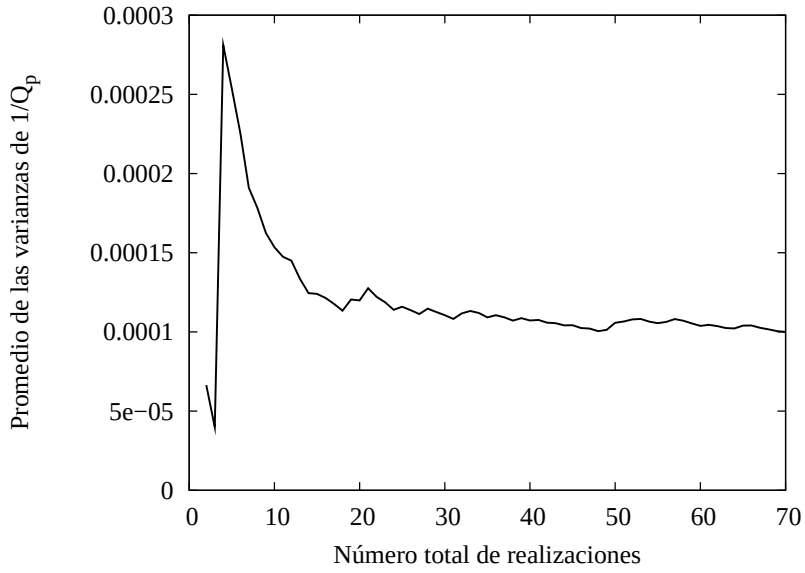

Figura 4.21: Promedio en frecuencia de las varianzas del inverso del factor de calidad compresional equivalente, en función del número total de realizaciones.

de Biot para el mismo orden de exactitud.

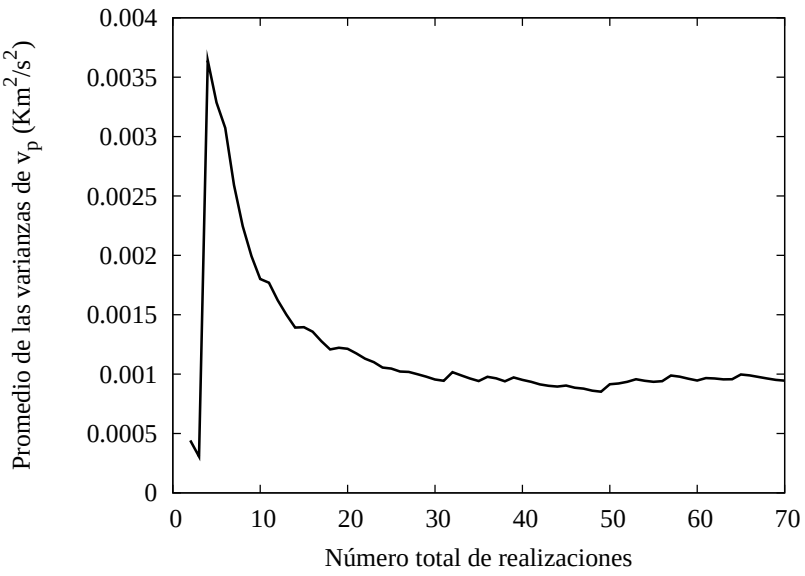

Figura 4.22: Promedio en frecuencia de las varianzas de la velocidad de fase compresional equivalente, en función del número total de realizaciones.

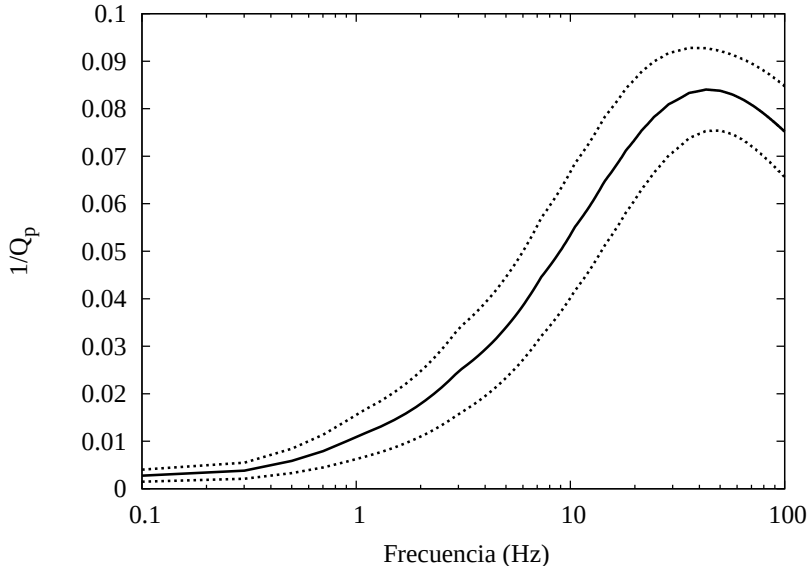

Figura 4.23: Promedio del inverso del factor de calidad compresional equivalente (luego de 70 realizaciones) en función de la frecuencia, y su correspondiente desviación estándar (líneas punteadas).

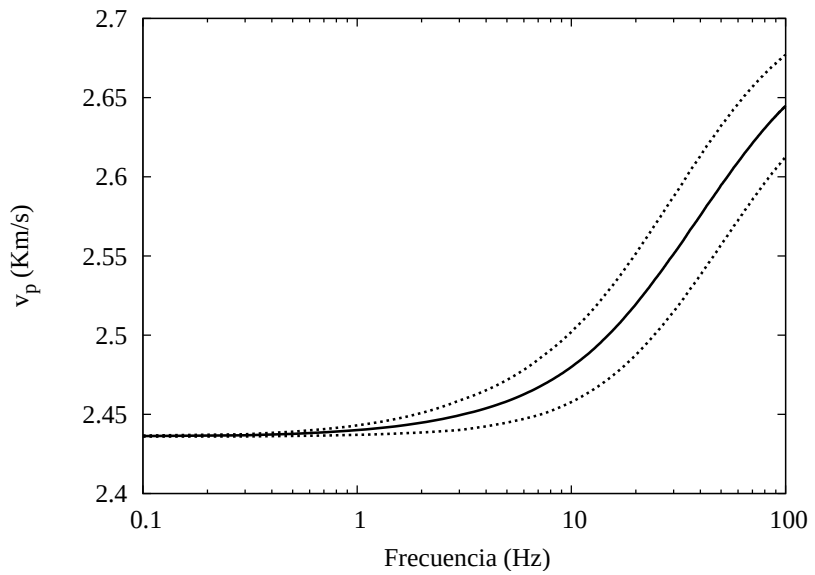

Figura 4.24: Promedio de la velocidad de fase compresional equivalente (luego de 70 realizaciones) en función de la frecuencia, y su correspondiente desviación estándar (líneas punteadas).

Capítulo 5

Extensión de la teoría de Biot para medios porosos compuestos

En los capítulos anteriores de esta Tesis hemos podido observar que la onda compresional adicional de la teoría de Biot puede producir efectos muy importantes sobre las ondas clásicas que viajan a través de medios porosos saturados heterogéneos. Por esta razón, para estudiar adecuadamente la respuesta sísmica de estos medios debemos considerar la naturaleza porosa de los mismos y la presencia de una fase fluida en el espacio poral.

Hay diversos casos en la naturaleza en los que la fase sólida del medio está compuesta realmente por *dos* matrices sólidas entrelazadas, con distintas propiedades y débilmente acopladas. Por ejemplo, las areniscas arcillosas (*shaly sandstones*) son rocas cuya matriz está compuesta por arenisca y lutita [15]. Una situación interesante, también en relación con estos medios de matriz compuesta, ocurre en zonas muy frías en las que los fluidos porales de suelos y rocas permanecen parcialmente congelados (*permafrost*) [64, 17]. Otro ejemplo de medios porosos compuestos de gran relevancia en Geofísica de exploración lo constituyen las rocas que albergan gases de hidrocarburos hidratados (*hidratos de metano*), ocupando parcialmente el espacio poral [14].

Dado que las dos fases sólidas que constituyen a este tipo de medios poseen propiedades físicas diferentes, pueden sufrir distintos desplazamientos y deformaciones al aplicar sobre el mismo un esfuerzo dado. En base a este hecho, resulta claro que puede no resultar correcto representarlos utilizando una sola matriz sólida equivalente. En este sentido, Leclaire et al. [55] desarrollaron una extensión de la teoría de Biot para describir la propagación de ondas a través de medios porosos parcialmente congelados. Estos autores consideraron la coexistencia de roca, agua y hielo bajo la hipótesis de que siempre existe una fina capa de agua líquida alrededor de las partículas rocosas, que evita el contacto entre las dos fases sólidas [55]. Este modelo es válido para medios con porosidad uniforme, y lo interesante de esta teoría es que predice la existencia de *tres* ondas compresionales y *dos* ondas de corte. Además, estos mismos autores verificaron que algunas de las ondas lentas adicionales pueden ser observadas en experimentos de laboratorio [56].

Posteriormente, Carcione y Tinivella [14] generalizaron la teoría de Leclaire et al.

[56] para incluir la interacción entre las partículas de hielo y roca, y consideraron la cementación de los granos con la disminución de la temperatura. Carcione et al. [15] también utilizaron esta teoría para estudiar las propiedades acústicas de areniscas arcillosas, asumiendo que las fases sólidas están débilmente acopladas y que forman un esqueleto compuesto poroso y entrelazado. Más recientemente, Santos et al. [86] generalizaron las teorías desarrollada por Leclaire et al. [55] y Carcione y Tinivella [14] para el caso de rocas de matriz compuesta que contienen distribuciones no uniformes de porosidad. La importancia de este modelo radica en que, a diferencia de los modelos existentes hasta ese momento, éste puede ser utilizado para realizar simulación numérica de propagación de ondas en medios de matriz compuesta que contienen distribuciones heterogéneas de porosidad.

Las ondas lentas adicionales que surgen en los medios de matriz compuesta pueden tener roles importantes en las conversiones de energía que ocurren cuando una onda sísmica encuentra una heterogeneidad en estos medios. Por este motivo, resulta razonable suponer que para analizar correctamente el comportamiento de las ondas clásicas que viajan a través de medios porosos compuestos heterogéneos debemos considerar la utilización de los modelos teóricos desarrollados especialmente para estos ambientes. En tal sentido, en este capítulo presentaremos brevemente la teoría desarrollada por Santos et al. [86] para describir la propagación de ondas en medios porosos compuestos saturados por un fluido. Luego, estudiaremos las principales propiedades de las ondas que de acuerdo con esta teoría se pueden propagar a través de estos medios. Finalmente, analizaremos las particiones de energía que ocurren cuando una onda compresional clásica incide sobre una discontinuidad plana en estos ambientes, y el rol de las ondas lentas en estas conversiones de energía. Los principales resultados de este capítulo se encuentran publicados en [79].

5.1 Breve descripción de la extensión de la teoría de Biot para medios compuestos

En esta sección presentaremos la extensión de la teoría de Biot propuesta por Santos et al. [86] para analizar la propagación de ondas en medios porosos compuestos saturados por un fluido.

La metodología para obtener las relaciones constitutivas y las ecuaciones de movimiento

es similar a la que utilizó Biot para estudiar la respuesta de una matriz sólida saturada por un fluido [6, 7, 8]. Consideremos un volumen elemental de material poroso Q, compuesto por dos fases sólidas referidas por los subíndices o supraíndices 1 y 3, y saturado por un fluido monofásico indicado por el subíndice o supraíndice 2, de modo que $Q = Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3$. Supongamos también que las matrices sólidas están débilmente acopladas y que las tres fases poseen conectividad sobre distancias macroscópicas.

Sea V_i el volumen de la fase Q_i, y V_b y V_{sm} el volumen de Q y de la matriz sólida $Q_{sm} = Q_1 \cup Q_3$, de modo que

$$V_{sm} = V_1 + V_3, \qquad V_b = V_1 + V_2 + V_3.$$

Llamemos $S_1 = V_1/V_{sm}$ y $S_3 = V_3/V_{sm}$ a las fracciones de los dos sólidos de la matriz compuesta, y definamos $\phi = V_2/V_b$, $\phi_1 = V_1/V_b$ y $\phi_3 = V_3/V_b$.

Siguiendo el trabajo de Santos et al. [86], si ω es la frecuencia angular y x la posición de la partícula, sean $u^{(1)} = u^{(1)}(x,\omega), \widetilde{u}^{(2)} = \widetilde{u}^{(2)}(x,\omega)$ y $u^{(3)} = u^{(3)}(x,\omega)$ las transformadas de Fourier de los desplazamientos de las distintas fases, promediados sobre el volumen de agregado. Definimos también el desplazamiento relativo del fluido, $u^{(2)}$, según

$$u^{(2)} = u^{(2)}(x,\omega) = \phi\big(\widetilde{u}^{(2)} - S_1 u^{(1)} - S_3 u^{(3)}\big), \tag{5.1}$$

con $\zeta = -\nabla \cdot u^{(2)}$ representando el cambio en el contenido de fluido. También, sean $u = (u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)})^T$ y $v = (v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)})^T$, con $v^{(j)} = i\omega u^{(j)}$ las velocidades de las partículas.

Con el objetivo de obtener las relaciones constitutivas para el medio compuesto, denotemos $\widetilde{\sigma}^{(1)}_{jk}$ y $\widetilde{\sigma}^{(3)}_{jk}$ a las transformadas de Fourier de los tensores relacionados con las tensiones actuantes sobre las partes sólidas Q_1 y Q_3, respectivamente, promediados sobre el volumen de material Q. También, llamemos p_f a la transformada de Fourier de la presión del fluido. Asumiendo que el medio compuesto es isótropo, definimos también los tensores

$$\sigma^{(1)}_{jk} = \widetilde{\sigma}^{(1)}_{jk} - S_1 \phi p_f \delta_{jk}, \qquad \sigma^{(3)}_{jk} = \widetilde{\sigma}^{(3)}_{jk} - S_3 \phi p_f \delta_{jk}, \tag{5.2}$$

asociados con los esfuerzos totales en Q_1 y Q_3, respectivamente. Luego, las relaciones isotrópicas y lineales esfuerzo-deformación en el dominio espacio-frecuencia, están dadas

por [86]

$$
\begin{aligned}
\sigma_{jk}^{(1)}(u) &= \big[K_{G1}\theta_1 - B_1\zeta + B_3\theta_3\big]\delta_{jk} + 2\mu_1 d_{jk}^{(1)} + \mu_{13} d_{jk}^{(3)},\\
\sigma_{jk}^{(3)}(u) &= \big[K_{G3}\theta_3 - B_2\zeta + B_3\theta_1\big]\delta_{jk} + 2\mu_3 d_{jk}^{(3)} + \mu_{13} d_{jk}^{(1)},\\
p_f(u) &= -B_1\theta_1 - B_2\theta_3 + K_{av}\zeta,
\end{aligned}
\tag{5.3}
$$

donde $d_{jk}^{(m)} = \epsilon_{jk}(u^{(m)}) - \frac{1}{3}\,\theta_m\delta_{jk}, \quad m = 1,3,$ es el tensor de las deformaciones deviatóricas en Q_m, y $\epsilon_{jk}(u^{(m)})$ denota el tensor de deformaciones en Q_m, con invariante lineal $\theta_m = \epsilon_{jj}(u^{(m)})$.

Los parámetros que en las igualdades (5.3) nos permiten relacionar los esfuerzos con las deformaciones, pueden determinarse a partir de las propiedades individuales de los distintos componentes del medio. En este sentido, siguiendo el trabajo desarrollado por Santos el al. [86], si $K_{s1,m}$, $K_{s3,m}$, $\mu_{s1,m}$ y $\mu_{s3,m}$ son los módulos de volumen y de corte de las dos matrices sólidas secas, respectivamente, y si K_f y η son el módulo de volumen y la viscosidad del fluido, entonces los coeficientes en las relaciones constitutivas (5.3) están dados por

$$
\begin{aligned}
&\mu_j = [(1-g_j)\phi_j]^2\mu_{av} + \mu_{sj,m}, \quad g_j = \frac{\mu_{sj,m}}{\phi_j\mu_{sj}}, \quad j = 1,3,\\
&\mu_{13} = (1-g_1)(1-g_3)\phi_1\phi_3\mu_{av},\\
&\mu_{av} = \Big[\frac{(1-g_1)\phi_1}{\mu_{s1}} + \frac{\phi}{2\omega\eta} + \frac{(1-g_3)\phi_3}{\mu_{s3}}\Big]^{-1},\\
&K_{av} = \left[(1-c_1)\frac{\phi_1}{K_{s1}} + \frac{\phi}{K_f} + (1-c_3)\frac{\phi_3}{K_{s3}}\right]^{-1}, \quad c_j = \frac{K_{sj,m}}{\phi_j K_{sj}}, \quad j = 1,3,\\
&K_{Gj} = K_{sj,m} + (\alpha_j)^2 K_{av}, \quad \alpha_j = S_j - \frac{K_{sj,m}}{K_{sj}},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&B_1 = \frac{S_1\phi^2 K_{av} + C_{12}}{\phi}, \quad B_2 = \frac{S_3\phi^2 K_{av} + C_{23}}{\phi},\\
&B_3 = \big(C_{13} + S_3C_{12} + S_1C_{23} + S_1S_3\phi^2 K_{av}\big),
\end{aligned}
$$

donde

$$
C_{12} = \phi K_{av}(\alpha_1 - S_1\phi), \quad C_{23} = \phi K_{av}(\alpha_3 - S_3\phi), \quad C_{13} = K_{av}(\alpha_1 - S_1\phi)(\alpha_3 - S_3\phi).
$$

Los módulos K_{G1} y K_{G3} son análogos al módulo de Gassmann [36], mientras que los coeficientes α_1 y α_3 se corresponden con los coeficientes de esfuerzo efectivo de la teoría

de Biot clásica [11, 8]. Cabe remarcar que las relaciones constitutivas (5.3) pueden extenderse al caso viscoelástico, como es usual, utilizando módulos complejos dependientes de la frecuencia tal como se presentó en [79].

Debemos enfatizar aquí que bajo la suposición de acoplamiento débil entre los dos sólidos, fueron necesarios dos tensores de tensiones para describir los estados de esfuerzos en las fases sólidas. Esto constituye una generalización de la teoría de Biot clásica, en la cual los diferentes minerales de la roca son tratados como una sola fase.

5.2 Las ecuaciones de movimiento

Para obtener las ecuaciones de movimiento, debemos introducir una matriz de masa (definida positiva) $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\omega)$ y una matriz de disipación (no negativa) $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\omega)$, según

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} p_{11}I & p_{12}I & p_{13}I \\ p_{12}I & p_{22}I & p_{23}I \\ p_{13}I & p_{23}I & p_{33}I \end{bmatrix}, \qquad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} f_{11}I & -f_{12}I & -f_{11}I \\ -f_{12}I & f_{22}I & f_{12}I \\ -f_{11}I & f_{12}I & f_{11}I \end{bmatrix},$$

donde I denota la matriz identidad en $\mathbb{R}^{3\times 3}$, y los parámetros no negativos p_{ij} y f_{ij} son los coeficientes de acoplamiento de masa y de fricción viscosa, respectivamente. Estos coeficientes pueden obtenerse a partir de las propiedades individuales de las distintas fases del sistema compuesto. En este sentido, Santos et al. [86] obtuvieron los coeficientes de acoplamiento de masa en el rango de bajas frecuencias. Estos parámetros, denotados m_{jk}, serán corregidos más adelante en este capítulo para incluir los efectos viscodinámicos y de esta forma obtener los parámetros p_{jk}. Si denotamos ρ_m $(m = 1, 2, 3)$ a las densidades de las distintas fases, los coeficientes m_{jk} están definidos mediante [86]

$$\begin{aligned}
m_{11} &= \rho_2\phi\left(1 + (S_1)^2 a_{32} + (S_3)^2 a_{12} - 2S_3 - (S_1)^2\right) \\
&\qquad + a_{13}\rho_1\phi_1 + (a_{31} - 1)\rho_3\phi_3, \\
m_{12} &= \rho_2\left(S_3(1 - a_{12}) + S_1 a_{32}\right), \\
m_{13} &= \rho_2\phi\left(1 - (S_1)^2 a_{32} - (S_3)^2 a_{12} - S_1 S_3\right) \\
&\qquad + \rho_1\phi_1(1 - a_{13}) + \rho_3\phi_3(1 - a_{31}), \\
m_{22} &= \frac{\rho_2}{\phi}\left(a_{12} + a_{32} - 1\right), \\
m_{23} &= \rho_2\left(S_1(1 - a_{32}) + S_3 a_{12}\right), \\
m_{33} &= \rho_2\phi\left(1 + (S_1)^2 a_{32} + (S_3)^2 a_{12} - 2S_1 - (S_3)^2\right) \\
&\qquad + a_{31}\rho_3\phi_3 + (a_{13} - 1)\rho_1\phi_1.
\end{aligned}$$

En estas ecuaciones,

$$a_{12} = \frac{\phi_1 \rho}{\phi \rho_2} r_{12} + 1, \quad a_{32} = \frac{\phi_3 \rho'}{\phi \rho_2} r_{32} + 1,$$
$$a_{13} = \frac{\phi_3 \rho'}{\phi_1 \rho_1} r_{13} + 1, \quad a_{31} = \frac{\phi_1 \rho}{\phi_3 \rho_3} r_{31} + 1,$$

donde los parámetros r_{jk} están relacionados con las propiedades geométricas de los bordes que separan las fases j y k (iguales a $\frac{1}{2}$ para esferas) y

$$\rho = \frac{\phi \rho_2 + \phi_3 \rho_3}{\phi + \phi_3}, \quad \rho' = \frac{\phi \rho_2 + \phi_1 \rho_1}{\phi + \phi_1}.$$

Con respecto a los coeficientes de fricción viscosa, estos mismos autores los calcularon en el límite de bajas frecuencias, y obtuvieron [86]

$$g_{11} = d_{12} \left(S_3\right)^2 + d_{23} \left(S_1\right)^2, \quad g_{12} = \frac{d_{12} S_3 - d_{23} S_1}{\phi}, \quad g_{22} = \frac{d_{12} + d_{23}}{\phi^2}, \tag{5.4}$$
$$f_{11} = \eta \; g_{11} + g_{13}, \quad f_{12} = \eta \; g_{12}, \quad f_{22} = \eta \; g_{22},$$

donde los parámetros d_{ij} son coeficientes de disipación. El coeficiente g_{13} tiene en cuenta la pérdida por fricción entre las dos matrices sólidas. Para ser estrictos, deberíamos usar algún modelo adecuado para tener en cuenta esta pérdida de energía, tal como una teoría de fricción de tipo Coulomb.

En el caso de medios porosos parcialmente congelados, los coeficientes d_{ij} se pueden obtener mediante [86]

$$d_{12} = \frac{\phi^2}{\kappa_1}, \quad d_{23} = \frac{\phi^2}{\kappa_3}.$$

En esta ecuación, los parámetros κ_1 y κ_3 están definidos en función de las permeabilidades absolutas $\kappa_{1,0}$ y $\kappa_{3,0}$ mediante las relaciones [55]

$$\kappa_1 = \kappa_{1,0} \frac{\phi^3}{\left(1 - \phi_1\right)^3}, \quad \kappa_3 = \kappa_{3,0} \frac{\left(1 - \phi_1\right)^2}{\left(\phi_3\right)^2} \left(\frac{\phi}{\phi_1}\right)^3.$$

La permeabilidad absoluta $\kappa_{1,0}$ es la permeabilidad de la matriz de roca cuando está completamente saturada con agua, es decir, si el hielo está completamente descongelado. Por otro lado, la permeabilidad $\kappa_{3,0}$ es la permeabilidad de la matriz de hielo cuando el medio poroso está completamente congelado, es decir, para una porosidad aparente igual a ϕ_1 [55].

En el caso de areniscas arcillosas, estos coeficientes se pueden calcular mediante [15, 86]

$$\begin{aligned} d_{12} &= 45R_{s1}^{-2}\phi^{-1}(1-\phi)\phi_1, \\ d_{23} &= 45R_{s3}^{-2}\phi^{-1}(1-\phi)\phi_3, \end{aligned} \tag{5.5}$$

donde R_{s1} y R_{s3} son los radios promedio de las partículas de arena y arcilla.

Tal como ocurre en la teoría clásica de Biot, también en estos medios compuestos a medida que la frecuencia aumenta el flujo relativo deja de ser de tipo laminar, y entonces los coeficientes de masa y de fricción viscosa que obtuvimos en el límite de bajas frecuencias deben corregirse para incluir tal efecto. Con este objetivo, modificamos los términos disipativos f_{11}, f_{12} y f_{22} multiplicando la viscosidad del fluido por un factor de corrección $F_R(\theta)$, donde la función compleja y dependiente de la frecuencia $F(\theta) = F_R(\theta) + iF_I(\theta)$ es la clásica función viscodinámica definida por Biot [7]:

$$F(\theta) = \frac{1}{4}\,\frac{\theta T(\theta)}{1-\frac{2}{i\theta}T(\theta)}, \quad T(\theta) = \frac{\mathrm{ber}'(\theta) + i\mathrm{bei}'(\theta)}{\mathrm{ber}(\theta) + i\mathrm{bei}(\theta)},$$

donde $\mathrm{ber}(\theta)$ y $\mathrm{bei}(\theta)$ son las funciones de Kelvin del primer tipo y orden cero.

El argumento dependiente de la frecuencia $\theta = \theta(\omega)$ es una función del parámetro de tamaño poral a_p, y se define mediante las ecuaciones

$$\theta = a_p\sqrt{\omega\,\rho_2/\eta}, \quad a_p = 2\sqrt{\kappa A_0/\phi},$$

donde $\dfrac{1}{\kappa} = \dfrac{1}{\kappa_1} + \dfrac{1}{\kappa_3}$ y A_0 es la constante de Kozeny-Carman [4, 46].

Luego, los coeficientes de acoplamiento de masa y de fricción viscosa dependientes de la frecuencia resultan

$$p_{11}(\omega) = m_{11} + \frac{\eta F_I(\theta) g_{11}}{\omega}, \quad p_{12}(\omega) = m_{12} - \frac{\eta F_I(\theta) g_{12}}{\omega}, \tag{5.6}$$

$$p_{13}(\omega) = m_{13} - \frac{\eta F_I(\theta) g_{11}}{\omega}, \quad p_{22}(\omega) = m_{22} + \frac{\eta F_I(\theta) g_{22}}{\omega}, \tag{5.7}$$

$$p_{23}(\omega) = m_{23} + \frac{\eta F_I(\theta) g_{12}}{\omega}, \quad p_{33}(\omega) = m_{33} + \frac{\eta F_I(\theta) g_{11}}{\omega}, \tag{5.8}$$

$$f_{11}(\omega) = \eta F_R(\theta) g_{11} + g_{13}, \quad f_{12}(\omega) = \eta F_R(\theta) g_{12}, \quad f_{22}(\omega) = \eta F_R(\theta) g_{22}. \tag{5.9}$$

Para obtener las ecuaciones de movimiento, definimos el operador diferencial de segundo orden $\mathcal{L}(u)$, mediante

$$\mathcal{L}(u) = \left(\nabla\cdot\sigma^{(1)}(u), -\nabla p_f(u), \nabla\cdot\sigma^{(3)}(u)\right)^T.$$

Entonces, las ecuaciones de movimiento del medio compuesto en el dominio espacio-frecuencia están dadas por [86]

$$-\omega^2 \mathcal{P} u(x,\omega) + i\omega \mathcal{B} u(x,\omega) = \mathcal{L}(u(x,\omega)). \tag{5.10}$$

5.3 Propiedades de las ondas sísmicas en medios porosos compuestos saturados

Para analizar las principales propiedades de las ondas sísmicas que se pueden propagar a través de medios porosos compuestos saturados, realicemos un análisis de onda plana. Para simplificar este análisis, estudiemos por separado las ondas compresionales y las ondas de corte.

5.3.1 Ondas compresionales

Con el objetivo de analizar las principales características de las ondas compresionales, consideremos una onda plana compresional monocromática de frecuencia ω en el plano (x, y). En tal caso, podemos representar los desplazamientos $u^{(m)}$, $m = 1, 2, 3$, usando potenciales escalares $\varphi^{(1)}$, $\varphi^{(2)}$, $\varphi^{(3)}$, en la forma

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= \nabla\varphi^{(1)} = \nabla\left(A_p e^{-i\bar{k}_p\cdot\bar{r}}\right), \\ u^{(2)} &= \nabla\varphi^{(2)} = \nabla\left(B_p e^{-i\bar{k}_p\cdot\bar{r}}\right), \\ u^{(3)} &= \nabla\varphi^{(3)} = \nabla\left(C_p e^{-i\bar{k}_p\cdot\bar{r}}\right), \end{aligned} \tag{5.11}$$

donde $\bar{k}_p = (n_p, l_p)$ es un vector de onda complejo y $\bar{r} = (x, y)$ es el vector posición en $\mathbb{R}^2$.

Utilizando las relaciones constitutivas (5.3) en las ecuaciones de movimiento (5.10), asumiendo coeficientes espacialmente constantes y usando la representación (5.11) para describir los desplazamientos de las partículas, se obtiene el siguiente sistema lineal de tres ecuaciones y tres incógnitas:

$$\mathcal{M}^p \cdot c^p = \bar{0}, \tag{5.12}$$

donde $c^p = (A_p, B_p, C_p)^T \in \mathbb{C}^{3\times 1}$ y $\mathcal{M}^p = (\mathcal{M}^p)_{lm} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ es una matriz simétrica dada

por

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{M}^p)_{11} &= p_{11}i\omega^2 + f_{11}\omega - K_{G1}ik_p^2 - \frac{4}{3}\mu_1 ik_p^2, \\
(\mathcal{M}^p)_{12} &= p_{12}i\omega^2 - f_{12}\omega - B_1k_p^2 i, \\
(\mathcal{M}^p)_{13} &= p_{13}\omega^2 i - f_{11}\omega - B_3k_p^2 i - \frac{2}{3}\mu_{13}ik_p^2, \\
(\mathcal{M}^p)_{22} &= p_{22}\omega^2 i + f_{22}\omega - K_{av}k_p^2 i, \\
(\mathcal{M}^p)_{23} &= p_{23}\omega^2 i + f_{12}\omega - B_2k_p^2 i, \\
(\mathcal{M}^p)_{33} &= p_{33}\omega^2 i + f_{11}\omega - K_{G3}k_p^2 i - \frac{4}{3}\mu_3 ik_p^2,
\end{aligned}
\tag{5.13}
$$

con $k_p^2 = n_p^2 + l_p^2$.

Para obtener soluciones no triviales del sistema de ecuaciones (5.12), debemos pedir que el determinante de la matriz $\mathcal{M}^p$ sea nulo. Es decir,

$$
\det(\mathcal{M}^p) = P_3(z) = 0, \tag{5.14}
$$

donde $z = k_p^2$ y $P_3(z)$ es un polinomio cúbico en z. De esta ecuación polinomial resultan hasta tres posibles valores para k_p^2 y, entonces, hasta seis posibles valores para k_p. Sin embargo, no todos estos valores son físicamente aceptables, pues la amplitud del desplazamiento de cualquiera de las fases debe decaer con la distancia. Luego, teniendo en cuenta esta restricción encontramos que sólo hay tres soluciones físicamente aceptables para k_p, que son aquellas que tienen partes imaginarias negativas. Entonces, de este análisis de onda plana podemos concluir que en los medios porosos compuestos saturados se pueden propagar *tres* ondas compresionales. A estas perturbaciones compresionales las denominamos ondas tipo p_1, p_2 y p_3, y estos nombres los asignamos de modo tal que la onda tipo p_1 es la que posee la mayor velocidad de fase, mientras que la onda p_3 es la más lenta. Luego verificaremos que la onda tipo p_1 se comporta como las ondas compresionales clásicas, mientras que las otras dos perturbaciones son ondas adicionales (ondas lentas) que surgen debido a movimientos relativos de las distintas fases que componen al medio.

Reescribiendo las ecuaciones (2.33) y (2.34) en término de los módulos de los vectores de onda obtenidos a partir de este procedimiento (k_{p1}, k_{p2} y k_{p3}), podemos calcular la velocidad de fase v_j y el factor de calidad Q_j de las tres ondas compresionales mediante

las fórmulas

$$\begin{aligned} Q_j^{-1} &= -2\frac{Im(k_{pj})}{Re(k_{pj})}, \\ v_j &= \omega/Re(k_{pj}), \qquad j = p_1, p_2, p_3. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Con el fin de ilustrar el comportamiento de las distintas ondas compresionales, calculemos su velocidad de fase y atenuación considerando la arenisca 1 de la Tabla 2.1, suponiendo que se encuentra parcialmente congelada. Entonces, en este caso la fase 1 del modelo es la arenisca 1, la fase 3 es una matriz de hielo, y el fluido (fase 2) es agua. Las propiedades físicas de la matriz de roca se encuentran en la Tabla 2.1, mientras que las de la fase líquida se encuentran en la Tabla 2.2.

Para la fase 3 de este medio compuesto, consideramos un módulo de volumen $k_{s3} = 8.58$GPa, y un módulo de corte $\mu_{s3} = 3.32$GPa [16]. Con el objetivo de obtener los módulos de la matriz de hielo, utilizamos un modelo de percolación, tal como lo hacen Leclaire et al. [55], Carcione y Tinivella [14] y Santos et al. [86]. La teoría de percolación permite describir la transición de un sistema o material entre el estado continuo y el discreto, la cual está gobernada por una ley de potencias independiente del material o sistema [55]. En nuestro caso, los módulos elásticos de la matriz de hielo son funciones de la proporción de hielo y están dados por

$$\begin{aligned} k_{s3,m} &= \left[k_{s3,m}^{max} - k_{s3,m}^{0}\right]\left(\frac{\phi_3}{1-\phi_1}\right)^{3.8} + k_{s3,m}^{0}, \\ \mu_{s3,m} &= \left[\mu_{s3,m}^{max} - \mu_{s3,m}^{0}\right]\left(\frac{\phi_3}{1-\phi_1}\right)^{3.8} + \mu_{s3,m}^{0}, \end{aligned} \tag{5.16}$$

donde $k_{s3,m}^{max}$ y $\mu_{s3,m}^{max}$ son los módulos de volumen y de corte de la matriz de hielo cuando el espacio poral está completamente congelado y contiene inclusiones esféricas de aire, con una concentración ϕ_1. Siguiendo a estos autores, tomamos $k_{s3,m}^{0} = \mu_{s3,m}^{0} = 0$, y para obtener los módulos $k_{s3,m}^{max}$ y $\mu_{s3,m}^{max}$ usamos el modelo de Kuster y Toksöz [54] considerando para el aire un módulo de volumen $k_a = 1.5 \times 10^{-4}$GPa y módulo de corte nulo.

Para estimar la permeabilidad absoluta de la matriz de hielo, si tenemos en cuenta que según Leclaire et al. [55] un valor razonable de permeabilidad absoluta $\kappa_{3,0}$ para una matriz de hielo en una roca con *porosidad absoluta* $\phi_a = (1 - \phi_1) = 0.305$ es $\kappa_{3,0} = 5 \times 10^{-4}\text{m}^2$, y si asumimos que la relación de Kozeny-Carman [62] es válida para la matriz de hielo, podemos obtener la permeabilidad absoluta $\kappa_{3,0}$ para otros valores de porosidad

absoluta utilizando la relación

$$\kappa_{3,0}\frac{\phi_a^2}{(1-\phi_a)^3} = 5\times 10^{-4}\mathrm{m}^2\frac{(0.305)^2}{(1-0.305)^3}. \tag{5.17}$$

En relación con los parámetros de acoplamiento de masa y fricción viscosa asumimos, tal como hacen Carcione et al. [16], que $a_{13} = a_{31} = 1$, $r_{12} = r_{32} = 1/2$. Además, por simplicidad consideramos que no hay fricción entre la matriz rocosa y el hielo, es decir, $g_{13} = 0$.

Entonces, bajo estas hipótesis resolvemos la ecuación (5.14) para calcular los 3 posibles valores para el módulo del vector de onda compresional, y usamos las relaciones (5.15) para obtener las velocidades de fase y atenuaciones de las distintas ondas compresionales que se pueden propagar a través de la arenisca 1 parcialmente congelada. Calculamos estos parámetros para una frecuencia de 100Hz y para distintos valores de la *saturación de hielo*, la cual se define como el porcentaje del espacio poral ocupado por la matriz de hielo.

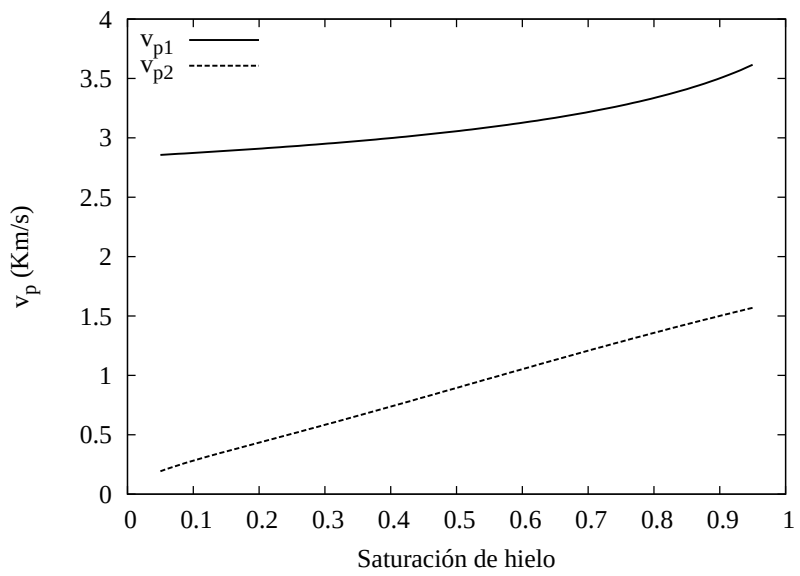

Figura 5.1: Velocidad de fase de la ondas compresionales tipo p_1 y p_2 en función de la saturación de hielo. La frecuencia considerada es de 100Hz.

La Figura 5.1 muestra las velocidades de fase de las ondas compresionales tipo p_1 y p_2 en función de la saturación de hielo, donde podemos ver que hay un crecimiento sostenido de las mismas con el aumento de la saturación de hielo. Esto puede esperarse

intuitivamente, pues a medida que la saturación de hielo aumenta es mayor la cantidad de agua que es reemplazada por una fase sólida, y entonces el agregado de roca, hielo y agua se vuelve más rígido. Además, es muy interesante notar que para pequeñas cantidades de hielo en los poros de la roca la velocidad de fase de la onda tipo p_2 es muy baja, pero a medida que la saturación de hielo aumenta también lo hace esta velocidad, tomando valores significativos (del orden de 1.5Km/s) para altos contenidos de hielo. Por último, la onda tipo p_3 presentó velocidades de fase muy pequeñas para todas las saturaciones de hielo, con valores por debajo de 0.02Km/s, y por esta razón no se incluyó esta curva en la figura.

Respecto de las atenuaciones que experimentan estas ondas, el factor de calidad de la onda tipo p_1 es muy alto para todo el rango de saturaciones de hielo, sugiriendo que la atenuación que sufre esta onda por fricción viscosa es despreciable en el caso de bajas frecuencias. En el otro extremo, la onda tipo p_3 se atenúa violentamente, con valores de Q_{p3} del orden de 0.5 para todo el rango de saturaciones. Por último, el comportamiento del factor de calidad para la onda tipo p_2 es dependiente de la saturación de hielo. En

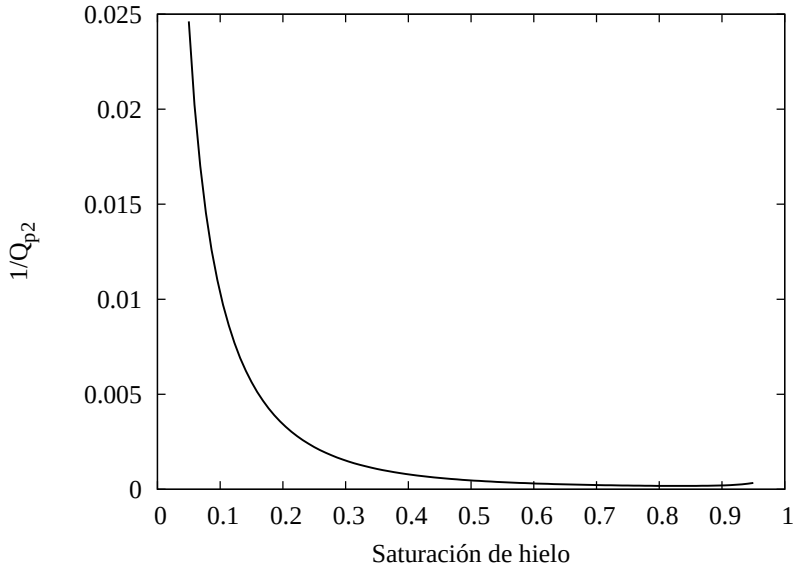

Figura 5.2: Inverso del factor de calidad de la onda compresional tipo p_2 en función de la saturación de hielo. La frecuencia considerada es de 100Hz.

este sentido, la Figura 5.2 muestra el factor de calidad de la onda compresional tipo p_2 en función de la saturación de hielo. Podemos observar que la atenuación por fricción

viscosa es importante para bajas saturaciones de hielo, con valores de Q_{p2} del orden de 40, mientras que a medida que la saturación de hielo aumenta el efecto de fricción viscosa se vuelve despreciable.

Para estudiar el comportamiento de estas ondas en función de la frecuencia, calculemos también las velocidades de fase y los factores de calidad de las distintas ondas compresionales para una saturación de hielo fija e igual a 0.70, y para distintas frecuencias. La Figura 5.3 muestra la velocidad de fase y el inverso del factor de calidad para

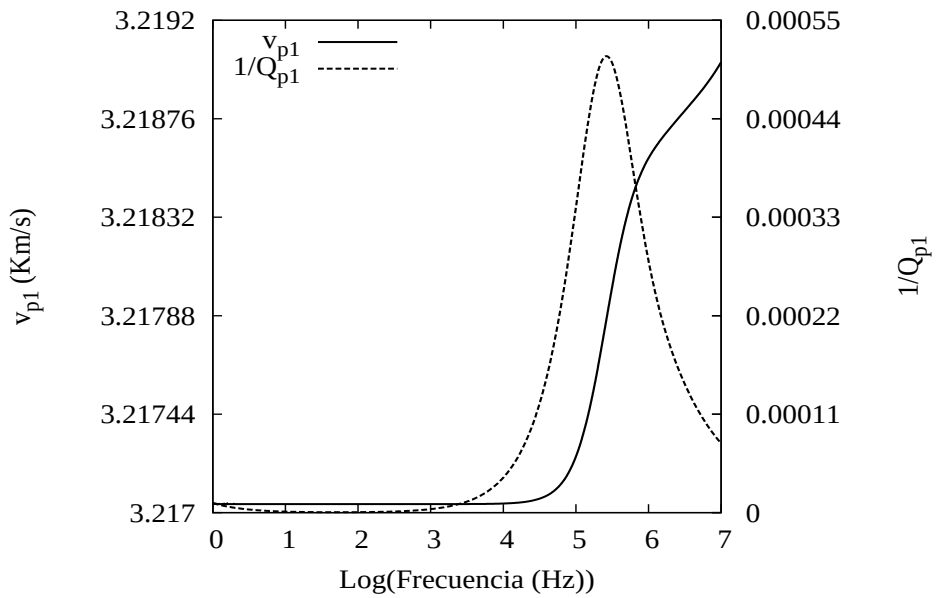

Figura 5.3: Velocidad de fase e inverso del factor de calidad de la onda compresional tipo p_1, en función del logaritmo de la frecuencia. La saturación de hielo es fija e igual a 0.70.

la onda compresional tipo p_1 en función del logaritmo de la frecuencia. En ella podemos observar una dispersión creciente de la velocidad de fase, aunque la magnitud de esta variación de la velocidad con la frecuencia es prácticamente despreciable. En correspondencia con esta dispersión despreciable, podemos observar que el factor de calidad de esta onda compresional posee valores por encima de 1500 para todo el rango de frecuencias, con un mínimo para frecuencias entre 10^5 y 10^6Hz.

La onda compresional tipo p_2 sufre una dispersión de velocidad apreciable en el rango de frecuencias analizado. Esto lo podemos verificar en la Figura 5.4, en la cual vemos que la velocidad de fase varía de aproximadamente 1.2Km/s para bajas frecuencias a aproximadamente 1.5Km/s para las mayores frecuencias consideradas. Respecto de la

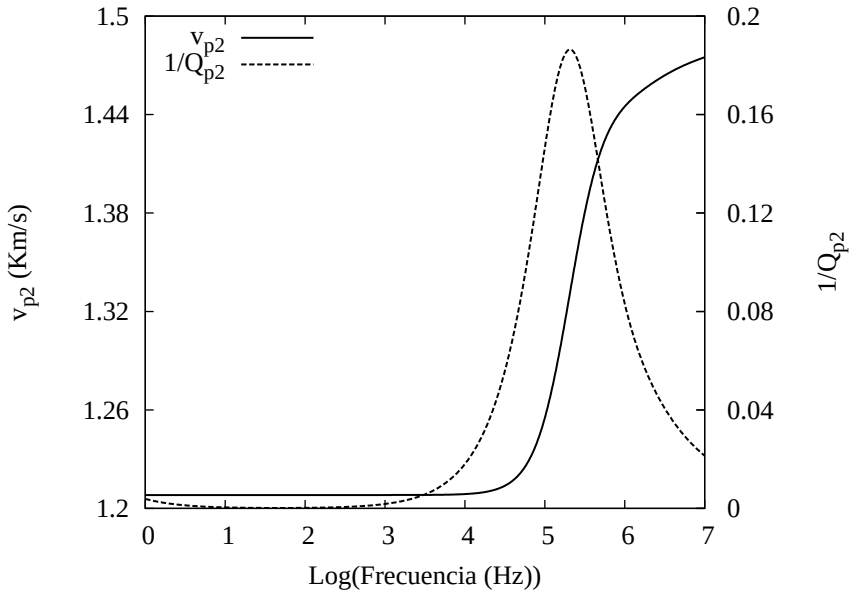

Figura 5.4: Velocidad de fase e inverso del factor de calidad de la onda compresional tipo p_2 en función del logaritmo de la frecuencia. La saturación de hielo es fija e igual a 0.70.

atenuación por fricción viscosa que sufre esta onda, podemos ver que es prácticamente despreciable para muy bajas frecuencias. Sin embargo, es muy importante para frecuencias entre 10^5 y 10^6Hz, con valores de Q_{p2} del orden de 5.

Por otro lado, la onda compresional tipo p_3 manifiesta un comportamiento muy distinto al que observamos en las ondas tipo p_1 y p_2. En este sentido, la Figura 5.5 muestra la velocidad de fase e inverso del factor de calidad de esta onda en función del logaritmo de la frecuencia. En ella vemos que la velocidad de fase es prácticamente nula para muy bajas frecuencias, y crece hasta tomar valores del orden de 0.23Km/s para las mayores frecuencias consideradas. Respecto de la atenuación por fricción viscosa, vemos que es muy importante para bajas frecuencias, con valores de Q_{p3} del orden de 0.5. Esta disipación de energía disminuye para frecuencias por encima de 10^4Hz, aproximadamente.

Comparando estos resultados con los comportamientos que hemos observado para las ondas compresionales que se propagan a través de una matriz sólida saturada (modelo clásico de Biot), las Figuras 5.3, 5.4 y 5.5 indicarían que las ondas tipo p_1 y p_2 se comportan como ondas de propagación en todo el rango de frecuencias, al menos para altas saturaciones de hielo. Por otra parte, la onda tipo p_3 sería una onda de propagación sólo para altas frecuencias, mientras que para bajas frecuencias sería un proceso de difusión

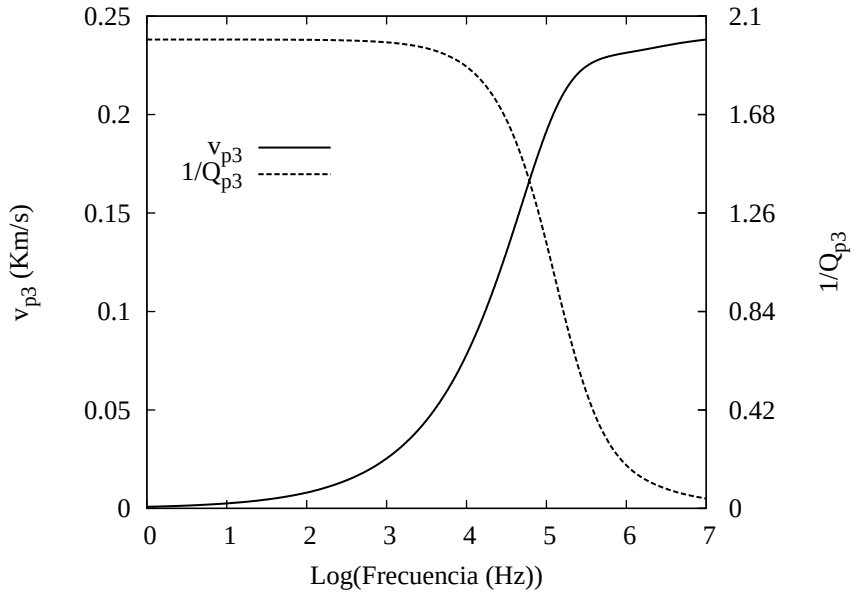

Figura 5.5: Velocidad de fase e inverso del factor de calidad de la onda compresional tipo p_3 en función de la frecuencia. La saturación de hielo es fija e igual a 0.70.

de las presiones de los fluidos porales.

Para tener una imagen más clara de la respuesta de las distintas fases que componen al medio debido a la propagación de una perturbación compresional a través del mismo, analicemos las relaciones entre los desplazamientos de las fases que ocupan el espacio poral (hielo y agua) y el desplazamiento de la matriz de roca. Con este objetivo, si consideramos la propagación de una onda tipo p_j $(j = 1, 2, 3)$, como los desplazamientos de las distintas fases son vectores paralelos, las expresiones (5.11) nos permiten obtener tales relaciones. En este sentido, definamos la proporcionalidad entre el desplazamiento relativo del agua y el desplazamiento de la matriz rocosa $(\gamma^B_{p_j})$, y la proporcionalidad entre el desplazamiento de la matriz de hielo y el de la matriz rocosa $(\gamma^C_{p_j})$, mediante

$$\gamma^B_{p_j} = \frac{B_{p_j}}{A_{p_j}}, \qquad \gamma^C_{p_j} = \frac{C_{p_j}}{A_{p_j}}. \tag{5.18}$$

Dado que el sistema lineal (5.12) es singular, para obtener estos parámetros reemplazamos en el mismo con el módulo del vector de onda correspondiente a la onda compresional p_j, dividimos las igualdades (5.12) por A_{p_j} y utilizamos dos de las tres ecuaciones lineales para despejar los valores de $\gamma^B_{p_j}$ y $\gamma^C_{p_j}$ buscados.

Para ilustrar el comportamiento de estas relaciones, las calculamos para la arenisca 1 parcialmente congelada, considerando una saturación de hielo fija e igual a 0.70 y distintas frecuencias. La Figura 5.6 muestra la proporcionalidad entre el desplazamiento

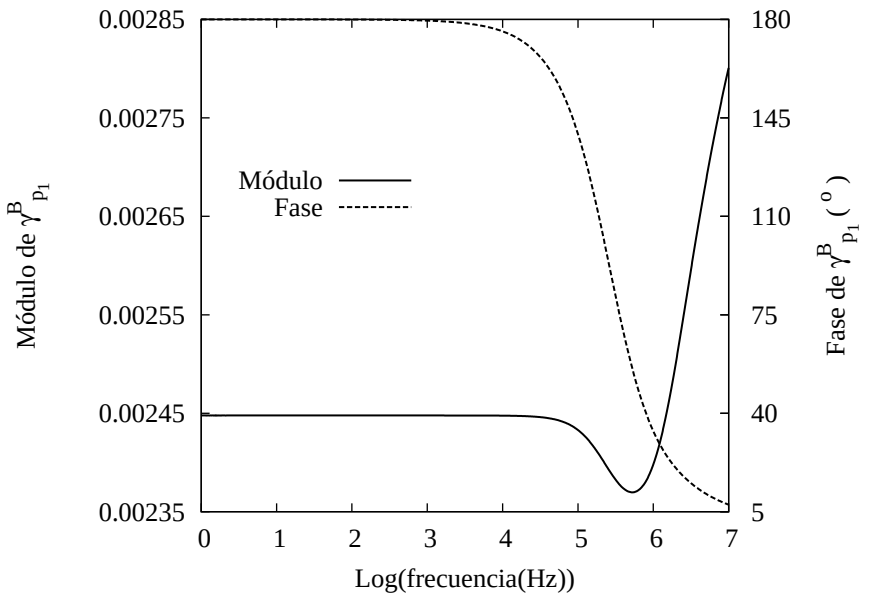

Figura 5.6: Proporcionalidad entre el desplazamiento relativo del fluido y el desplazamiento de la matriz de roca, para la onda tipo p_1 y en función del logaritmo de la frecuencia. La saturación de hielo es fija e igual a 0.70.

relativo del fluido y el desplazamiento de la matriz de roca, en función del logaritmo de la frecuencia y para el caso de la onda compresional tipo p_1. Observando el módulo de este parámetro, podemos ver que independientemente de la frecuencia, el desplazamiento relativo del fluido es prácticamente despreciable respecto del movimiento de la matriz de roca. Además, la fase de γ^B_{p1} nos muestra que estos desplazamientos se producen aproximadamente en contrafase para muy bajas frecuencias, y en fase para las mayores frecuencias consideradas.

Por otra parte, la Figura 5.7 muestra la proporcionalidad entre el desplazamiento de la matriz de hielo y el desplazamiento de la arenisca, también para la onda tipo p_1 y en función del logaritmo de la frecuencia. Observando el módulo de $\gamma^C_{p_1}$, podemos verificar que los desplazamientos de las dos matrices sólidas son prácticamente de igual magnitud. Además, la fase de este parámetro nos muestra que estos desplazamientos están prácticamente en fase para todo el rango de frecuencias.

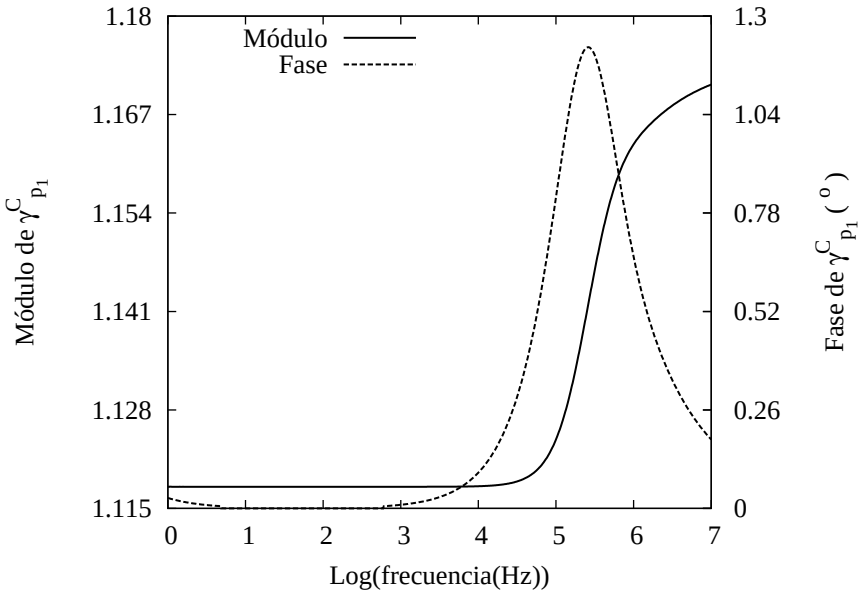

Figura 5.7: Proporcionalidad entre el desplazamiento de la matriz de hielo y el desplazamiento de la arenisca, para la onda tipo p_1 y en función del logaritmo de la frecuencia. La saturación de hielo es fija e igual a 0.70.

Analicemos ahora cómo reaccionan las distintas fases en el caso de la propagación de una onda compresional tipo p_2. En este sentido, observando la Figura 5.8 podemos ver que la magnitud del desplazamiento relativo del fluido respecto del desplazamiento de la arenisca es significativa, con valores para $|\gamma^B_{p2}|$ por encima de 0.13 para todo el rango de frecuencias. Además, estos movimientos se producen aproximadamente en fase para bajas frecuencias y en contrafase para muy altas frecuencias.

Con respecto al desplazamiento que experimenta la matriz de hielo, observando la Figura 5.9 podemos ver que el mismo es muy importante en relación con el desplazamiento de la arenisca. De hecho, independientemente de la frecuencia, la magnitud de este desplazamiento es más de seis veces la magnitud del desplazamiento que sufre la matriz de roca. Además, estos movimientos se producen prácticamente en contrafase en todo el rango de frecuencias.

Por último, analicemos los desplazamientos de las distintas fases en el caso de la propagación de una onda compresional tipo p_3. Con este objetivo, la Figura 5.10 muestra la proporcionalidad entre el desplazamiento relativo del fluido y el desplazamiento de la matriz de roca en función del logaritmo de la frecuencia. Podemos observar en

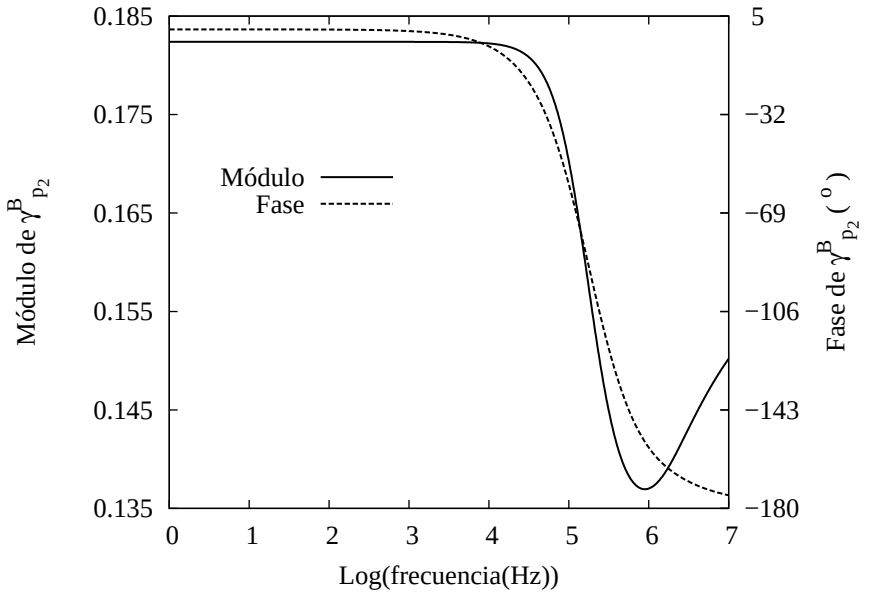

Figura 5.8: Proporcionalidad entre el desplazamiento relativo del fluido y el desplazamiento de la matriz de roca, para la onda tipo p_2 y en función del logaritmo de la frecuencia. La saturación de hielo es fija e igual a 0.70.

esta figura que, independientemente de la frecuencia, la magnitud del desplazamiento relativo del fluido es muy importante, con valores de $|\gamma^B_{p3}|$ por encima de 3. Además, observando la fase de este parámetro, podemos concluir que estos desplazamientos ocurren aproximadamente en contrafase en todo el rango de frecuencias.

Por otra parte, en este caso la magnitud del desplazamiento de la matriz de hielo respecto del desplazamiento de la arenisca también es muy importante, tal como lo muestra la Figura 5.11. De hecho, en este gráfico podemos observar que la relación entre las magnitudes de los desplazamientos está por encima de 6.5 para todas las frecuencias. Además, observando la fase de la proporcionalidad entre los desplazamientos podemos ver que estos movimientos ocurren prácticamente en fase, independientemente de la frecuencia.

Este análisis que hemos realizado nos permite comprender la respuesta de las distintas fases debido a la propagación de ondas compresionales a través de medios porosos compuestos saturados. Estudiando los movimientos de las fases y las atenuaciones que sufren las ondas en función de la frecuencia, observamos que muchas características se

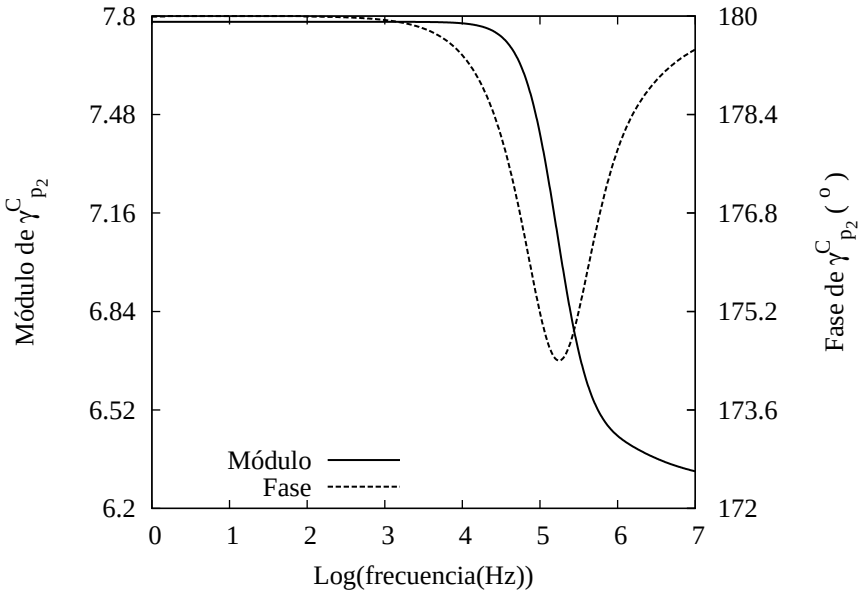

Figura 5.9: Proporcionalidad entre el desplazamiento de la matriz de hielo y el desplazamiento de la arenisca, para la onda tipo p_2 y en función del logaritmo de la frecuencia. La saturación de hielo es fija e igual a 0.70.

corresponden con las que encontramos en el Capítulo 2 de esta Tesis para ondas compresionales que viajan a través de una sólido poroso saturado. En este sentido, en los medios compuestos que analizamos en este capítulo la onda tipo p_1 produce un desplazamiento único del medio, y sufre una atenuación por fricción viscosa despreciable en todo el rango de frecuencias. De este modo, esta onda comparte muchas características con la onda compresional clásica de la teoría de Biot. Por otro lado, el comportamiento de la onda tipo p_3 se asemeja al que observamos para la onda lenta de la teoría de Biot. En efecto, esta onda produce un desplazamiento en fase de las matrices sólidas, y un movimiento significativo y en contrafase (con respecto a las matrices sólidas) de la fase fluida. Además, esta onda experimenta una atenuación por fricción viscosa muy pronunciada para bajas frecuencias, y esta pérdida disminuye sólo para muy altas frecuencias. Por último, la onda tipo p_2 en medios compuestos es una onda compresional adicional, que surge en la teoría de Leclaire et al. [55] (y luego es corroborada por Santos et al. [86]) debido a la presencia de una segunda matriz sólida. Esta perturbación produce movimientos en contrafase entre ambas matrices sólidas, y un desplazamiento relativo significativo del fluido, en fase con el movimiento de la matriz de roca para bajas frecuencias y en

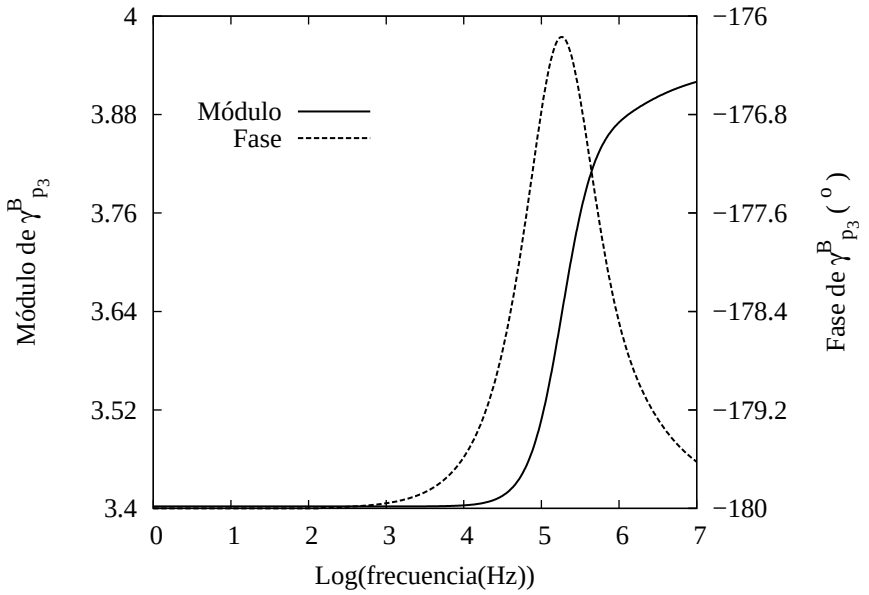

Figura 5.10: Proporcionalidad entre el desplazamiento relativo del fluido y el desplazamiento de la matriz de roca, para la onda tipo p_3 y en función del logaritmo de la frecuencia. La saturación de hielo es fija e igual a 0.70.

contrafase para altas frecuencias. Además, esta onda experimenta una atenuación por fricción viscosa despreciable para muy bajas frecuencias, y posee un pico de atenuación para frecuencias entre 10^5 y 10^6 Hz, con un valor de Q_{p2} del orden de 5.5.

5.3.2 Ondas de corte

Con el objetivo de estudiar las principales características de las ondas de corte que se pueden propagar a través de medios porosos compuestos saturados, efectuemos un análisis de onda plana similar al que realizamos previamente pero considerando potenciales vectoriales para representar los desplazamientos de las partículas del medio. En este sentido, si $\bar{k}_s = (n_s, l_s, 0)$ es el vector de onda complejo y si $\breve{e}_1$, $\breve{e}_2$, $\breve{e}_3$ son los vectores unitarios en las direcciones de los ejes coordenados x, y, z, entonces los desplazamientos asociados con las ondas de corte se pueden representar como

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= -\nabla \times \psi^{(1)} = -\nabla \times \left(A_s e^{-i\bar{k}_s \cdot \bar{r}} \ \breve{e}_3 \right), \\ u^{(2)} &= -\nabla \times \psi^{(2)} = -\nabla \times \left(B_s e^{-i\bar{k}_s \cdot \bar{r}} \ \breve{e}_3 \right), \\ u^{(3)} &= -\nabla \times \psi^{(3)} = -\nabla \times \left(C_s e^{-i\bar{k}_s \cdot \bar{r}} \ \breve{e}_3 \right). \end{aligned} \tag{5.19}$$

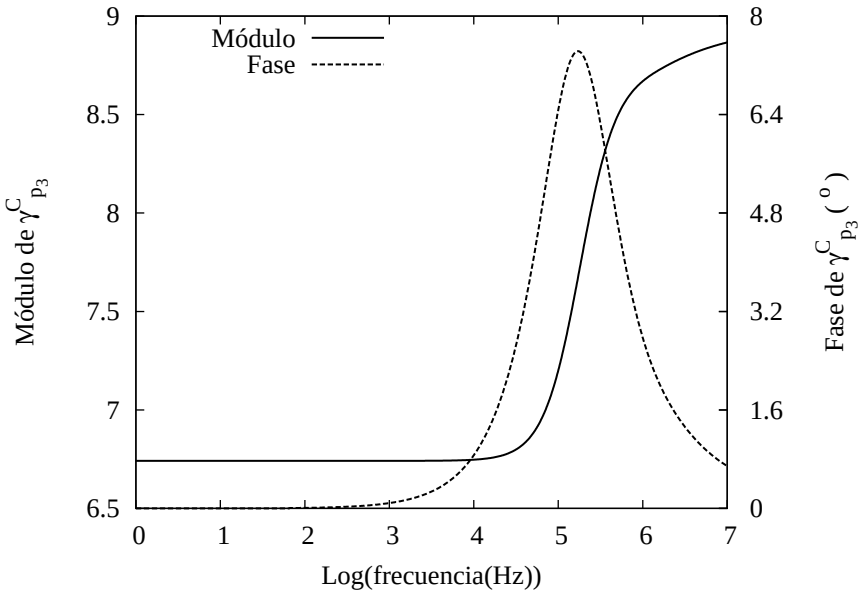

Figura 5.11: Proporcionalidad entre el desplazamiento de la matriz de hielo y el desplazamiento de la arenisca, para la onda tipo p_3 y en función del logaritmo de la frecuencia. La saturación de hielo es fija e igual a 0.70.

Luego, repitiendo pasos similares a los que realizamos en el caso de ondas compresionales, encontramos que las amplitudes de los potenciales vectoriales deben satisfacer el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\mathcal{M}^s \cdot c^s = \bar{0}, \tag{5.20}$$

con $\mathcal{M}^s \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ una matriz simétrica, dada por

$$\begin{aligned}
(\mathcal{M}^s)_{11} &= -p_{11} i\omega^2 - f_{11}\omega + \mu_1 i k_s^2, \\
(\mathcal{M}^s)_{12} &= -p_{12} i\omega^2 + f_{12}\omega, \\
(\mathcal{M}^s)_{13} &= -p_{13} i\omega^2 + f_{11}\omega + \frac{1}{2}\mu_{13} i k_s^2, \\
(\mathcal{M}^s)_{22} &= -p_{22} i\omega^2 - f_{22}\omega, \\
(\mathcal{M}^s)_{23} &= -p_{23} i\omega^2 - f_{12}\omega, \\
(\mathcal{M}^s)_{33} &= -p_{33} i\omega^2 - f_{11}\omega + \mu_3 i k_s^2,
\end{aligned} \tag{5.21}$$

donde k_s es el módulo del vector de onda y $c^s = (A_s, B_s, C_s)^T \in \mathbb{C}^{3\times 1}$. Para obtener soluciones no triviales de este sistema lineal, debemos pedir que el determinante de la

matriz asociada sea nulo. Al exigir esto, encontramos que los posibles valores para k_s deben satisfacer la ecuación

$$P_2(z) = \det(\mathcal{M}^s) = 0, \tag{5.22}$$

donde $P_2(z)$ es un polinomio cuadrático en la variable $z = k_s^2 = n_s^2 + l_s^2$. De esta ecuación resultan dos posibles valores físicamente aceptables (con partes imaginarias negativas) para k_s, asociados con *dos* ondas de corte que denominaremos ondas tipo s_1 y s_2. Vemos de este análisis que la presencia de dos matrices sólidas débilmente acopladas produce la existencia de una onda de corte adicional.

Para ilustrar el comportamiento de estas ondas de corte, analicemos las velocidades de fase y atenuaciones que experimentan al viajar a través de la arenisca 1 parcialmente congelada. Con este objetivo, considerando los mismos parámetros físicos que empleamos para estudiar la propagación de ondas compresionales, y utilizando las relaciones (5.15) pero considerando k_s en lugar de k_p, obtenemos las velocidades de fase y atenuaciones de las ondas de corte. En este sentido, la Figura 5.12 muestra las velocidades de fase de las dos ondas de corte (s_1 y s_2), en función de la saturación de hielo y para una frecuencia de 100Hz. En ella podemos ver que en ambos casos se produce un aumento de la velocidad con la saturación de hielo, aunque este aumento es más notable en el caso de la onda s_2. De hecho, la velocidad de fase de esta onda lenta es prácticamente nula para bajas saturaciones de hielo, y aumenta con el contenido de hielo a valores significativos, de hasta 0.8Km/s para saturaciones de hielo cercanas a 0.9. Por otra parte, para la frecuencia considerada e independientemente de la saturación de hielo, las pérdidas por fricción viscosa de estas ondas son despreciables, por lo cual no se incluyen las curvas respectivas.

Con el objetivo de estudiar el comportamiento de las ondas de corte en función de la frecuencia, calculemos también las velocidades de fase y atenuaciones para una saturación de hielo fija e igual a 0.70 y para distintas frecuencias. En este sentido, la Figura 5.13 muestra la velocidad de fase y el inverso del factor de calidad de la onda tipo s_1, en función del logaritmo de la frecuencia. Podemos apreciar en ella que la velocidad de fase presenta un aumento muy leve con la frecuencia en el rango considerado. Respecto de la atenuación por fricción viscosa, vemos que es significativa sólo para frecuencias entre 10^5 y 10^6Hz, con un factor de calidad del orden de 75. Para el resto de las frecuencias, esta pérdida es despreciable.

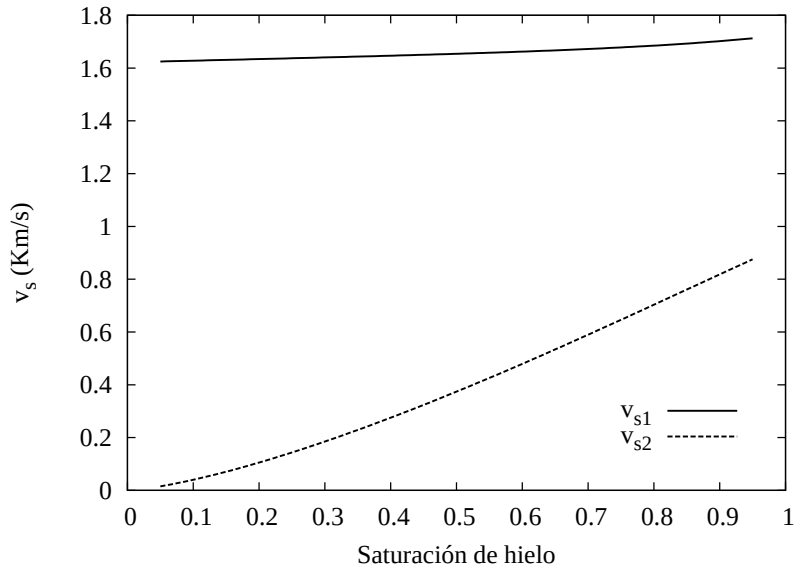

Figura 5.12: Velocidades de fase de la ondas de corte en función de la saturación de hielo. La frecuencia considerada es de 100Hz.

Por otra parte, la Figura 5.14 muestra que el comportamiento de la onda s_2 es cualitativamente similar al de la onda s_1: en el rango de frecuencias considerado, la onda s_2 sufre una dispersión de velocidad muy suave y creciente, y la pérdida por fricción viscosa es significativa principalmente para frecuencias entre 10^5 y 10^6 Hz. Cuantitativamente, la diferencia entre los comportamientos radica, por un lado, en que la velocidad de fase de la onda s_2 es menor que la de la onda s_1. Por otro lado, la magnitud de la atenuación por fricción viscosa para el pico de atenuación es más importante en el caso de la onda s_2, con valores del factor de calidad del orden de 9.

Para analizar la respuesta del medio a la propagación de estas perturbaciones rotacionales, calculemos también en este caso la proporcionalidad entre los desplazamientos de las fases que se encuentran en el espacio poral y el desplazamiento de la arenisca. Con este objetivo, si consideramos la propagación de una onda de corte tipo s_j $(j = 1, 2)$, como los desplazamiento de las tres fases son vectores paralelos, las igualdades (5.19) nos permiten calcular tales relaciones. En tal sentido, definimos la proporcionalidad entre el desplazamiento relativo del fluido y el de la matriz de roca (γ_{sj}^B), y la proporcionalidad

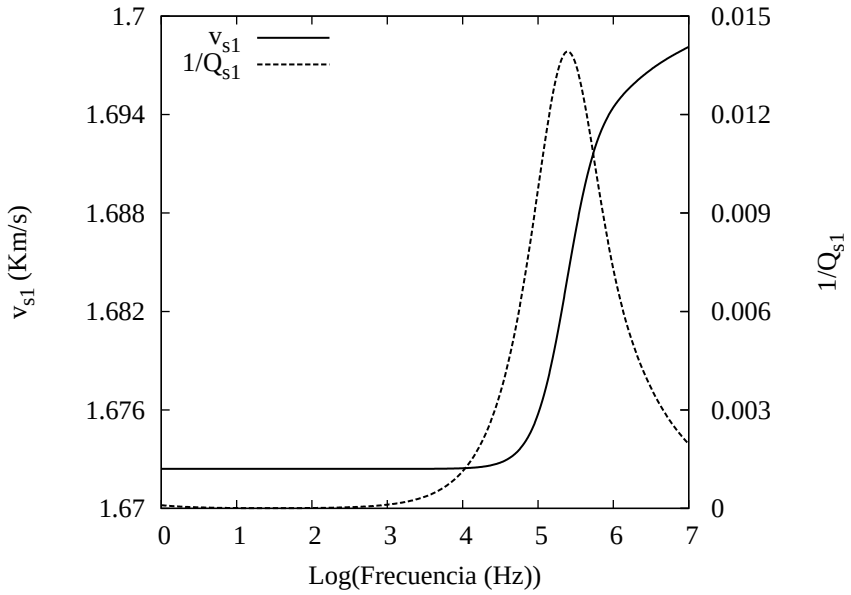

Figura 5.13: Velocidad de fase e inverso del factor de calidad de la onda tipo s_1, en función del logaritmo de la frecuencia. La saturación de hielo es fija e igual a 0.70.

entre el desplazamiento de la matriz de hielo y el de la matriz de roca (γ^C_{sj}), mediante

$$\gamma^B_{s_j} = \frac{B_{s_j}}{A_{s_j}}, \qquad \gamma^C_{s_j} = \frac{C_{s_j}}{A_{s_j}}. \tag{5.23}$$

Como en el caso de las ondas compresionales, teniendo en cuenta que la matriz del sistema lineal (5.20) es singular, para obtener estos parámetros reemplazamos en tal sistema con el módulo del vector de onda correspondiente, dividimos las igualdades (5.20) por A_{s_j} y utilizamos dos de las tres ecuaciones lineales para despejar los valores de $\gamma^B_{s_j}$ y $\gamma^C_{s_j}$.

Para ilustrar el comportamiento de estos parámetros, los calculamos para la arenisca 1 parcialmente congelada, considerando una saturación de hielo fija e igual a 0.70 y para distintas frecuencias. En este sentido, la Figura 5.15 muestra la proporcionalidad entre el desplazamiento relativo del fluido y el desplazamiento de la matriz de roca, para la onda tipo s_1 y en función del logaritmo de la frecuencia. En ella podemos apreciar que si bien la magnitud de esta relación aumenta para las mayores frecuencias, en general es despreciable. Por otra parte, observando la fase de este parámetro, podemos concluir que estos desplazamientos se producen aproximadamente en fase para bajas frecuencias y en contrafase para las mayores frecuencias consideradas.

En relación con el desplazamiento de la matriz de hielo, el mismo es significativo

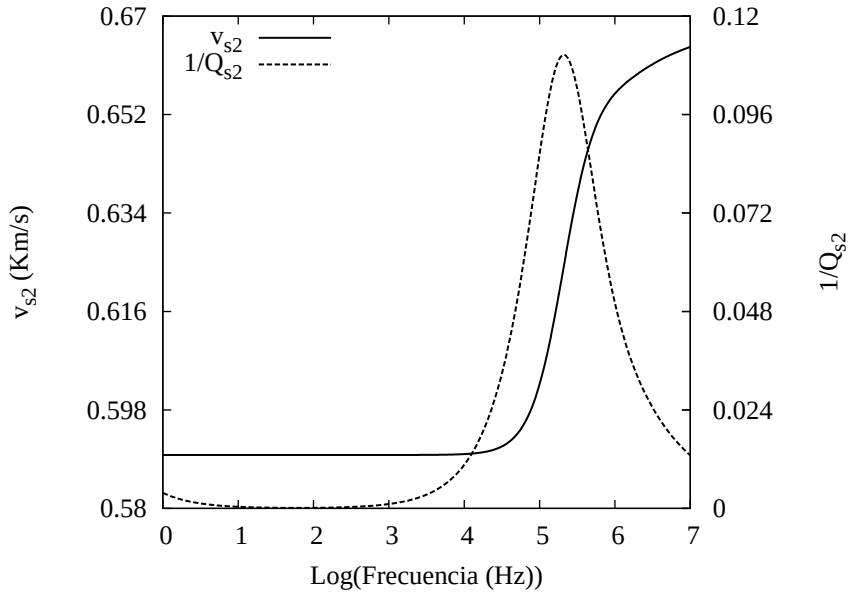

Figura 5.14: Velocidad de fase e inverso del factor de calidad de la onda tipo s_2, en función del logaritmo de la frecuencia. La saturación de hielo es fija e igual a 0.70.

respecto del desplazamiento de la roca. De hecho, en la Figura 5.16 podemos ver que la magnitud de este movimiento disminuye con la frecuencia de aproximadamente 0.65 a 0.45 veces la magnitud del desplazamiento de la arenisca. Además, independientemente de la frecuencia, estos desplazamientos se producen prácticamente en fase.

Cuando una onda de corte tipo s_2 se propaga a través del medio compuesto saturado, la magnitud del desplazamiento relativo del fluido que genera esta perturbación puede ser muy importante. De hecho, en el caso de la arenisca parcialmente congelada que estamos analizando, la magnitud de este desplazamiento es similar a la magnitud del desplazamiento que experimenta la matriz de roca, tal como podemos observar en la Figura 5.17. Esta figura muestra además, que estos desplazamientos se producen aproximadamente en fase para bajas frecuencias y en contrafase para las mayores frecuencias consideradas.

Por último, en la Figura 5.18 podemos apreciar que la propagación de la onda de corte lenta a través del medio produce un desplazamiento de la matriz de hielo con una magnitud varias veces mayor que la del desplazamiento de la arenisca, independientemente de la frecuencia. Además, observando la fase de γ_{s2}^{C}, podemos concluir que estos desplazamientos se producen prácticamente en contrafase en todo el rango de frecuencias.

Para concluir este análisis, es interesante resaltar que estudiando los movimientos que

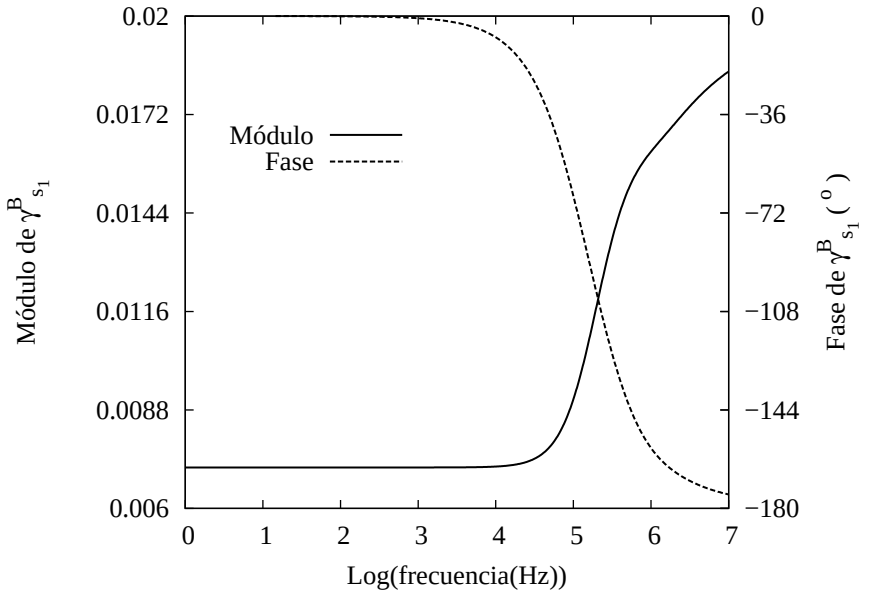

Figura 5.15: Proporcionalidad entre el desplazamiento relativo del fluido y el desplazamiento de la matriz de roca, para la onda tipo s_1 y en función del logaritmo de la frecuencia. La saturación de hielo es fija e igual a 0.70.

experimentan las distintas fases y las atenuaciones que sufren las ondas de corte en función de la frecuencia, podemos observar que hay cierta similitud entre el comportamiento de la onda de corte tipo s_1 y la onda de corte clásica de la teoría de Biot. En efecto, ambas ondas sufren pérdidas por fricción viscosa de leve a moderada únicamente para la región del pico de atenuación, y producen un movimiento relativo del fluido con una magnitud poco importante, que además aumenta con la frecuencia. En el caso del medio compuesto, esta onda produce un movimiento en fase de las dos matrices sólidas. Por otra parte, la onda de corte lenta que se puede propagar en medios porosos compuestos saturados es una perturbación adicional, que surge en la teoría de Leclaire et al [55] (y luego es corroborada por Santos et al. [86]) debido a la presencia de una segunda matriz sólida. Esta onda produce movimientos muy importantes y en contrafase de las matrices sólidas, y un desplazamiento relativo significativo del fluido, en fase con el movimiento de la matriz de roca para bajas frecuencias y en contrafase para altas frecuencias. Además, experimenta una atenuación por fricción viscosa despreciable para muy bajas frecuencias, y posee un pico de atenuación para frecuencias entre 10^5 y 10^6 Hz, con un valor de Q_{s2} del orden de 8. Es interesante remarcar que cualitativamente las propiedades que manifiesta

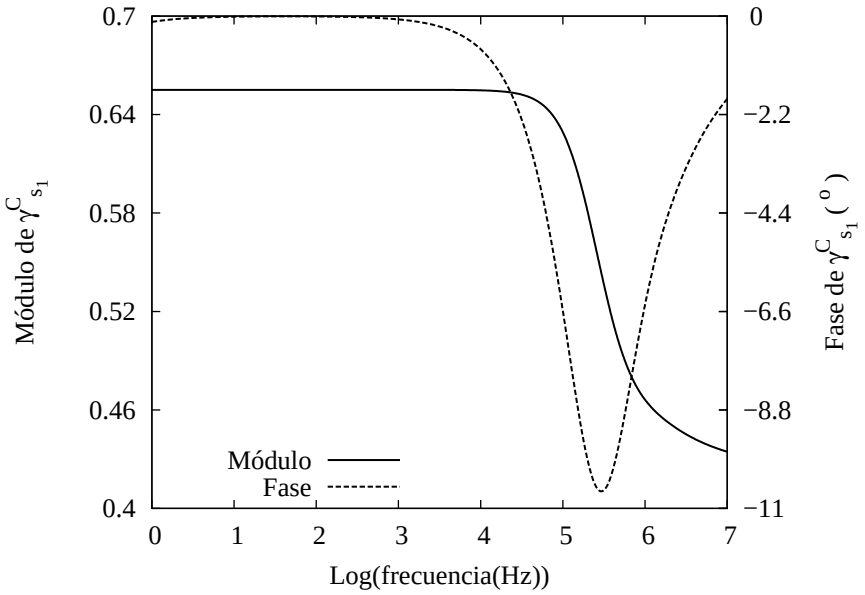

Figura 5.16: Proporcionalidad entre el desplazamiento de la matriz de hielo y el desplazamiento de la matriz de roca, para la onda tipo s_1 y en función del logaritmo de la frecuencia. La saturación de hielo es fija e igual a 0.70.

esta onda de corte adicional presentan similitudes con las que mostró la onda compresional adicional tipo p_2 del modelo de Biot para medios porosos compuestos.

5.4 Reflexión y transmisión de ondas en una interfase plana en medios compuestos

En la sección anterior hemos podido verificar que la presencia de dos matrices sólidas débilmente acopladas y saturadas por un fluido permite la propagación de tres ondas compresionales y dos ondas de corte a través del medio. Las tres ondas lentas que surgen en estas teorías pueden tener roles importantes en las conversiones de energía que ocurren cuando una onda sísmica interactúa con heterogeneidades del medio, y entonces resulta de gran interés analizar estos efectos en el caso de la propagación de ondas clásicas. Con este objetivo, y como una primera aproximación a este problema, en esta sección analizaremos las conversiones de energía que ocurren cuando una onda plana clásica incide sobre una discontinuidad plana que separa dos semiespacios porosos compuestos saturados. Si bien los desarrollos y ejemplos que presentamos aquí estudian el caso de

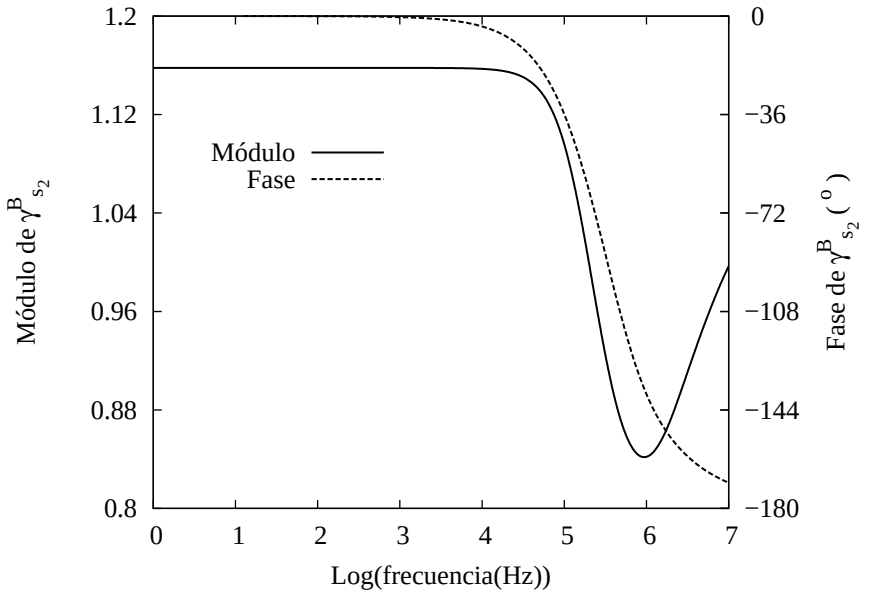

Figura 5.17: Proporcionalidad entre el desplazamiento relativo del fluido y el desplazamiento de la matriz de roca, para la onda tipo s_2 y en función del logaritmo de la frecuencia. La saturación de hielo es fija e igual a 0.70.

una onda compresional tipo p_1 que incide sobre la heterogeneidad, estas mismas ideas se pueden extender de manera directa al problema de la incidencia de cualquiera de las cuatro ondas restantes que se pueden propagar en este tipo de medios.

Para plantear este problema, consideremos una interfase plana infinitamente grande Γ, definida por la ecuación $y = 0$. Esta interfase separa dos semiespacios porosos compuestos saturados denominados Ω_u y Ω_d, donde Ω_d $(y < 0)$ se ubica por debajo de Ω_u $(y > 0)$. Supongamos que una onda plana compresional p_1 de frecuencia ω viaja en el plano (x, y), de modo tal que incide sobre Γ desde Ω_u con un ángulo de incidencia θ_{i,p_1}. La interacción de esta perturbación con la heterogeneidad generará tres ondas compresionales y dos ondas de corte en los dos semiespacios Ω_u y Ω_d.

Representemos a todas las ondas involucradas usando potenciales. En el caso de la onda incidente p_1 ,

$$\begin{aligned} \varphi_i^1 &= A_{i,p_1} e^{-i\bar{k}_{i,p_1}\cdot\bar{r}}, \\ \varphi_i^2 &= B_{i,p_1} e^{-i\bar{k}_{i,p_1}\cdot\bar{r}}, \\ \varphi_i^3 &= C_{i,p_1} e^{-i\bar{k}_{i,p_1}\cdot\bar{r}} \end{aligned} \tag{5.24}$$

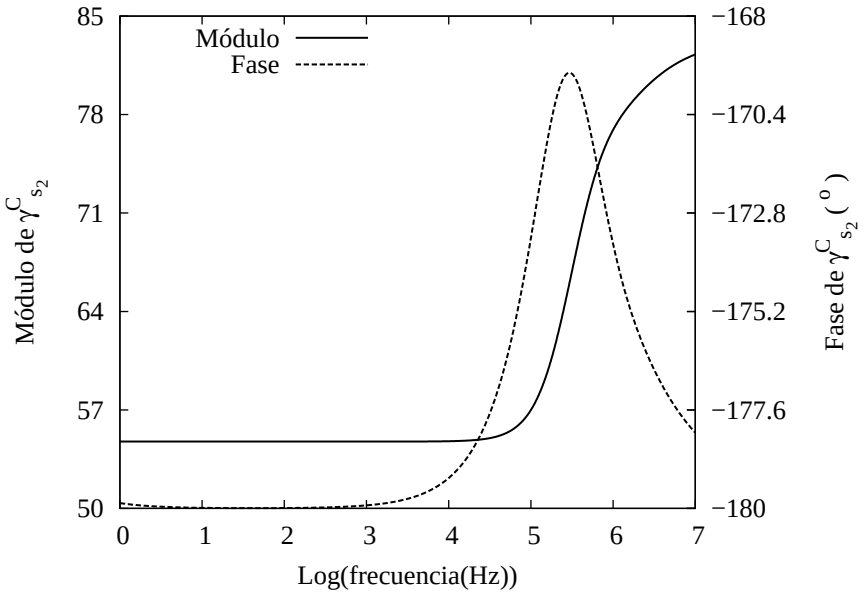

Figura 5.18: Proporcionalidad entre el desplazamiento de la matriz de hielo y el desplazamiento de la matriz de roca, para la onda tipo s_2 y en función del logaritmo de la frecuencia. La saturación de hielo es fija e igual a 0.70.

son los potenciales escalares para el sólido 1, el fluido y el sólido 3, respectivamente.

También, sean φ_q^j y ψ_q^j los potenciales compresionales (escalares) y de corte (vectoriales) para los sólidos 1 y 3 ($j = 1$ y $j = 3$) y para el desplazamiento del fluido ($j = 2$), con $q = r$ para las ondas reflejadas y $q = t$ para las transmitidas. Tales potenciales están dados por las fórmulas

$$\begin{aligned}
\varphi_q^1 &= A_{q,p_1} e^{-i\bar{k}_{q,p_1}\cdot\bar{r}} + A_{q,p_2} e^{-i\bar{k}_{q,p_2}\cdot\bar{r}} + A_{q,p_3} e^{-i\bar{k}_{q,p_3}\cdot\bar{r}}, \\
\psi_q^1 &= [A_{q,s_1} e^{-i\bar{k}_{q,s_1}\cdot\bar{r}} + A_{q,s_2} e^{-i\bar{k}_{q,s_2}\cdot\bar{r}}]\ \breve{e}_3, \\
\varphi_q^2 &= B_{q,p_1} e^{-i\bar{k}_{q,p_1}\cdot\bar{r}} + B_{q,p_2} e^{-i\bar{k}_{q,p_2}\cdot\bar{r}} + B_{q,p_3} e^{-i\bar{k}_{q,p_3}\cdot\bar{r}}, \\
\psi_q^2 &= [B_{q,s_1} e^{-i\bar{k}_{q,s_1}\cdot\bar{r}} + B_{q,s_2} e^{-i\bar{k}_{q,s_2}\cdot\bar{r}}]\ \breve{e}_3, \\
\varphi_q^3 &= C_{q,p_1} e^{-i\bar{k}_{q,p_1}\cdot\bar{r}} + C_{q,p_2} e^{-i\bar{k}_{q,p_2}\cdot\bar{r}} + C_{q,p_3} e^{-i\bar{k}_{q,p_3}\cdot\bar{r}}, \\
\psi_q^3 &= [C_{q,s_1} e^{-i\bar{k}_{q,s_1}\cdot\bar{r}} + C_{q,s_2} e^{-i\bar{k}_{q,s_2}\cdot\bar{x}}]\ \breve{e}_3.
\end{aligned} \tag{5.25}$$

En las ecuaciones (5.24) y (5.25),

$$\bar{k}_{q,j} = (n_{q,j}, l_{q,j}) = k_{q,j}(\sin\theta_{q,j}, \cos\theta_{q,j}), \qquad q = i, r, t, \quad j = p_1, p_2, p_3, s_1, s_2,$$

son los vectores de onda complejos para cada tipo de onda, con $k_{q,j}$ satisfaciendo ecuaciones de la forma (5.14) o (5.22) en Ω_u para $q = i, r$ y en Ω_d para $q = t$. Además, $\theta_{q,j}$ denota el ángulo de incidencia, reflexión o transmisión para la onda correspondiente.

Utilizando el principio de superposición, los desplazamientos en las tres fases en Ω_u y Ω_d, denotados $u^{(m,u)}, u^{(m,d)}$, están dados por

$$\begin{aligned} u^{(m,u)} &= (u_x^{(m,u)}, u_y^{(m,u)}) = \nabla\varphi_i^m + \nabla\varphi_r^m - \nabla\times\psi_r^m \\ &= u_{(i,p_1)}^{(m)} + u_{(r,p_1)}^{(m)} + u_{(r,p_2)}^{(m)} + u_{(r,p_3)}^{(m)} + u_{(r,s_1)}^{(m)} + u_{(r,s_2)}^{(m)}, \\ u^{(m,d)} &= (u_x^{(m,d)}, u_y^{(m,d)}) = \nabla\varphi_t^m - \nabla\times\psi_t^m \\ &= u_{(t,p_1)}^{(m)} + u_{(t,p_2)}^{(m)} + u_{(t,p_3)}^{(m)} + u_{(t,s_1)}^{(m)} + u_{(t,s_2)}^{(m)}, \quad m = 1,2,3. \end{aligned} \tag{5.26}$$

En estas expresiones, $u_{(q,j)}^{(m,u)}, u_{(q,j)}^{(m,d)}$ $(q = i, r, t,\ j = p_1, p_2, p_3, s_1, s_2)$ denotan las partes de los desplazamientos ($u^{(m,u)}$ y $u^{(m,d)}$) asociadas con la onda tipo j incidente, reflejada o transmitida.

Las condiciones de borde naturales en la interfase Γ (es decir, para $y = 0$), están determinadas por la continuidad de los desplazamientos y de las fuerzas generalizadas, como una extensión de las propuestas por Duta y Odé [31]:

$$\begin{array}{llllll} a) & u_x^{(1,u)} & = u_x^{(1,d)}, & b) & u_y^{(1,u)} & = u_y^{(1,d)}, \\ c) & u_x^{(3,u)} & = u_x^{(3,d)}, & d) & u_y^{(3,u)} & = u_y^{(3,d)}, \\ e) & u_y^{(2,u)} & = u_y^{(2,d)}, & f) & p_f^{(u)} & = p_f^{(d)}, \\ g) & \sigma_{21}^{(1,u)} & = \sigma_{21}^{(1,d)}, & h) & \sigma_{22}^{(1,u)} & = \sigma_{22}^{(1,d)}, \\ i) & \sigma_{21}^{(3,u)} & = \sigma_{21}^{(3,d)}, & j) & \sigma_{22}^{(3,u)} & = \sigma_{22}^{(3,d)}, \end{array} \tag{5.27}$$

donde, de aquí en adelante, los supraíndices (u) y (d) denotan los valores de cualquier variable en Ω_u y Ω_d, respectivamente.

Los coeficientes de reflexión y transmisión de amplitudes R_j y T_j, $j = p_1, p_2, p_3, s_1, s_2$, pueden definirse como la relación entre el módulo del desplazamiento del sólido 1 correspondiente a la onda tipo j (reflejada o transmitida) y el de la onda incidente. Es decir,

$$\begin{aligned} R_j &= A_{r,j}k_{r,j}/A_{i,p_1}k_{i,p_1}, \\ T_j &= A_{t,j}k_{t,j}/A_{i,p_1}k_{i,p_1}. \end{aligned} \tag{5.28}$$

Como la amplitud A_{i,p_1} es conocida, para calcular los coeficientes de reflexión y transmisión tenemos que determinar las amplitudes $A_{r,j}$, $A_{t,j}$. Con este objetivo, primero

notemos que cada terna $(u^{(1)}_{(q,j)}, u^{(2)}_{(q,j)}, u^{(3)}_{(q,j)})$ en la ecuación (5.26) debe satisfacer individualmente la ecuación (5.12) o (5.20). Teniendo en cuenta además que las matrices $\mathcal{M}^p$ y $\mathcal{M}^s$ son singulares, para cada tipo de onda las amplitudes de los potenciales asociados con los desplazamientos del fluido o del sólido 3 pueden expresarse en función de la amplitud del potencial correspondiente al desplazamiento del sólido 1, a través de los parámetros

$$\begin{aligned} \gamma_i^B &= \frac{B_{i,p_1}}{A_{i,p_1}}, \qquad \gamma_i^C = \frac{C_{i,p_1}}{A_{i,p_1}}, \\ \gamma_{q,j}^B &= \frac{B_{q,j}}{A_{q,j}}, \qquad \gamma_{q,j}^C = \frac{C_{q,j}}{A_{q,j}}, \quad q = r, t, \quad j = p_1, p_2, p_3, s_1, s_2. \end{aligned} \tag{5.29}$$

Estos coeficientes se pueden despejar fácilmente de los sistemas de ecuaciones (5.12) y (5.20), tal como vimos previamente en este capítulo. Luego, utilizando las condiciones de borde (5.27) y las relaciones (5.29), podemos determinar las amplitudes $A_{q,j}$ de los potenciales.

En tal sentido, de las igualdades (5.26) y (5.27)-(a) podemos deducir que

$$n_{i,p_1} = n_{r,p_1} = n_{r,p_2} = n_{r,p_3} = n_{r,s_1} = n_{r,s_2} = n_{t,p_1} = n_{t,p_2} = n_{t,p_3} = n_{t,s_1} = n_{t,s_2}, \tag{5.30}$$

lo cual es una generalización de la ley de Snell para este modelo. Además, estas relaciones nos permiten obtener los ángulos de reflexión y transmisión $\theta_{q,j}$ para cada tipo de onda en función del ángulo de incidencia.

Luego, usando las relaciones (5.26), (5.29) y (5.30), y exigiendo que se satisfagan las condiciones de borde (5.27), obtenemos el siguiente sistema lineal de 10 ecuaciones

$$\begin{aligned} &-\sum_{j=p_1,p_2,p_3} n_{i,p_1}\left(A_{r,j} - A_{t,j}\right) + \sum_{\alpha=s_1,s_2}\left(l_{r,\alpha}A_{r,\alpha} - l_{t,\alpha}A_{t,\alpha}\right) = Y_1, \\ &\sum_{j=p_1,p_2,p_3}\left(-l_{r,j}A_{r,j} + l_{t,j}A_{t,j}\right) - \sum_{\alpha=s_1,s_2} n_{i,p_1}\left(A_{r,\alpha} - A_{t,\alpha}\right) = Y_2, \\ &\sum_{j=p_1,p_2,p_3} n_{i,p_1}\left(-\gamma^C_{r,j}A_{r,j} + \gamma^C_{t,j}A_{t,j}\right) + \sum_{\alpha=s_1,s_2}\left(\gamma^C_{r,\alpha}l_{r\alpha}A_{r,\alpha} - \gamma^C_{t,\alpha}l_{t,\alpha}A_{t,\alpha}\right) = Y_3, \\ &\sum_{j=p_1,p_2,p_3}\left(-\gamma^C_{r,j}l_{r,j}A_{r,j} + \gamma^C_{t,j}l_{t,j}A_{t,j}\right) + \sum_{\alpha=s_1,s_2} n_{i,p_1}\left(-\gamma^C_{r,\alpha}A_{r,\alpha} + \gamma^C_{t,\alpha}A_{t,\alpha}\right) = Y_4, \\ &\sum_{j=p_1,p_2,p_3}\left(-\gamma^B_{r,j}l_{r,j}A_{r,j} + \gamma^B_{t,j}l_{t,j}A_{t,j}\right) + \sum_{\alpha=s_1,s_2} n_{i,p_1}\left(-\gamma^B_{r,\alpha}A_{r,\alpha} + \gamma^B_{t,\alpha}A_{t,\alpha}\right) = Y_5, \\ &\sum_{j=p_1,p_2,p_3}\left[k^2_{r,j}\left[B^u_1 + \gamma^C_{r,j}B^u_2 + K^u_{av}\gamma^B_{r,j}\right]A_{r,j} - k^2_{t,j}\left[B^d_1 + \gamma^C_{t,j}B^d_2 + K^d_{av}\gamma^B_{t,j}\right]A_{t,j}\right] = Y_6, \end{aligned} \tag{5.31}$$

$$\sum_{j=p_1,p_2,p_3} n_{i,p_1}\left[l_{r,j}\left[-2\mu_1^u-\mu_{13}^u\gamma_{r,j}^C\right]A_{r,j}+l_{t,j}\left[2\mu_1^d+\mu_{13}^d\gamma_{t,j}^C\right]A_{t,j}\right]$$
$$+\sum_{\alpha=s_1,s_2}\left[(l_{r,\alpha}^2-n_{i,p_1}^2)\left[\mu_1^u+\frac{1}{2}\mu_{13}^u\gamma_{r,\alpha}^C\right]A_{r,\alpha}+(n_{i,p_1}^2-l_{t,\alpha}^2)\left[\mu_1^d+\frac{1}{2}\mu_{13}^d\gamma_{t,\alpha}^C\right]A_{t,\alpha}\right]=Y_7,$$
$$\sum_{j=p_1,p_2,p_3}\left[\left[k_{r,j}^2\left(\frac{2}{3}\mu_1^u-K_{G1}^u-B_1^u\gamma_{r,j}^B+\gamma_{r,j}^C\left(\frac{1}{3}\mu_{13}^u-B_3^u\right)\right)-l_{r,j}^2\left(2\mu_1^u+\mu_{13}^u\gamma_{r,j}^C\right)\right]A_{r,j}\right.$$
$$\left.+\left[k_{t,j}^2\left(K_{G1}^d-\frac{2}{3}\mu_1^d+B_1^d\gamma_{t,j}^B+\gamma_{t,j}^C\left(B_3^d-\frac{1}{3}\mu_{13}^d\right)\right)+l_{t,j}^2\left(2\mu_1^d+\mu_{13}^d\gamma_{t,j}^C\right)\right]A_{t,j}\right]$$
$$+\sum_{\alpha=s_1,s_2}\left[n_{i,p_1}l_{r,\alpha}\left[-2\mu_1^u-\mu_{13}^u\gamma_{r,\alpha}^C\right]A_{r,\alpha}+n_{i,p_1}l_{t,\alpha}\left[2\mu_1^d+\mu_{13}^d\gamma_{t,\alpha}^C\right]A_{t,\alpha}\right]=Y_8,$$
$$\sum_{j=p_1,p_2,p_3} n_{i,p_1}\left[l_{r,j}\left(-2\mu_3^u\gamma_{r,j}^C-\mu_{13}^u\right)A_{r,j}+l_{t,j}\left(2\mu_3^d\gamma_{t,j}^C+\mu_{13}^d\right)A_{t,j}\right]$$
$$+\sum_{\alpha=s_1,s_2}\left[(l_{r,\alpha}^2-n_{i,p_1}^2)\left(\mu_3^u\gamma_{r,\alpha}^C+\frac{1}{2}\mu_{13}^u\right)A_{r,\alpha}-(l_{t,\alpha}^2-n_{i,p_1}^2)\left(\mu_3^d\gamma_{t,\alpha}^C+\frac{1}{2}\mu_{13}^d\right)A_{t,\alpha}\right]=Y_9,$$
$$\sum_{j=p_1,p_2,p_3}\left[\left[k_{r,j}^2\left(\frac{1}{3}\mu_{13}^u-B_3^u-B_2^u\gamma_{r,j}^B+\gamma_{r,j}^C\left(\frac{2}{3}\mu_3^u-K_{G3}^u\right)\right)-l_{r,j}^2\left(\mu_{13}^u+2\mu_3^u\gamma_{r,j}^C\right)\right]A_{r,j}\right.$$
$$\left.+\left[k_{t,j}^2\left(B_3^d-\frac{1}{3}\mu_{13}^d+B_2^d\gamma_{t,j}^B+\left(K_{G3}^d-\frac{2}{3}\mu_3^d\right)\gamma_{t,j}^C\right)+l_{t,j}^2\left(\mu_{13}^d+2\mu_3^d\gamma_{t,j}^C\right)\right]A_{t,j}\right]$$
$$+\sum_{\alpha=s_1,s_2}\left[n_{i,p_1}l_{r,\alpha}\left(-2\mu_3^u\gamma_{r,\alpha}^C-\mu_{13}^u\right)A_{r,\alpha}+n_{i,p_1}l_{t,\alpha}\left(2\mu_3^d\gamma_{t,\alpha}^C+\mu_{13}^d\right)A_{t,\alpha}\right]=Y_{10},$$

donde usando la ley de Snell (5.30),

$$l_{r,j} = (k_{r,j}^2-n_{i,p_1}^2)^{\frac{1}{2}},\quad l_{t,j}=-(k_{t,j}^2-n_{i,p_1}^2)^{\frac{1}{2}},\quad j=p_1,p_2,p_3,s_1,s_2, \tag{5.32}$$

y los términos independientes están dados por

$$Y_1=n_{i,p_1}A_{i,p_1},\quad Y_2=l_{i,p_1}A_{i,p_1},\quad Y_3=\gamma_i^C n_{i,p_1}A_{i,p_1},\quad Y_4=\gamma_i^C l_{i,p_1}A_{i,p_1},$$
$$Y_5=\gamma_i^B A_{i,p_1}l_{i,p_1},\quad Y_6=A_{i,p_1}k_{i,p_1}^2\left[-B_1^u-B_2^u\gamma_i^C-K_{av}^u\gamma_i^B\right],$$
$$Y_7=\left(2\mu_1^u+\mu_{13}^u\gamma_i^C\right)n_{i,p_1}l_{i,p_1}A_{i,p_1},$$
$$Y_8=A_{i,p_1}\left[k_{i,p_1}^2\left(K_{G1}^u-\frac{2}{3}\mu_1^u+B_1^u\gamma_i^B+\left(B_3^u-\frac{1}{3}\mu_{13}^u\right)\gamma_i^C\right)+l_{i,p_1}^2\left(2\mu_1^u+\mu_{13}^u\gamma_i^C\right)\right],$$
$$Y_9=n_{i,p_1}l_{i,p_1}\left(2\mu_3^u\gamma_i^C+\mu_{13}^u\right)A_{i,p_1},$$
$$Y_{10}=A_{i,p_1}\left[k_{i,p_1}^2\left(B_3^u-\frac{1}{3}\mu_{13}^u+B_2^u\gamma_i^B+\gamma_i^C\left(K_{G3}^u-\frac{2}{3}\mu_3^u\right)\right)+l_{i,p_1}^2\left(\mu_{13}^u+2\mu_3^u\gamma_i^C\right)\right].$$

Los signos en las relaciones (5.32) son elegidos de acuerdo a la dirección de propagación (hacia arriba o abajo) de las distintas ondas. Una vez que el sistema lineal de ecuaciones

(5.31) es resuelto, se despejan las 10 incógnitas $A_{m,j}$ y los coeficientes de reflexión y transmisión de amplitud R_j y T_j en la interfase Γ se pueden calcular utilizando las ecuaciones (5.28).

5.5 Consideraciones energéticas en el medio compuesto

Dado que estamos interesados en estudiar las conversiones de energía que ocurren entre los distintos tipos de ondas, resulta útil y físicamente importante calcular los coeficientes de reflexión y transmisión de acuerdo al flujo de energía a través de la interfase. Estos desarrollos nos permitirán además verificar el balance en las particiones de energía que ocurren en la interfase.

5.5.1 Definición del vector Umov-Poynting

Con el objetivo de obtener el vector de Umov-Poynting para medios porosos compuestos saturados, notemos primero que si definimos una matriz $\mathcal{R}$ dada por

$$\mathcal{R} = \mathcal{P} - (i/\omega)\mathcal{B}, \tag{5.33}$$

entonces las ecuaciones de movimiento (5.10) se pueden escribir en forma compacta como

$$-\omega^2 \mathcal{R} u(x,\omega) = \mathcal{L}(u(x,\omega)). \tag{5.34}$$

Luego, tomemos el producto escalar de la ecuación (5.34) con v^{*T}, donde $v = i\omega u$, el supraíndice * denota conjugación compleja y T indica transposición, e integremos el resultado sobre un volumen V. Usando integración por partes en el término $\mathcal{L}(u)$ y las propiedades de simetría de los tensores $\sigma_{ij}^{(1)}(u), \sigma_{ij}^{(3)}(u)$, se obtienen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} & i\omega \int_V v^{*T} \mathcal{R}\ v\ dV - \int_V \left(\frac{\partial \sigma_{ij}^{(1)}(u)}{\partial x_i} v_j^{(1)*} - \frac{\partial P_f(u)}{\partial x_i} v_i^{(2)*} + \frac{\partial \sigma_{ij}^{(3)}(u)}{\partial x_i} v_j^{(3)*} \right) dV \\ & = i\omega \int_V v^{*T} \mathcal{R}\ v\ dV + \int_V \left(\sigma_{ij}^{(1)}(u) \epsilon_{ij}(v^{(1)*}) - p_f(u) \nabla \cdot v^{(2)*} + \sigma_{ij}^{(3)}(u) \epsilon_{ij}(v^{(3)*}) \right) dV \\ & \qquad - \int_{\partial V} \left[\left(\sigma_{ij}^{(1)}(u) v_j^{(1)*} - p_f(u) v_i^{(2)*} + \sigma_{ij}^{(3)}(u) v_j^{(3)*} \right) \nu_i \right] dS = 0, \end{aligned} \tag{5.35}$$

donde $\nu = (\nu_i)$ denota el vector normal unitario exterior a ∂V.

Por otra parte, si $\sigma = \left[\sigma_{ij}^{(1)}(u), \sigma_{ij}^{(3)}(u), p_f(u)\right]^T \in \mathbb{C}^{13\times 1}$ y $\epsilon = \left[\epsilon_{ij}(u^{(1)}), \epsilon_{ij}(u^{(3)}), \zeta\right]^T \in \mathbb{C}^{13\times 1}$, $1 \leq i \leq j \leq 3$, son los vectores de esfuerzos y deformaciones, respectivamente, las relaciones constitutivas (5.3) pueden reescribirse como

$$\sigma = \mathcal{S}\epsilon. \tag{5.36}$$

En esta ecuación, $\mathcal{S} \in \mathbb{C}^{13\times 13}$ es una matriz simétrica, denominada *matriz de stiffness* [11], y está constituida por los módulos elásticos del medio compuesto.

Luego usando la relación (5.36) en la expresión (5.35), obtenemos

$$\begin{aligned} i\omega \int_V v^{*T}\mathcal{R}\ v\ dV \quad - \quad & i\omega \int_V \epsilon^{*T}\mathcal{S}\ \epsilon\ dV = \\ & \int_{\partial V} \left[\left(\sigma_{ij}^{(1)}(u)v_j^{(1)*} - p_f(u)v_i^{(2)*} + \sigma_{ij}^{(3)}(u)v_j^{(3)*}\right)\nu_i\right] dS, \end{aligned} \tag{5.37}$$

y separando los términos de esta igualdad en partes reales e imaginarias, encontramos

$$\begin{aligned} i\omega \int_V \left[Re(v^{*T}\mathcal{R}\ v) \quad - \quad Re(\epsilon^{*T}\mathcal{S}\ \epsilon) + iIm(v^{*T}\mathcal{R}\ v) - iIm(\epsilon^{*T}\mathcal{S}\ \epsilon)\right] dV = \\ -2\int_{\partial V} \mathbf{P}\cdot\nu\ dS = -2\int_V \nabla\cdot\mathbf{P}\ dV, \end{aligned} \tag{5.38}$$

donde el vector $\mathbf{P} = P_k\ \breve{e}_k$, con componentes

$$P_k(u,v) = -\frac{1}{2}\left(\sigma_{kj}^{(1)}(u)v_j^{(1)*} - p_f(u)v_k^{(2)*} + \sigma_{kj}^{(3)}(u)v_j^{(3)*}\right), \tag{5.39}$$

es el *vector complejo de Umov-Poynting* para este modelo. Es interesante notar que la expresión que hemos obtenido para el vector de Umov-Poynting resulta ser una extensión natural de la que presenta Carcione [11] para el caso de medios porosos (de matriz simple) viscoelásticos y anisótropos.

Los cuatro términos que se encuentran en el lado izquierdo de la igualdad (5.38) se relacionan, respectivamente, con la densidad de energía cinética, la densidad de energía de deformación, y las tasas de densidad de energía cinética y de deformación disipadas. Para clarificar esta ecuación, resulta conveniente relacionar los distintos términos con las energías promediadas en un ciclo, tal como lo hizo Carcione [11] en el caso de un medio poroso (de matriz simple) viscoelástico y anisótropo. Con este objetivo, si denominamos

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \frac{1}{4}Re\left(v^{*T}\mathcal{R}\ v\right), \qquad \mathcal{W} = \frac{1}{4}Re\left(\epsilon^{*T}\mathcal{S}\ \epsilon\right), \\ \hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{T}} &= -\frac{\omega}{2}Im\left(v^{*T}\mathcal{R}v\right), \qquad \hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{W}} = \frac{\omega}{2}Im\left(\epsilon^{*T}\mathcal{S}\epsilon\right), \end{aligned} \tag{5.40}$$

la ecuación (5.38) se puede reescribir como

$$i\omega \int_V 2(\mathcal{W} - \mathcal{T})dV - \int_V (\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{T}} + \hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{W}})dV = \int_{\partial V} \mathbf{P} \cdot \nu \; dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{P} \; dV. \quad (5.41)$$

Además, como la igualdad (5.41) es válida para cualquier volumen V, es válida punto a punto, y entonces el vector de Poynting satisface

$$2i\omega(\mathcal{W} - \mathcal{T}) - (\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{T}} + \hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{W}}) = \nabla \cdot \mathbf{P}. \quad (5.42)$$

Ahora, teniendo en cuenta que si A es un vector complejo armónico con elementos de la forma $a = a_0 e^{i(\omega t - \beta)}$ y D es una matriz simétrica compleja, entonces se puede verificar que [11]

$$\begin{aligned} < Re(A^T)Re(D)Re(A) > &= \frac{1}{2}Re(A^T D A^*), \\ < Re(A^T)Im(D)Re(A) > &= \frac{1}{2}Im(A^T D A^*), \end{aligned} \quad (5.43)$$

donde en general,

$$< a >= \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} a(t) \; dt$$

es el promedio temporal sobre un ciclo. Luego, como por hipótesis todas las variables en los lados derechos de las igualdades (5.40) son periódicas, con una dependencia temporal de la forma $e^{i\omega t}$, utilizando las relaciones (5.43) encontramos

$$\begin{aligned} &\text{i) } \mathcal{T} = \frac{1}{2} < Re(v^T)Re(\mathcal{R})Re(v) >, \\ &\text{ii) } \mathcal{W} = \frac{1}{2} < Re(\epsilon^T)Re(\mathcal{S})Re(\epsilon) >, \\ &\text{iii) } \hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{T}} = -\omega < Re(v^T)Im(\mathcal{R})Re(v) >, \\ &\text{iv) } \hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{W}} = \omega < Re(\epsilon^T)Im(\mathcal{S})Re(\epsilon) > . \end{aligned} \quad (5.44)$$

Considerando además que las igualdades (5.44)-(i) y (5.44)-(iii) se pueden escribir como

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} < Re(v^T)\mathcal{P}Re(v) >, \qquad \hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{T}} =< Re(v^T)\mathcal{B}Re(v) >,$$

podemos concluir que $\mathcal{T}$ es la densidad de energía cinética promediada en un ciclo y $\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{T}}$ es la tasa promedio de densidad de energía cinética disipada.

Con respecto a los términos de esfuerzo-deformación, podemos notar que la expresión (5.44)-(ii) es análoga a la densidad de energía de deformación promediada en un ciclo

para este modelo, mientras que el término (5.44)-(iv) representa la tasa promedio de densidad de energía de deformación disipada. Entonces, las ecuaciones (5.41) y (5.42) representan un balance de energía, que relaciona al vector complejo de Umov-Poynting con las densidades de energía $\mathcal{T}$, $\mathcal{W}$ y sus tasas de disipación $\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{T}}$ y $\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{W}}$.

Por otra parte, usando las relaciones (5.43) se puede probar que el *vector de Umov-Poynting real* $\mathbf{P_R} = P_{Rk}\breve{e}_k$, definido mediante

$$P_{Rk} = -\left(Re(\sigma_{kj}^{(1)}(u))Re(v_j^{(1)}) - Re(p_f(u))Re(v_k^{(2)}) + Re(\sigma_{kj}^{(3)}(u))Re(v_j^{(3)})\right), \quad (5.45)$$

satisface $< \mathbf{P_R} >= Re(\mathbf{P})$. Este resultado está de acuerdo con trabajos de otros autores que estudian otros tipos de medios [11, 18]. Además, este promedio temporal es real, independiente del tiempo, y representa la magnitud y dirección del flujo de potencia promediado en el tiempo [18]. Por esta razón, el vector $< \mathbf{P_R} >$ recibe el nombre de *flujo de potencia promedio*. Como consecuencia de las condiciones de continuidad (5.27), las componentes normales del vector de Umov-Poynting complejo, del vector de Umov-Poynting real y del flujo de potencia promedio son continuas a través de la interfase plana.

Por último, es interesante remarcar que el análisis energético que hemos presentado aquí no esta restringido al caso particular de propagación de ondas planas.

5.5.2 Coeficientes energéticos de reflexión y transmisión

Utilizando los resultados que hemos obtenido, tratemos de cuantificar la proporción de energía que se lleva cada tipo de onda en las conversiones que se producen cuando una onda plana incide sobre una interfase plana. Con este objetivo, sabemos que la componente normal a la interfase del flujo de potencia promedio (que en general denominaremos F), tanto en Ω_u como en Ω_d, está dada por

$$F = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega} \mathbf{P_R}\cdot\breve{e}_2 dt = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega} P_{R2}(u,v)\ dt. \quad (5.46)$$

Aplicando el principio de superposición que usamos en la expresión (5.26) a las velocidades de las partículas $v^{(m,u)}, v^{(m,d)}$, a las componentes de los esfuerzos generalizados y a la presión del fluido, y utilizando esta descomposición en la definición del vector de Umov-Poynting real, encontramos que F se puede separar en diferentes componentes asociadas con los distintos tipos de ondas. En este sentido, extendiendo las ideas de

Dutta y Odé [31] (excepto por un signo), definimos los *flujos ortodoxos* $F_{k,k}$ como

$$F_{k,k} = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega}(-1)\Big(Re(\sigma^{(1)}_{2j,k}(u))Re(v^{(1)}_{j,k}) + Re(\sigma^{(3)}_{2j,k}(u))Re(v^{(3)}_{j,k}) - Re(p_{f,k}(u))Re(v^{(2)}_{2,k})\Big)\,dt, \qquad j=1,2, \tag{5.47}$$

y los *flujos de interferencia* $F_{k,q}$,

$$\begin{aligned} F_{k,q} = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega}(-1)\Big(&Re(\sigma^{(1)}_{2j,k}(u))Re(v^{(1)}_{j,q}) + Re(\sigma^{(3)}_{2j,k}(u))Re(v^{(3)}_{j,q}) \\ &-Re(p_{f,k}(u))Re(v^{(2)}_{2,q}) + Re(\sigma^{(1)}_{2j,q}(u))Re(v^{(1)}_{j,k}) \\ &+Re(\sigma^{(3)}_{2j,q}(u))Re(v^{(3)}_{j,k}) - Re(p_{f,q}(u))Re(v^{(2)}_{2,k})\Big)\,dt, \qquad j=1,2, \end{aligned} \tag{5.48}$$

donde $k,q = ip_1, rp_1, rp_2, rp_3, rs_1, rs_2$ en Ω_u y $k,q = tp_1, tp_2, tp_3, ts_1, ts_2$ en Ω_d denotan el modo de propagación asociado con la variable en cuestión, y la convención de suma está aplicada sobre el índice j. Tal como veremos luego en los ejemplos numéricos, en la mayoría de las aplicaciones los flujos de interferencia poseen sólo una parte muy pequeña del total de la energía.

Este desacople del flujo de potencia promedio en contribuciones asociadas con las distintas ondas nos permite definir coeficientes que representan las proporciones de la energía incidente que es convertida a cada tipo de onda. En este sentido, definimos los coeficientes energéticos de reflexión y transmisión como

$$\begin{aligned} ER_j &= \frac{|F_{rj,rj}|}{|F_{ip_1}|}, \\ ET_j &= \frac{|F_{tj,tj}|}{|F_{ip_1}|}, \qquad j = p_1, p_2, p_3, s_1, s_2, \end{aligned} \tag{5.49}$$

donde

$$F_{ip_1} = F_{ip_1,ip_1} + F_{ip_1,rp_1} + F_{ip_1,rp_2} + F_{ip_1,rp_3} + F_{ip_1,rs_1} + F_{ip_1,rs_2}. \tag{5.50}$$

Definimos también los flujos energéticos totales reflejados y transmitidos (F_r y F_t), como

$$\begin{aligned} F_j = F_{jp_1,jp_1} + F_{jp_2,jp_2} + F_{jp_3,jp_3} + F_{js_1,js_1} + F_{js_2,js_2} + F_{jp_1,jp_2} + F_{jp_1,jp_3} \\ +F_{jp_1,js_1} + F_{jp_1,js_2} + F_{jp_2,jp_3} + F_{jp_2,js_1} + F_{jp_2,js_2} + F_{jp_3,js_1} + F_{jp_3,js_2} + F_{js_1,js_2}, \end{aligned} \tag{5.51}$$

donde $j = r, t$. La continuidad de la componente normal del flujo de potencia promedio implica el balance de energía en la interfase, que puede expresarse como

$$F_{ip_1} + F_r = F_t. \tag{5.52}$$

5.5.3 Análisis de conversiones de energía en discontinuidades planas en una arenisca parcialmente congelada

Para ilustrar las conversiones de energía que se pueden producir en discontinuidades planas en medios porosos compuestos saturados, calculemos los coeficientes energéticos de reflexión y transmisión en una interfase plana definida por una discontinuidad en la saturación del hielo que ocupa parcialmente el espacio poral de una roca homogénea. Supongamos que la matriz de roca se corresponde con la arenisca 1 de la Tabla 2.1, mientras que el espacio poral que no contiene hielo se encuentra ocupado por agua, con propiedades físicas dadas en la Tabla 2.2. Las distintas propiedades físicas de la matriz de hielo y los coeficientes de la teoría de Biot para medios compuestos los calculamos como lo hicimos previamente en este capítulo, cuando estudiamos velocidades de fase y atenuaciones de las ondas que se pueden propagar a través de la arenisca 1 parcialmente congelada. Por otra parte, la frecuencia que utilizamos en estos experimentos numéricos es de 100Hz, y suponemos que la onda incidente es una onda compresional clásica (tipo p_1) de amplitud unitaria.

Consideremos inicialmente que la saturación de hielo del semiespacio superior (desde donde la onda incidente se acerca a la interfase) es igual a 0.2, mientras que la del semiespacio inferior, 0.8. La Figura 5.19 muestra los coeficientes de reflexión y transmisión ER_{p1} y ET_{p1} para este contraste de saturaciones de hielo, en función del ángulo de incidencia. En ella podemos observar que para ángulos de incidencia por debajo de 60 grados, prácticamente toda la energía incidente se transmite al mismo tipo de onda (p_1 transmitida). Por otra parte, para ángulos de incidencia mayores, una cantidad muy importante de la energía se refleja a onda compresional tipo p_1. Este cambio tan brusco en el comportamiento de las conversiones de la energía incidente se relaciona con la existencia de un ángulo crítico. En este sentido, para cada tipo de onda transmitida, el ángulo crítico (si existe) se define como el ángulo de incidencia a partir del cual el flujo de potencia promedio asociado con la onda transmitida es paralelo a la interfase [11]. En nuestro caso, despreciando los flujos de interferencia, esto es similar a requerir que el flujo ortodoxo $F_{tj,tj}$ sea nulo, o equivalentemente, $ET_j = 0$. Luego, analizando nuevamente la Figura 5.19, podemos ver la presencia de un ángulo crítico asociado con la onda tipo p_1 transmitida para un ángulo de incidencia cercano a 60°.

Se producen conversiones significativas de energía a otros tipos de ondas también. En particular, fracciones muy importantes de la energía incidente se convierten a ondas

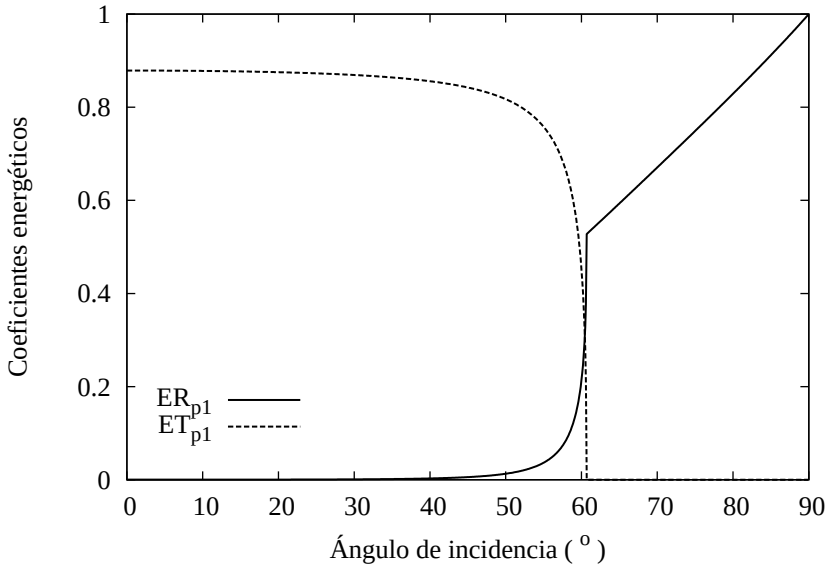

Figura 5.19: Coeficientes energéticos ER_{p1} y ET_{p1} en función del ángulo de incidencia. La saturación de hielo del semiespacio superior es 0.2, mientras que la del semiespacio inferior es 0.8.

transmitidas tipo p_2, tal como muestra la Figura 5.20. En ella podemos ver que para prácticamente todos los ángulos de incidencia, más del 10 por ciento de la energía incidente es convertida a este tipo de onda. En especial para ángulos de incidencia cercanos al valor crítico, esta fracción de energía es del orden del 40 por ciento.

Por otra parte, la Figura 5.21 muestra los coeficientes energéticos ER_{p2} y ET_{s2} en función del ángulo de incidencia. En ella podemos ver que las conversiones de energía incidente hacia estas ondas son significativas, aunque no tan importantes como en el caso anterior. Es interesante notar que también para estas ondas las mayores conversiones se producen para ángulos de incidencia cercanos al valor crítico.

Las conversiones de energía hacia los tipos de ondas restantes resultaron despreciables, y por esta razón no mostramos las curvas correspondientes.

Las Tablas 5.1 y 5.2 muestran los flujos de energía calculados utilizando las fórmulas (5.47) y (5.48), para un ángulo de incidencia de 45°. Podemos notar que en todos los casos los flujos de interferencia son despreciables con respecto a los ortodoxos. Además, observando el valor de la diferencia entre los flujos totales transmitidos y reflejados ($F_t - F_r$) en la Tabla 5.2 y el flujo incidente F_i de la Tabla 5.1, vemos que estos valores

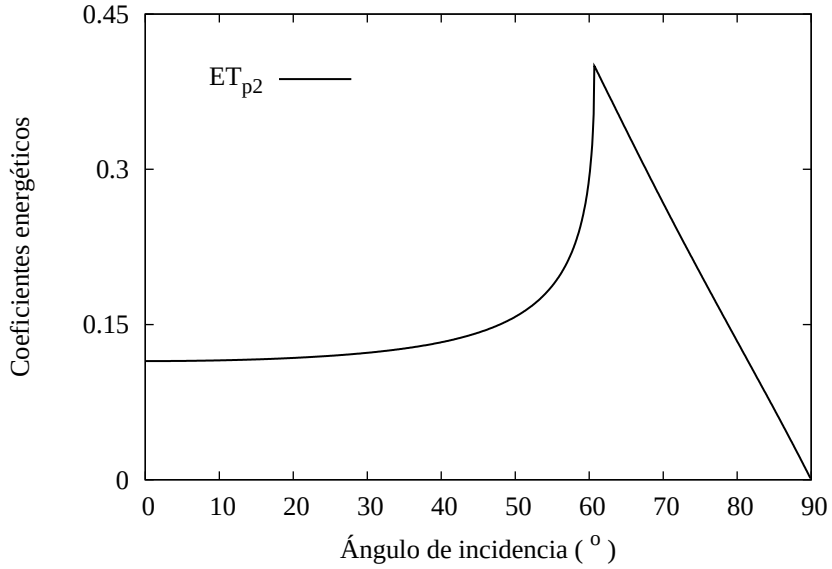

Figura 5.20: Coeficiente energético de transmisión ET_{p2} en función del ángulo de incidencia. La saturación de hielo del semiespacio superior es 0.2, mientras que la del semiespacio inferior es 0.8.

coinciden. Este hecho está de acuerdo con la continuidad de la componente normal del flujo de potencia promedio, expresada mediante la ecuación (5.52). Esta condición de balance de energías fue verificada para todos los ángulos de incidencia y contrastes de saturaciones de hielo presentados en este trabajo.

F_{ip_1,ip_1}	-40798.2348
F_{ip_1,rp_1}	0.000005
F_{ip_1,rp_2}	-0.0002511
F_{ip_1,rp_3}	-0.0781114
F_{ip_1,rs_1}	0.0000183
F_{ip_1,rs_2}	-0.0000025
F_{ip_1}	-40798.3132

Tabla 5.1: Flujos de energía incidente (W/m^2) para un ángulo de incidencia de 45°.

Para completar este análisis, estudiemos ahora el comportamiento de las particiones de energía suponiendo que el contraste de propiedades de los dos semiespacios es el opuesto.

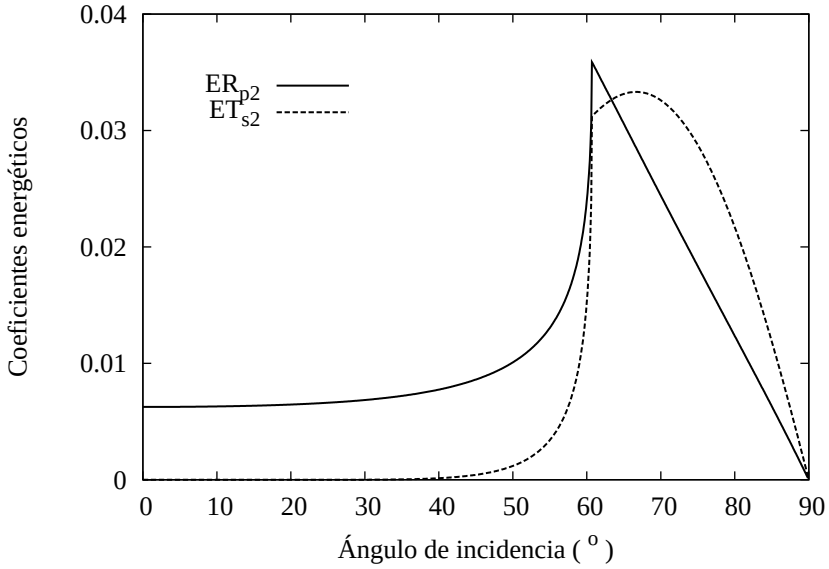

Figura 5.21: Coeficientes energéticos ER_{p2} y ET_{s2} en función del ángulo de incidencia. La saturación de hielo del semiespacio superior es 0.2, mientras que la del semiespacio inferior es 0.8.

Es decir, calculemos los coeficientes energéticos de reflexión y transmisión asumiendo que la saturación de hielo del semiespacio superior es 0.8 y la del espacio inferior es 0.2.

La Figura 5.22 muestra los coeficientes energéticos ER_{p1} y ET_{p1}, en función del ángulo de incidencia. En ella podemos notar que para ángulos de incidencia por debajo de aproximadamente 50 grados, prácticamente toda la energía incidente se convierte a onda tipo p_1 transmitida. Por otro lado, la fracción de energía convertida a onda tipo p_1 reflejada es despreciable para ángulos de incidencia pequeños, y aumenta a medida que el ángulo de incidencia es mayor, tomando valores muy importantes para ángulos cercanos a 90 grados. Comparando estos resultados con los que se encuentran en la Figura 5.19, es interesante notar que la suavidad de las curvas de la Figura 5.22 se asocia con la falta de ángulos críticos, lo que se debe a que la onda compresional incidente está viajando hacia un semiespacio en el cual se propagan únicamente ondas con menores velocidades de fase.

La Figura 5.23 muestra la fracción de energía incidente convertida a onda tipo p_2 reflejada, en función del ángulo de incidencia. Aquí podemos ver que estas conversiones de energía a ondas lentas son significativas, principalmente para incidencias cercanas a

$F_{rp1,rp1}$	231.723602	$F_{tp1,tp1}$	−34365.6341
$F_{rp2,rp2}$	351.227616	$F_{tp2,tp2}$	−5800.09307
$F_{rp3,rp3}$	5.2934989	$F_{tp3,tp3}$	−0.6082051
$F_{rs1,rs1}$	14.7424003	$F_{ts1,ts1}$	−9.3175409
$F_{rs2,rs2}$	3.0620413	$F_{ts2,ts2}$	−17.2793282
$F_{rp1,rp2}$	−0.0000216	$F_{tp1,tp2}$	0.0005329
$F_{rp1,rp3}$	0.0058873	$F_{tp1,tp3}$	0.0035042
$F_{rp1,rs1}$	0.0000023	$F_{tp1,ts1}$	−0.0000003
$F_{rp1,rs2}$	0.	$F_{tp1,ts2}$	−0.0000557
$F_{rp2,rp3}$	−0.7009551	$F_{tp2,tp3}$	−0.0352903
$F_{rp2,rs1}$	−0.0000304	$F_{tp2,ts1}$	−0.0000073
$F_{rp2,rs2}$	0.000001	$F_{tp2,ts2}$	0.0001144
$F_{rp3,rs1}$	−0.0043524	$F_{tp3,ts1}$	−0.0001217
$F_{rp3,rs2}$	−0.0004834	$F_{tp3,ts2}$	−0.0004173
$F_{rs1,rs2}$	−0.0000006	$F_{ts1,ts2}$	−0.000005
F_r	605.349205	F_t	−40192.964
		$F_t - F_r$	−40798.3132

Tabla 5.2: Flujos de energía reflejados y transmitidos (W/m^2), para un ángulo de incidencia de 45°.

la normal. En estos casos, prácticamente el 10 por ciento de la energía incidente es convertida a energía de ondas tipo p_2 en la interfase.

Con respecto a las conversiones de energía a los otros tipos de ondas, en general las mismas no son tan importantes como en los casos que analizamos previamente. Sin embargo, en ciertas ocasiones se generan ondas con proporciones de energía no despreciables. En este sentido, la Figura 5.24 muestra las proporciones de energía que son convertidas a ondas tipo s_2 reflejada y p_2 transmitida, en función del ángulo de incidencia.

Tal como ya mencionamos previamente, este mismo análisis se puede repetir para ondas de corte clásicas que inciden sobre la interfase plana. Sin embargo, no lo hemos incluido en este capítulo para evitar que sea más extenso. Además, las conversiones de energía para ondas de corte clásicas incidiendo sobre heterogeneidades planas en medios porosos compuestos será estudiado en el próximo capítulo, para el caso de sedimentos que contienen hidratos de metano es sus poros.

Para concluir, resulta interesante remarcar que el análisis energético que realizamos sugiere que fracciones importantes de la energía de las ondas clásicas que se propagan

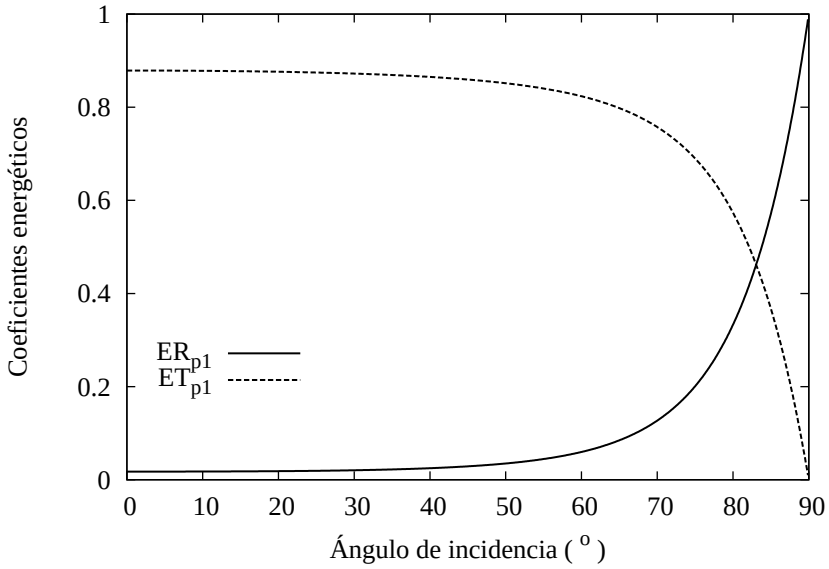

Figura 5.22: Coeficientes energéticos ER_{p1} y ET_{p1} en función del ángulo de incidencia. La saturación de hielo del semiespacio superior es 0.8, mientras que la del semiespacio inferior es 0.2.

a través de medios porosos compuestos saturados pueden convertirse a energía de ondas lentas en las heterogeneidades del medio. Además, las tres ondas lentas pueden jugar roles importantes en estas particiones, y entonces pueden afectar de manera significativa el comportamiento de las ondas clásicas primarias. Este resultado nos muestra la importancia de utilizar el modelo de Biot extendido para analizar correctamente la respuesta sísmica de este tipo de medios. En tal sentido, en el próximo capítulo utilizaremos este modelo para estudiar el papel que tienen estas perturbaciones lentas en la propagación de ondas elásticas clásicas a través de sedimentos que contienen hidratos de metano en sus poros.

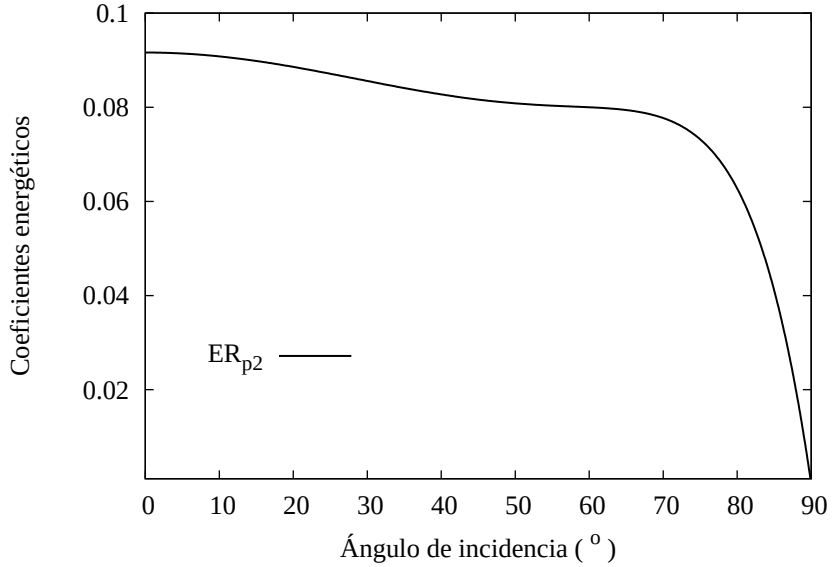

Figura 5.23: Coeficiente energético ER_{p2} en función del ángulo de incidencia. La saturación de hielo del semiespacio superior es 0.8, mientras que la del semiespacio inferior es 0.2.

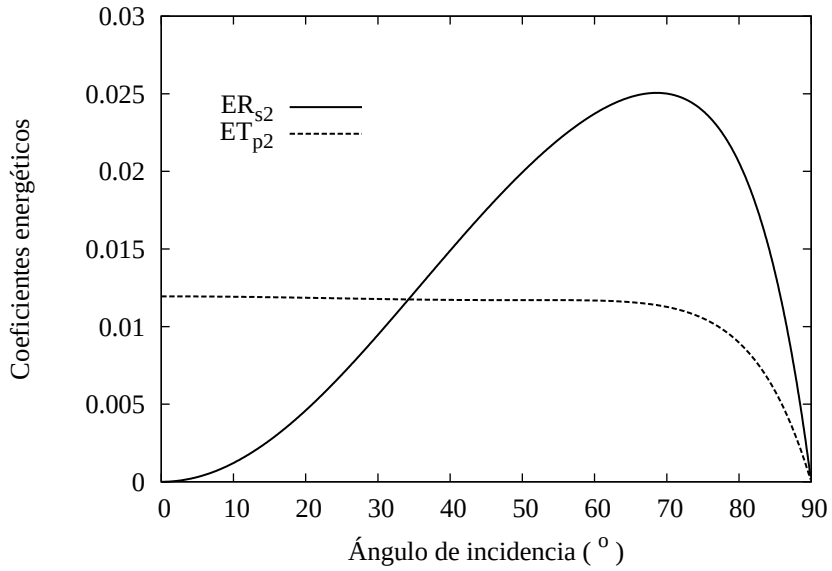

Figura 5.24: Coeficientes energéticos ER_{s2} y ET_{p2} en función del ángulo de incidencia. La saturación de hielo del semiespacio superior es 0.8, mientras que la del semiespacio inferior es 0.2.

Capítulo 6

Comportamiento sísmico de sedimentos con hidratos de metano

Inicialmente en este capítulo presentaremos una revisión de las características más generales de los hidratos de metano. Luego, utilizaremos la extensión de la teoría de Biot y los resultados que presentamos en el capítulo anterior con el objetivo de analizar las principales propiedades sísmicas de los sedimentos que contienen hidratos de metano en sus poros, poniendo énfasis en el rol que tienen las ondas lentas en las conversiones de energía que ocurren en heterogeneidades en este tipo de medios. En tal sentido, utilizaremos datos reales obtenidos en el pozo de investigación Mallik 5L-38, ubicado en el delta del Mackenzie, Canadá, para calibrar el modelo teórico. A continuación, calcularemos las velocidades de fase de las distintas ondas que se pueden propagar en estos ambientes, analizaremos las particiones de energía que tienen lugar cuando una onda clásica incide sobre una interfase plana en estos medios, y finalmente realizaremos simulación numérica de propagación de ondas en sedimentos que contienen distribuciones altamente heterogéneas de hidratos de metano. Estos estudios nos permitirán sugerir un posible mecanismo para explicar los altos niveles de atenuación sísmica que se suelen observar en estos ambientes. Los principales resultados de este capítulo se encuentran publicados en [78] y [81].

6.1 Principales características de los hidratos de metano

Los hidratos de metano (*gas hydrates* en inglés) son complejos moleculares cristalinos compuestos de agua y gas natural, principalmente metano, que se forman bajo ciertas condiciones de bajas temperaturas, altas presiones y determinadas concentraciones de gas. Estas estructuras poseen propiedades muy semejantes a las del hielo, y están compuestas por moléculas de agua que se ubican en una estructura reticular de simetría cúbica que alberga entre el reticulado moléculas de gas, que pueden ser hidrocarburos livianos, dióxido de carbono o, en menor medida, otros gases. Debido a esta configuración geométrica de las moléculas, los hidratos de metano se denominan genéricamente

clatratos, término que deriva del latín y significa "enjaulado". En general los términos "hidratos de metano" e "hidratos de gases" se toman como sinónimos, y esto se debe al hecho de que en la naturaleza las estructuras más comunes son las combinaciones de metano y agua [60].

Es interesante remarcar que el hecho de que los hidratos de metano sean sólidos cristalinos implica que la cantidad de metano alojado en un dado volumen de hidratos es mucho mayor que el mismo volumen en estado gaseoso. En tal sentido, el factor de expansión al liberarse el metano de la fase sólida a la gaseosa hace que se deba considerar un factor de proporcionalidad de volumen de entre 160 y 184. Es decir, para condiciones estándares de temperatura y presión, de un metro cúbico de hidrato sólido se obtienen entre 160 y 184 metros cúbicos de metano en fase gaseosa [60].

El interés de diversos autores en estudiar el comportamiento de los hidratos de metano se debe a distintas causas. En primer lugar, el gas natural proveniente de los hidratos de metano constituye una gigantesca reserva energética. De hecho, de acuerdo con el *U.S. Geological Survey* se estima que las reservas planetarias de hidratos de metano en los bordes de plataforma equivalen al doble de todas las reservas de combustibles fósiles de la Tierra [22]. Estos mismos autores estiman también que tan sólo las reservas de Estados Unidos llegan a 10^{16}m^3, cantidad que alcanzaría para satisfacer las necesidades energéticas de ese país, considerando el consumo actual, durante 64000 años. Estos valores incluyen los 10^{14}m^3 de gas metano libre que se encuentran alojados por debajo de los hidratos de metano. Otro hecho que motiva el interés de los científicos en analizar estos compuestos se debe a que podrían jugar un rol muy importante en el problema del cambio climático global. El metano es un poderoso "gas invernadero", y su liberación a la atmósfera a partir de depósitos de hidratos de metano podría profundizar el problema del cambio climático. Incluso, se está analizando la posibilidad de que al aumentar la temperatura media de la atmósfera y los océanos, los depósitos de hidratos puedan desestabilizarse, liberando metano que a su vez incrementaría aun más la temperatura, conformando un círculo vicioso. Por otro lado, las variaciones en el nivel del mar también podrían afectar la estabilidad de los hidratos [60], pues oscilaciones en la altura de la columna de agua marina cambiarían las condiciones de presión del reservorio. Por último, los hidratos de metano constituyen un potencial peligro en las perforaciones que suelen realizarse en la exploración o explotación de reservorios convencionales de hidrocarburos. En este sentido, la presencia de hidratos en las formaciones que están siendo perforadas

puede producir desde liberación brusca de metano libre hasta inestabilidad del fondo oceánico [57, 58], poniendo en serio riesgo el éxito de la operación.

La existencia de hidratos de metano en el espacio poral de sedimentos marinos fue originalmente sugerida por Markl et al. [59], a partir de anomalías observadas en secciones sísmicas del margen este de los Estados Unidos. Perforaciones posteriores realizadas en esa región confirmaron la existencia de hidratos en tales sedimentos. En general, las distribuciones de las acumulaciones de hidratos de metano alrededor del mundo están condicionadas a la ocurrencia simultánea de bajas temperaturas y relativamente altas presiones. Por esta razón, los depósitos de hidratos están restringidos a regiones muy frías con suelos congelados (permafrost), tales como Siberia, Alaska y Canadá, y a fondos marinos, como en el Golfo de Méjico, Costa Este y Oeste de Estados Unidos y Fosa de Nankai en Japón, entre otros. En este sentido, las Figuras 6.1 y 6.2 muestran esquemas

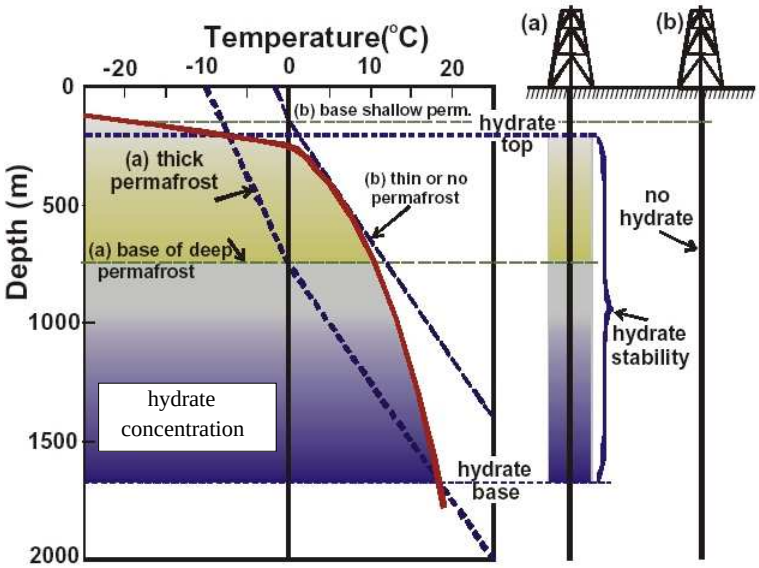

Figura 6.1: Restricciones en el plano temperatura-profundidad necesarias para la ocurrencia de hidratos de metano en zonas de permafrost, en el caso de condiciones muy frías (permafrost de espesor importante) y más cálidas (permafrost delgado o inexistente). Esta figura ha sido extraída del sitio web del *Natural Resources Canada*, http://gsc.nrcan.gc.ca/gashydrates/canada/index_e.php, y fue originalmente presentada en [47].

de las restricciones en el plano temperatura-profundidad necesarias para la ocurrencia de hidratos en zonas de permafrost y en sedimentos del fondo marino en latitudes medias,

respectivamente. En ellas podemos ver que la temperatura de disociación del hidrato de metano se ve fuertemente afectada por la presión. Además, podemos observar que el hidrato de metano es estable en las condiciones que suelen tener los fondos marinos profundos y los suelos de zonas polares, donde la temperatura superficial promedio es muy baja. La base de la zona de estabilidad de los hidratos usualmente se encuentra algunos cientos de metros por debajo del fondo marino en zonas de talud continental, y hasta aproximadamente 1000 metros por debajo de suelos congelados en áreas polares [47].

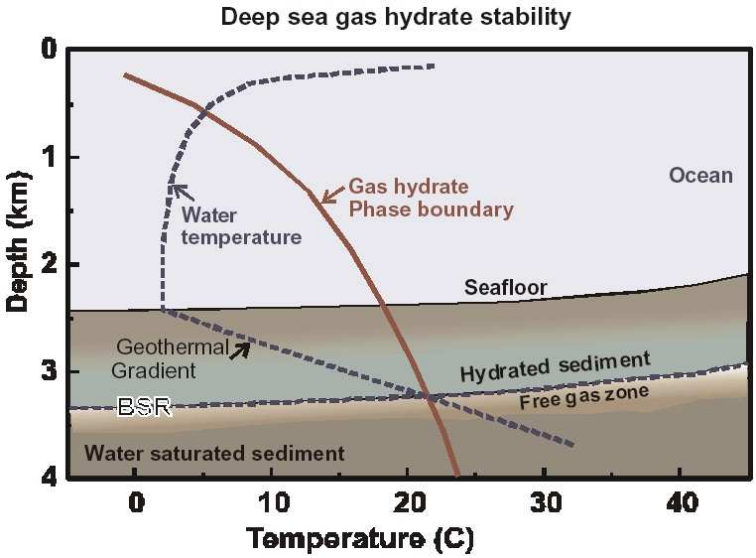

Figura 6.2: Restricciones en el plano temperatura-profundidad necesarias para la ocurrencia de hidratos de metano en sedimentos del fondo marino en latitudes medias. Esta figura ha sido extraída del sitio web del *Natural Resources Canada*, y fue originalmente presentada en [47].

Con respecto a la situación en Argentina, no hay zonas donde se desarrolle con características de permafrost, de manera que sólo es esperable encontrar hidratos de metano en los fondos marinos de la extensa Plataforma Continental Argentina [60]. En este sentido, Kostadinoff [51] infirió a partir de anomalías de secciones sísmicas la existencia de hidratos de metano en dos puntos del margen continental pasivo argentino, al este de la península de Valdés y al sureste del plateau de Malvinas. Estos resultados indicarían que el borde de la plataforma continental argentina posee grandes posibilidades de contener importantes reservorios de hidratos de metano [51].

6.2 Indicadores sísmicos de la presencia de hidratos de metano

La presencia de hidratos de metano causa fuertes cambios en las propiedades físicas y mecánicas de la roca que los contiene, permitiendo inferir su presencia en los sedimentos a partir de ciertos indicadores sísmicos. En particular, a medida que la saturación de hidratos en el espacio poral es mayor, las velocidades sísmicas de las ondas clásicas aumentan. De esta manera, las anomalías positivas observadas entre las velocidades sísmicas medidas en estos ambientes y las de los mismos sedimentos pero conteniendo agua en sus poros pueden atribuirse a la presencia de hidratos de metano [14, 19, 58].

Dado que la presencia de hidratos en el espacio poral de la roca produce una disminución de su permeabilidad, suele encontrarse gas libre entrampado por debajo de la zona de estabilidad de los hidratos. En estos casos, como la presencia del gas libre produce una fuerte disminución de la velocidad compresional clásica, se produce un marcado contraste de impedancias acústicas entre la zona que contiene hidratos de metano y la que se encuentra por debajo conteniendo gas libre. Este contraste produce una reflexión muy fuerte en las secciones sísmicas, de polaridad inversa y paralela al fondo marino, pues marca el fin de la zona de estabilidad. Esta reflexión recibe el nombre de *Bottom Simulating Reflector*, o BSR, y es el indicador más significativo de la presencia de hidratos de metano en el espacio poral de los sedimentos [19], aunque cabe remarcar aquí que existen ambientes sedimentarios que poseen hidratos y no muestran un BSR identificable. También es interesante aclarar que si bien la presencia del BSR indica la ubicación de las acumulaciones de hidratos, en principio no provee información respecto de la cantidad presente en los sedimentos [39].

Otra característica importante de los sedimentos que contienen hidratos de metano es la marcada disminución de la reflectividad de los sedimentos que se encuentran en la zona de estabilidad respecto de los que se encuentran por debajo. Esta característica recibe el nombre de *blanking*, y aun no se conoce claramente la razón de este fenómeno. Hay autores que lo atribuyen a una reducción del contraste de impedancias acústicas debido a la cementación de los sedimentos por los hidratos de metano, mientras que otros lo asocian con la poca variabilidad litológica que suele encontrarse en algunos depósitos de hidratos [19, 39]. La extensión vertical del blanking puede tomarse como un indicador de la distribución de los hidratos de metano, y entonces en ciertos casos puede ayudar a estimar el volumen de hidratos presentes en el reservorio.

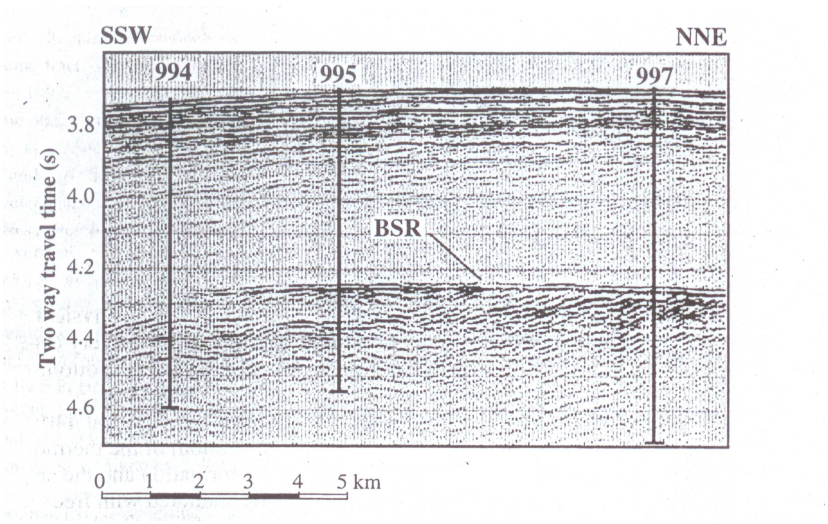

Figura 6.3: Sección sísmica a través del Blake Ridge, en la costa este de Estados Unidos. El reflector muy marcado a aproximadamente 4.3s es el BSR. Por encima del mismo podemos observar una zona de reflexiones de muy baja amplitud, relacionada con el efecto de blanking. Esta figura fue extraída de [40].

Para ilustrar estas propiedades, la Figura 6.3 muestra una sección sísmica obtenida en la zona del Blake Ridge, en la costa este de Estados Unidos. En ella podemos observar un BSR, fácilmente identificable por estar constituido por una reflexión muy marcada y paralela al fondo marino. Por encima del BSR se encuentra una zona de reflexiones de muy baja amplitud, que se corresponde con el efecto de blanking. Por debajo del BSR, las amplitudes de las reflexiones recuperan nuevamente sus valores normales.

Una característica particularmente interesante del comportamiento sísmico de los sedimentos que contienen hidratos de metano consiste en que datos de perfiles sónicos y tomografías entre pozos indican que la atenuación sísmica *aumenta* con el contenido de hidratos de metano [38, 69]. Este comportamiento contradice la suposición convencional que asocia un aumento de la rigidez de la roca y un incremento de las velocidades sísmicas debido al reemplazo de una fracción del agua poral por hidratos de metano, con una disminución de la atenuación sísmica [39]. Esto muestra que la influencia de la formación de hidratos de metano en las propiedades de los sedimentos es más compleja que una simple sustitución de parte del fluido poral por una fase sólida. En este sentido, varios autores han presentado modelos físicos que explican los incrementos observados en las velocidades sísmicas en estos sedimentos, mientras que el mecanismo de pérdida

de energía asociado a la presencia de los hidratos no está todavía completamente entendido [39, 19]. Algunos trabajos que tratan este problema enfocan principalmente en los mecanismos de atenuación intrínseca tales como los efectos de flujo macroscópico, fricción entre los hidratos y los sedimentos y el llamado *squirt flow* [39, 19].

La mayoría de los modelos físicos que han sido utilizados para describir la deformación y propagación de ondas elásticas a través de sedimentos que contienen hidratos de metano representan al medio como un sólido elástico o disipativo monofásico *efectivo*. Sin embargo, estos medios están compuestos por dos fases sólidas principales (roca e hidratos de metano) con propiedades físicas muy distintas, que pueden sufrir diferentes desplazamientos y deformaciones al ser sometidos a esfuerzos. Por esta razón, y dado que hemos observado en el capítulo anterior que las ondas adicionales que surgen al considerar la naturaleza compuesta de la matriz sólida pueden afectar fuertemente el comportamiento de las ondas clásicas, parece ser más adecuado representar este tipo de medios con modelos de tipo de Biot extendidos para medios compuestos. Sin embargo, debido a la complejidad y al gran número de parámetros involucrados, muy pocos autores consideran estos modelos para analizar la respuesta sísmica de estos ambientes [14, 39, 20]. Además, ninguno de ellos considera cuantitativamente la generación de ondas lentas en las conversiones de energía que se producen cuando las ondas clásicas interactúan con heterogeneidades en el medio.

Las energías involucradas en la generación de ondas lentas en heterogeneidades pueden ser muy importantes, tal como hemos visto en el capítulo anterior, y entonces podrían tener un rol clave en el mecanismo de atenuación sísmica que se produce en este tipo de medios. Con el objetivo de estudiar estos fenómenos, en la próxima sección consideraremos datos reales para calibrar el modelo teórico presentado en el capítulo anterior, y luego lo utilizaremos para analizar las conversiones de energía que se producen cuando una onda clásica se propaga a través de medios porosos que contienen distribuciones heterogéneas de hidratos de metano.

6.3 Calibración del modelo utilizando perfiles del Pozo Mallik 5L-38

Durante el invierno boreal 2001-2002, y en el marco del proyecto científico “2002 Gas Hydrate Production Research Well Program”, se perforaron tres pozos de investigación en el Delta del río Mackenzie, Canadá, con el objetivo de investigar más profundamente

un importante depósito de hidratos de metano que había sido previamente observado en el pozo Mallik 2L-38 [38]. En estos pozos, denominados Mallik 3L-38, 4L-38 y 5L-38, se realizaron distintos experimentos geofísicos y de producción. En particular, con el objetivo de analizar *in situ* las propiedades físicas de los hidratos de metano y de los sedimentos que los contienen, se realizó un extenso programa de perfilaje en el pozo Mallik 5L-38. Tales observaciones permitieron determinar que en este sitio y por debajo de un importante espesor de permafrost, se encuentra un intervalo de aproximadamente 200 metros de sedimentos que contienen hidratos de metano, ocupando hasta el 80 por ciento del espacio poral [38]. La Figura 6.4 muestra algunos de los perfiles registrados

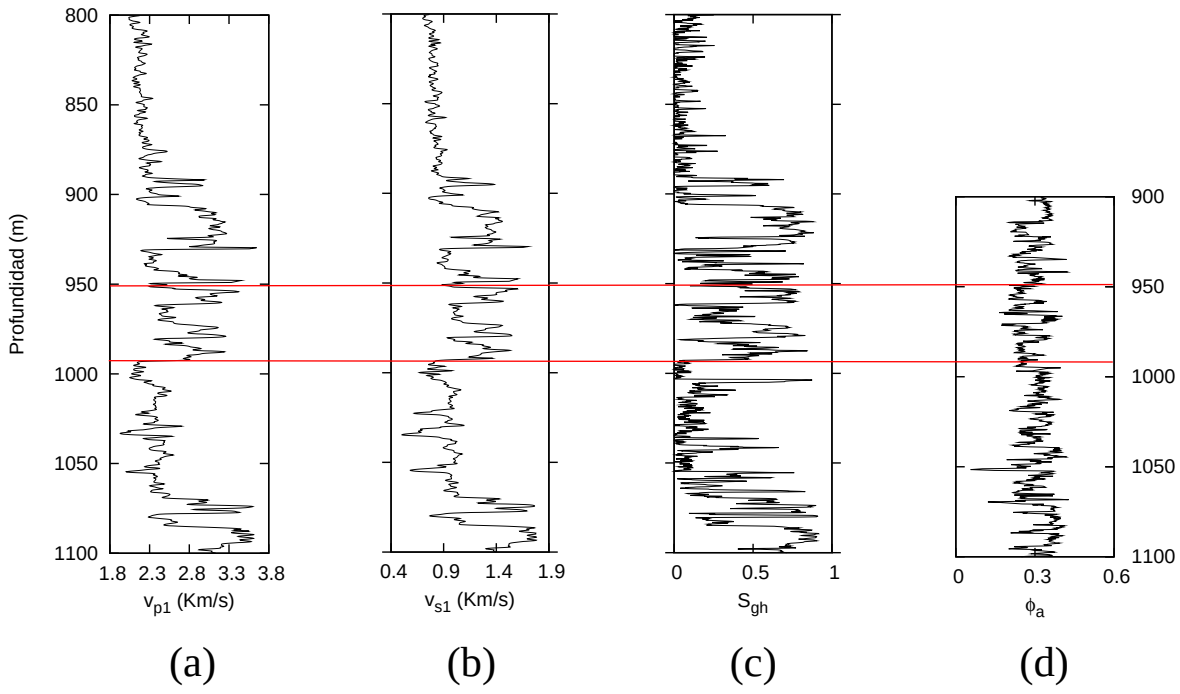

Figura 6.4: Perfiles y datos derivados de perfiles obtenidos en el pozo Mallik 5L-38, Delta del Mackenzie, Canadá: (a) velocidad sónica compresional, (b) velocidad sónica de corte, (c) saturación de hidratos estimada de medidas de resistividad y (d) porosidad estimada de datos de densidad. El intervalo que se encuentra delimitado por las dos rectas rojas se corresponde con la zona B, de acuerdo con Dallimore y Collet [23]. Los datos que se muestran en esta figura fueron tomados de [24].

en este pozo. Las distintas columnas muestran (a) la velocidad sónica compresional, (b) la velocidad sónica de corte, (c) la saturación de hidratos (porcentaje del espacio poral

ocupado por hidratos) derivado del perfil de resistividad, y (d) la porosidad estimada a partir de datos de densidad, todos ellos en función de la profundidad. En esta figura podemos observar la presencia de hidratos en los sedimentos a partir de los 890 metros de profundidad, aproximadamente. Además, resulta muy claro el notable aumento de las velocidades sísmicas con el aumento de la saturación de hidratos. Aunque no mostramos niveles de atenuación, en este pozo se encontró que los mismos aumentan con la saturación de hidratos, tanto para la onda sónica compresional como de corte [38].

Con el objetivo de calibrar el modelo teórico presentado en el capítulo anterior, utilizaremos los datos que se encuentran en la Figura 6.4. Para lograr esto, debemos asumir cierta configuración geométrica para la distribución de los hidratos en el espacio poral. En este sentido, de acuerdo con la literatura existen tres configuraciones geométricas extremas [90]: 1) los hidratos de metano "flotan" en el espacio poral; 2) los hidratos constituyen una de las componentes de la matriz, y 3) los hidratos de metano actúan como un cemento entre los granos de los sedimentos. Todavía no hay acuerdo claro sobre si la presencia de los hidratos afecta únicamente las propiedades mecánicas de la matriz rocosa o las de los fluidos, o las de ambas fases. Por esta razón, asumiremos una configuración geométrica alternativa entre las mencionadas anteriormente y que se esquematiza en la Figura 6.5. En ella podemos ver que una parte de los hidratos de metano se encuentra

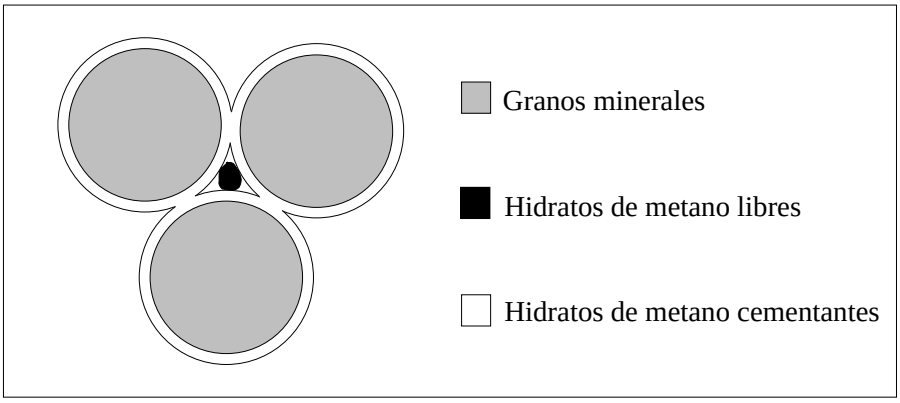

Figura 6.5: Esquema de la configuración geométrica de la distribución de hidratos en el espacio poral, utilizada para calibrar el modelo teórico.

fuertemente acoplada a los granos minerales y los cementan, y el resto constituye una matriz de hidratos débilmente acoplada al sólido 1. El resto del espacio poral se encuentra ocupado por agua. Cabe remarcar aquí que en el área de este pozo se ha observado

que los hidratos muestran interconexión [12], lo cual es una condición que deben cumplir las fases del medio de acuerdo con el modelo de Santos et al. [86].

Describamos el modelo propuesto en término de las variables del modelo teórico: dado un volumen de agregado V_b, asumimos que está compuesto por un volumen V_{gh} de hidratos de metano, V_{mg} de granos minerales y V_f de fluido poral. El volumen total de hidratos (V_{gh}) está conformado por una parte *cementante* V_{gh}^c y una parte *libre* V_{gh}^f llenando el espacio poral, de modo que $V_{gh} = V_{gh}^c + V_{gh}^f$. El primer sólido del modelo compuesto, con un volumen V_1 de acuerdo con la notación del capítulo anterior, se define como un medio efectivo formado por los granos minerales de la roca y el volumen V_{gh}^c de hidratos cementando los granos. La parte remanente de los hidratos constituye el segundo sólido del modelo, el cual forma una matriz sólida débilmente acoplada a la matriz del sólido 1, y con un volumen $V_3 \equiv V_{gh}^f$. El resto del espacio poral está ocupado por un volumen $V_2 \equiv V_f$ de agua líquida. Introducimos un parámetro llamado *coeficiente de cementación* de los hidratos, definido mediante $C = V_{gh}^c/V_{gh}$, que representa la proporción de hidratos que cementa a los granos sólidos. Definimos también la *saturación total* de hidratos de metano, dada por $S_{gh} = V_{gh}/V_p$, donde $V_p = V_b - V_{mg}$ es el *volumen poral*, es decir, el volumen del espacio poral cuando la roca está completamente descongelada. Por último, la *porosidad absoluta* de la roca está definida como $\phi_a = V_p/V_b$.

Para calibrar el modelo consideramos en particular los datos que se encuentra en el sector delimitado por las rectas rojas de la Figura 6.4. El mismo comprende profundidades que van desde los 950m a los 990m, y se corresponde con un intervalo estable que contiene hidratos de metano (*zona B*, de acuerdo con Dallimore y Collet [23]). En esta región los hidratos se encuentran en los poros de una roca sedimentaria cuya matriz está compuesta principalmente de cuarzo, con proporciones menores de minerales de arcilla, tales como illita, esmectitas y caolinita. Para este tipo de litologías se suele definir el contenido de arcilla γ, como la relación entre el volumen de minerales de arcilla y el volumen total de granos minerales. Luego, dados la porosidad efectiva ϕ_a, la saturación de hidratos S_{gh}, el coeficiente de cementación C y el contenido de arcilla γ, queda completamente determinado el modelo en estudio. En tal sentido, el sólido 1 del modelo está compuesto por un volumen $V_{gh}^c = V_b \phi_a S_{gh} C$ de hidratos de metano, un volumen $V_b(1-\phi_a)\gamma$ de minerales de arcilla, y un volumen $V_b(1-\phi_a)(1-\gamma)$ de granos de cuarzo.

Los dos modelos de cementación principales que se pueden utilizar para obtener los módulos de corte y de volumen (efectivos) de la matriz del sólido 1, consideran que el

material que cementa a los granos se encuentra cubriendo uniformemente las superficies de los granos o que está ubicado en los contactos entre los mismos. En nuestro caso, usamos el enfoque desarrollado por Dvorkin et al. [32], asumiendo que el cemento se encuentra uniformemente distribuido en las superficies de los granos sólidos. Además, para obtener las propiedades elásticas de los granos minerales usamos el promedio de Voigt-Reuss-Hill [62], considerando una mezcla efectiva de cuarzo y arcilla.

La fracción de hidratos que cementa a los granos minerales produce una reducción de porosidad y, consecuentemente, un cambio en las propiedades hidráulicas de la matriz del sólido 1 del modelo. Para tener en cuenta este efecto, consideramos una *porosidad reducida* de la forma $\phi_a^r = \phi_a(1 - C\ S_{gh})$. Luego, utilizamos esta porosidad en la relación de Kozeny-Carman, para aproximar la permeabilidad absoluta de la matriz del sólido 1 en la forma [62]

$$\kappa_{1,0} = B_k \frac{(\phi_a^r)^3}{(1-\phi_a^r)^2} D^2.$$

En esta ecuación, B_k es un factor geométrico, considerado igual a 0.003 en este trabajo [13], y D es un valor promedio para el tamaño de los granos minerales para una mezcla de cuarzo y arcilla, dado por [62]

$$\frac{1}{D} = \frac{\gamma}{d_{arcilla}} + \frac{(1-\gamma)}{d_{cuarzo}},$$

donde $d_{arcilla}$ y d_{cuarzo} son tamaños promedios para los granos de arcilla y cuarzo, respectivamente.

Para obtener las propiedades elásticas de la matriz de hidratos de metano libres, utilizamos la misma metodología que presentamos en el capítulo anterior para calcular las propiedades de una matriz de hielo. Es decir, usamos la teoría de percolación que se encuentra en las expresiones (5.16), pero considerando los parámetros físicos de los hidratos para determinar los factores $k_{s3,m}^{max}$ y $\mu_{s3,m}^{max}$. Por otra parte, dado que las propiedades de los hidratos de metano son similares a las del hielo, para estimar la permeabilidad absoluta de la matriz de hidratos repetimos el razonamiento que presentamos en el capítulo anterior. Es decir, utilizamos la ecuación (5.17) para calcular la permeabilidad absoluta de la matriz de hidratos, pero considerando la porosidad reducida.

Por último, el fluido del modelo es agua líquida, ocupando un volumen $V_f = V_b\phi_a(1 - S_{gh})$.

Los valores que consideramos en este trabajo para los parámetros físicos de los distintos constituyentes de las fases del modelo se encuentran en la Tabla 6.1. De acuerdo con

Granos de cuarzo	módulo de volumen	36GPa [12]
	módulo de corte	45GPa [12]
	densidad	2.65g/cm^3 [12]
	d_{cuarzo}	8×10^{-3}cm [13]
Granos de arcilla	módulo de volumen	20.9GPa [12]
	módulo de corte	6.8GPa [12]
	densidad	2.58g/cm^3 [12]
	d_{clay}	3×10^{-5}cm [13]
Hidratos de metano	módulo de volumen	7.7GPa [12]
	módulo de corte	3.2GPa [12]
	densidad	0.9g/cm^3 [12]
Agua	módulo de volumen	2.3GPa [12]
	densidad	1.03g/cm^3 [12]
	viscosidad	0.018P [38]

Tabla 6.1: Parámetros físicos utilizados en el modelo para representar los sedimentos del pozo Mallik 5L-38.

el modelo propuesto, para describir el comportamiento de los sedimentos con hidratos necesitamos estimar valores representativos para el parámetro de cementación C. Con este objetivo, de los distintos perfiles medidos en el pozo Mallik 5L-38, consideramos los que se muestran en la Figura 6.4. Además, estimamos para cada profundidad la fracción de arcilla (γ) a partir de la columna litológica de la Figura 1 del trabajo elaborado por Dallimore y Collet [23]. También, asumimos que las velocidades sónicas medidas se corresponden con las velocidades v_{p1} y v_{s1} del modelo compuesto. Luego, para cada profundidad del intervalo considerado (zona B), obtenemos el valor de C que minimiza la suma de los cuadrados de las discrepancias entre las velocidades sónicas v_{p1} y v_{s1} medidas y las teóricas obtenidas de acuerdo con el modelo compuesto. Para estos cálculos, y debido a su influencia despreciable, no tenemos en cuenta efectos disipativos asociados a fricción intergranular o interna.

Una vez estimados los valores del parámetro de cementación para cada profundidad, los agrupamos en función de la porosidad absoluta ϕ_a. Luego, para reducir la dispersión de este parámetro con el objetivo de analizar más claramente el comportamiento de C vs. ϕ_a, dividimos el rango de variación de la porosidad absoluta en 15 intervalos iguales, y obtenemos el valor promedio de C para cada uno de ellos. En este sentido, la Figura

6.6 muestra los 15 valores promedio de C en función de la porosidad absoluta (puntos rojos). En ella podemos observar una fuerte correlación entre estas variables, con una clara tendencia a aumentar C con la disminución de la porosidad absoluta. Esta figura muestra también un ajuste realizado sobre las estimaciones con un polinomio de grado 3 (línea azul), lo que nos permite contar con una relación empírica $C = C(\phi_a)$.

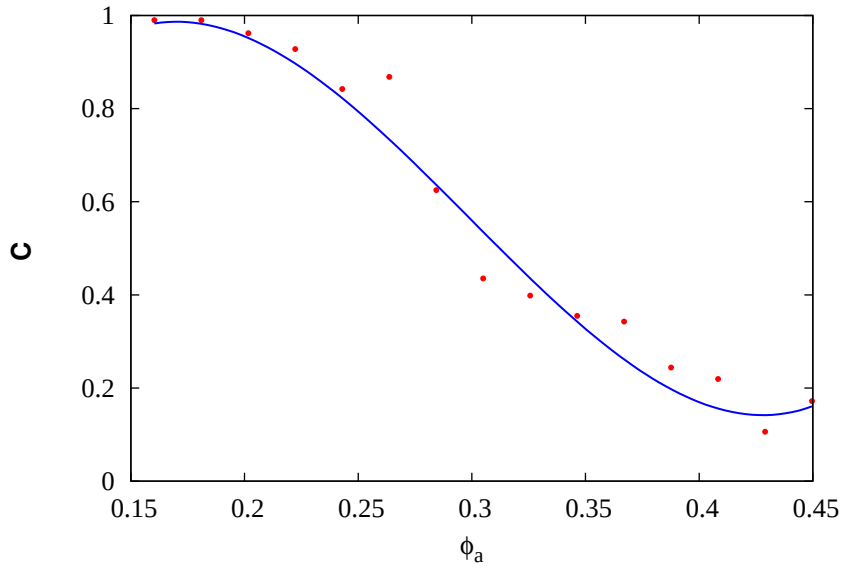

Figura 6.6: Promedios de los valores estimados de C en función de ϕ_a (puntos rojos) y un ajuste con un polinomio de grado 3 (línea azul).

Con el objetivo de analizar si la relación polinómica $C = C(\phi_a)$ que hemos encontrado representa satisfactoriamente el comportamiento de los sedimentos con hidratos de metano, calculemos las velocidades v_{p1} y v_{s1} usando tal relación y comparemos estos valores con las velocidades sónicas medidas. En este sentido las Figuras 6.7 y 6.8 muestran, en función de la profundidad, las velocidades sónicas modeladas usando la relación $C = C(\phi_a)$ y las medidas, para la onda compresional y de corte respectivamente. En ellas podemos observar una muy buena correlación entre los valores modelados y medidos, mostrándonos que la expresión empírica muy simple que hemos obtenido para expresar el parámetro de cementación en función de la porosidad absoluta representa muy bien el comportamiento general de los sedimentos con hidratos de metano en estudio. Esta conclusión se basa también en un análisis de sensibilidad de las velocidades teóricas v_{p1} y v_{s1} con respecto al parámetro C, que fue verificado observando diferencias significativas

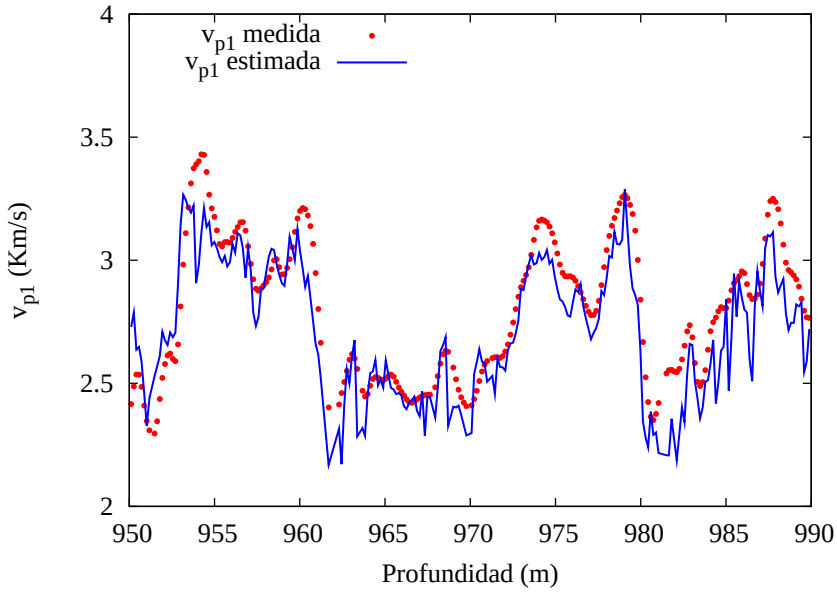

Figura 6.7: Velocidades sónicas compresionales estimadas y medidas. Los datos reales fueron tomados de [23].

entre tales velocidades usando dos valores extremos para el parámetro de cementación. La relación $C = C(\phi_a)$ puede resultar una herramienta muy útil para analizar el comportamiento general de sedimentos que contienen hidratos de metano, similares a los que se encuentran en el área del pozo Mallik 5L-38.

Debido a que la deposición de hidratos de metano en el área donde se encuentra el pozo Mallik 5L-38 se encuentra fuertemente controlada por la litología, y considerando que los mismos se forman preferentemente en intervalos ricos en arena, con grandes espacios porales [39], podemos esperar que exista una correlación entre la porosidad absoluta de la roca y la saturación de hidratos. Para verificar esto, la Figura 6.9 muestra la porosidad absoluta en función de la saturación de hidratos (puntos rojos) en el caso de los datos reales correspondientes a la zona B. En ella podemos observar que efectivamente se produce una fuerte correlación entre estas variables, y este comportamiento nos permite determinar una expresión empírica de la porosidad absoluta en función de la saturación de hidratos. En tal sentido, la Figura 6.9 muestra también una regresión lineal que efectuamos sobre estos datos (línea azul), y podemos verificar que la misma representa muy bien el comportamiento entre estas variables. Es interesante notar que el análisis del comportamiento de C vs. ϕ_a y de ϕ_a vs. S_{gh}, realizados a partir de los datos

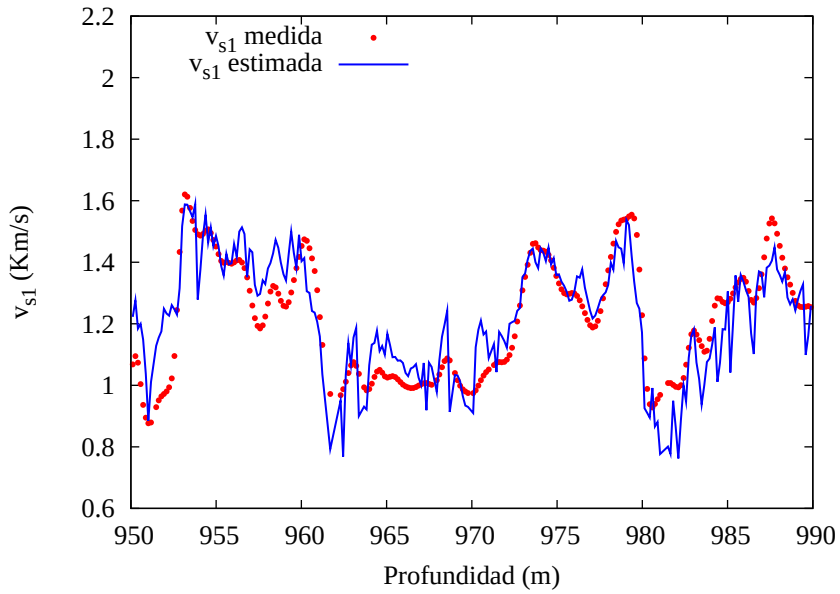

Figura 6.8: Velocidades sónicas de corte estimadas y medidas. Los datos reales fueron tomados de [23].

que se encuentran en las Figuras 6.6 y 6.9, permiten concluir que existe una tendencia decreciente del coeficiente de cementación C con el aumento de la saturación de hidratos de metano para el pozo en estudio.

Por último, el control litológico que mencionamos recientemente sugiere también que la saturación de hidratos y el contenido de arcilla deberían estar correlacionados. En este sentido, Guerin y Goldberg [39] propusieron que en el pozo que estamos estudiando se puede expresar el contenido de arcilla como $\gamma = 0.8 - 0.6S_{gh}$.

6.4 Propagación de ondas en sedimentos que contienen hidratos de metano

En esta sección utilizaremos el modelo que calibramos previamente para estudiar la propagación de ondas en sedimentos que contienen hidratos de metano. Para simplificar el análisis, en todos los experimentos numéricos que presentamos en esta sección consideraremos las fórmulas empíricas que relacionan la porosidad absoluta, el contenido de arcilla y el coeficiente de cementación con la saturación de hidratos. De esta manera, la saturación de hidratos determina por completo todos los parámetros involucrados en el modelo teórico.

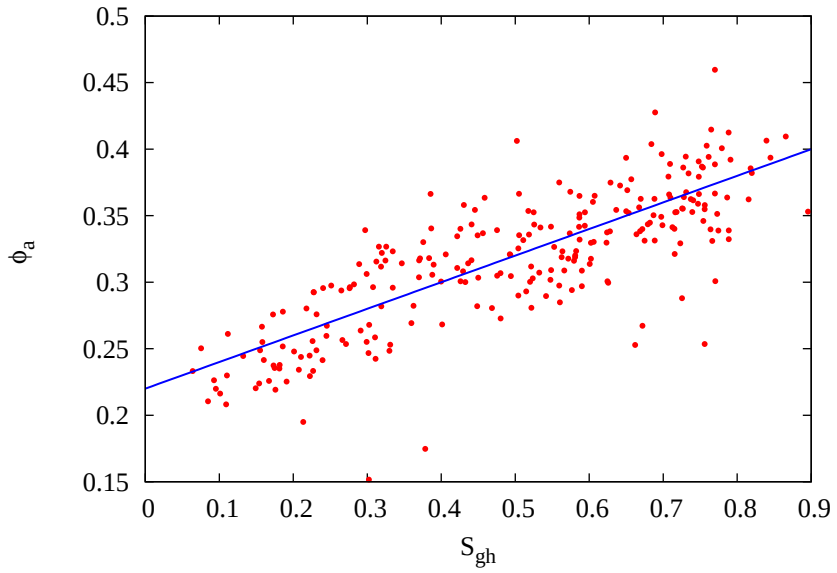

Figura 6.9: Porosidad absoluta vs saturación de hidratos (puntos rojos), y un ajuste lineal realizado sobre los datos (línea azul). Los datos reales fueron tomados de [23].

6.4.1 Velocidades compresionales y de corte

Como hemos visto en el capítulo anterior, bajo las suposiciones del modelo compuesto podemos distinguir tres campos de desplazamientos, relacionados con las dos matrices sólidas y con el desplazamiento relativo del fluido. Siguiendo el análisis de onda plana que explicamos en el mismo capítulo, y bajo las suposiciones que planteamos en este capítulo para los sedimentos que contienen hidratos de metano, podemos obtener las cinco velocidades de fase v_j, $j = p_1, p_2, p_3, s_1, s_2$, y las respectivas atenuaciones intrínsecas, en función de la saturación de hidratos.

En tal sentido, la Figura 6.10 muestra las velocidades compresionales v_{p1} y v_{p2}, en función de la saturación de hidratos de metano y para una frecuencia de 10KHz, valor que está dentro del rango de frecuencias usualmente utilizado en perfilajes sónicos. También incluimos las velocidades sónicas compresionales medidas, para comparar estos valores con los modelados. En ella podemos observar una muy buena correspondencia entre la velocidad clásica modelada y la medida, excepto para muy bajas saturaciones de hidratos. Podemos también notar que se produce un aumento de las dos velocidades (v_{p1} y v_{p2}) con la saturación de hidratos, y en particular es interesante remarcar que la onda lenta

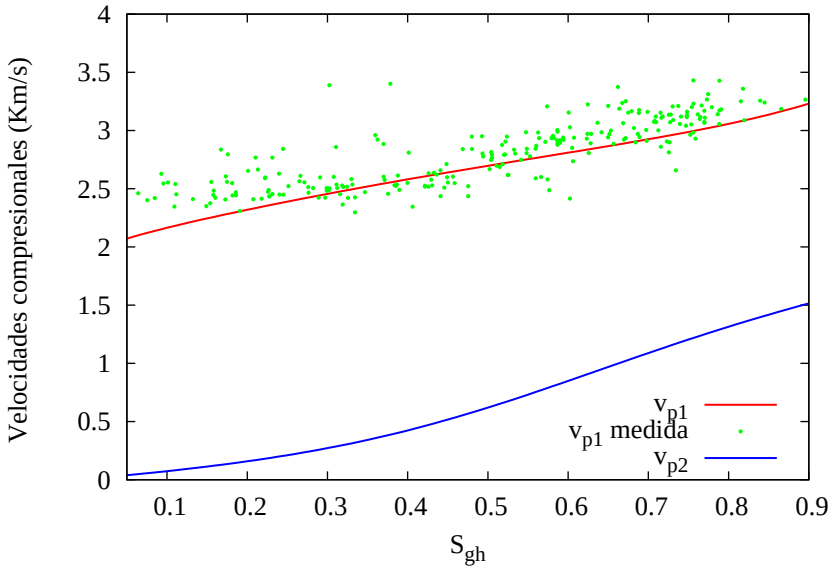

Figura 6.10: Velocidades de fase v_{p1} y v_{p2}, en función de la saturación de hidratos de metano y para una frecuencia de 10KHz. Las velocidades sónicas medidas (tomadas de [23]) también se incluyen para comparar los valores medidos con los modelados.

p_2 toma valores significativos para altos contenidos de hidratos de metano.

Por otra parte, la Figura 6.11 muestra las velocidades de corte v_{s1} y v_{s2}, en función de la saturación de hidratos y para una frecuencia de 10KHz. Observando esta figura encontramos que cualitativamente el comportamiento de las ondas de corte es similar al que mostraron las ondas compresionales; es decir, se produce un aumento de las dos velocidades (v_{s1} y v_{s2}) con la saturación de hidratos, y la onda lenta s_2 toma valores significativos para altas saturaciones de hidratos de metano. También en este caso se produce una buena correspondencia entre la velocidad clásica medida y la modelada, excepto para muy bajas saturaciones. Estas discrepancias que se producen para ambos tipos de ondas en el caso de bajas saturaciones se deben a las simplificaciones que hemos asumido para obtener un modelo muy simple dependiente de una sola variable (S_{gh}).

Respecto de la velocidad de la onda compresional tipo p_3, resultó ser despreciable y por esta razón no incluimos la curva respectiva.

Para completar este análisis, también calculamos el conjunto de factores de calidad Q_j, $j = p_1, p_2, p_3, s_1, s_2$, en función de la saturación de hidratos de metano y para una frecuencia de 10KHz. Las ondas p_1, p_2, s_1 y s_2 resultaron tener factores de calidad

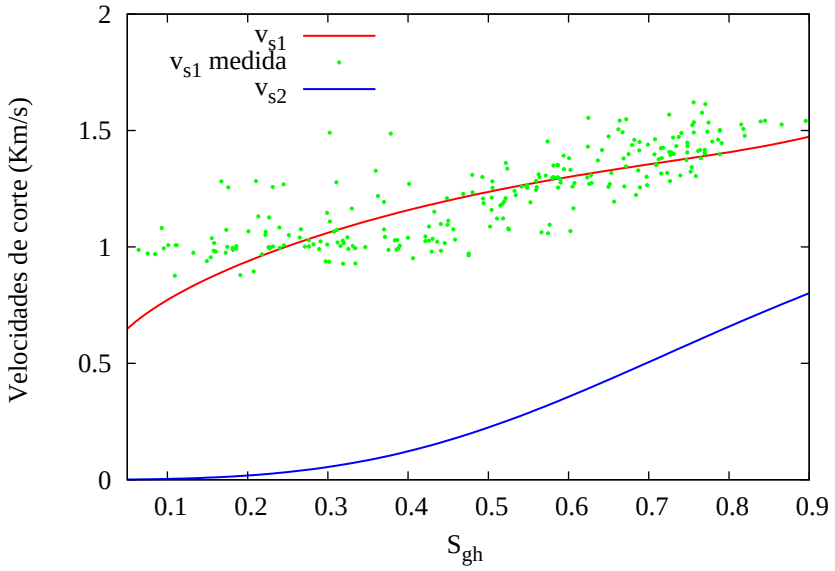

Figura 6.11: Velocidades de fase v_{s1} y v_{s2}, en función de la saturación de hidratos de metano y para una frecuencia de 10KHz. Las velocidades de corte medidas (tomadas de [23]) también se incluyen para comparar los valores medidos con los modelados.

muy grandes para todas las saturaciones de hidratos consideradas, lo que nos indica que estas ondas no se ven afectadas de manera significativa por efectos de fricción viscosa para frecuencias cercanas al valor utilizado. En particular, esto sugiere que para estas frecuencias, las ondas lentas p_2 y s_2 poseen características de ondas de propagación.

Por último, la onda p_3 resultó poseer un factor de calidad Q_{p3} aproximadamente independiente de la saturación de hidratos de metano, y con un valor $Q_{p3} \approx 0.5$. Este comportamiento implica que esta onda se ve violentamente afectada por efectos de fricción viscosa, y de hecho, para estas frecuencias esta perturbación posiblemente no sea realmente una onda de propagación sino un proceso de difusión de presiones.

Las cinco ondas que hemos estudiado aquí están involucradas en los efectos de *scattering* (particiones de energía que ocurren en las heterogeneidades del medio) cuando las ondas clásicas viajan a través de sedimentos que contienen distribuciones heterogéneas de hidratos de metano. Luego, estas conversiones de energía podrían afectar seriamente el comportamiento de tales ondas clásicas. Para estudiar en detalle este posible mecanismo de atenuación en sedimentos que contienen hidratos de metano, calculemos las conversiones de energía que suceden en estos ambientes.

6.4.2 Conversiones de energía en discontinuidades planas

Como un primer acercamiento al problema de entender como afectan los efectos de scattering al comportamiento de ondas clásicas que viajan a través de sedimentos que contienen distribuciones heterogéneas de hidratos de metano, calculemos los coeficientes energéticos de reflexión y transmisión para ondas clásicas (compresionales y de corte) que inciden sobre una interfase plana que separa dos semiespacios homogéneos que contienen distintas saturaciones de hidratos. Esto nos permitirá cuantificar la proporción de energía incidente que es convertida a cada tipo de onda reflejada y transmitida y, entonces, podremos analizar cualitativamente los efectos que estas particiones tienen sobre la onda clásica incidente. El procedimiento que utilizamos para calcular los coeficientes energéticos es el que explicamos en el capítulo anterior, y para obtener los distintos parámetros involucrados en tales cálculos consideramos el modelo calibrado en este capítulo para sedimentos que contienen hidratos de metano.

Con este objetivo, calculemos los coeficientes energéticos de reflexión y transmisión para una onda compresional clásica que incide sobre la interfase plana, para una frecuencia de 10KHz. Supongamos inicialmente que el semiespacio superior (Ω_u, de acuerdo con la notación del capítulo anterior) está constituido por sedimentos que contienen una saturación de hidratos $S_{gh} = 0.1$, y obtengamos los coeficientes energéticos para distintos ángulos de incidencia y saturaciones del semiespacio inferior (Ω_d). Además, para cuantificar la fracción de energía incidente que es convertida a ondas lentas transmitidas, definamos el *coeficiente energético de transmisión total a ondas lentas* como $ET_{lentas} = ET_{p2} + ET_{p3} + ET_{s2}$. En tal sentido, la Figura 6.12 muestra este coeficiente en función del ángulo de incidencia y de la saturación de hidratos del semiespacio inferior. En ella podemos observar que ocurren conversiones de energía muy importantes a ondas lentas transmitidas. De hecho, de acuerdo con este gráfico más de la mitad de la energía incidente es convertida a estos tipos de ondas para ciertos ángulos de incidencia y contrastes de S_{gh}. Analizando las contribuciones individuales de las distintas ondas lentas involucradas, observamos que estas conversiones se producen principalmente a ondas tipo p_2 transmitida. También es interesante notar en la Figura 6.12 la trayectoria del ángulo crítico, que es donde se producen las mayores conversiones de energía. Además, esta figura muestra que para mayores contrastes de S_{gh}, el ángulo crítico es menor.

La Figura 6.13 muestra el coeficiente energético de transmisión ET_{s1}, en función del ángulo de incidencia y de la saturación de hidratos del semiespacio inferior. En ella

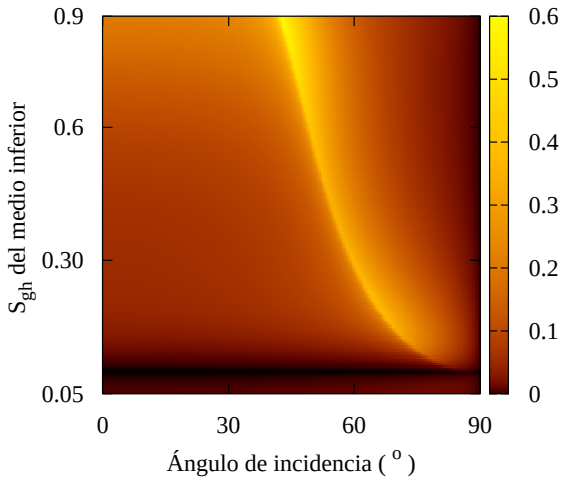

Figura 6.12: Coeficiente energético de transmisión total a ondas lentas en función del ángulo de incidencia y de la saturación de hidratos del semiespacio inferior. La onda incidente es una onda compresional clásica, la saturación de hidratos del semiespacio superior es 0.1 y la frecuencia utilizada es de 10KHz.

podemos ver que también ocurren conversiones de energía de importancia hacia ondas de corte clásicas, principalmente para fuertes contrastes de saturaciones de hidratos y ángulos de incidencia cercanos (pero mayores) al valor crítico. La fracción de energía incidente convertida a este tipo de onda supera en ciertos casos el 15 por ciento.

El comportamiento de los otros coeficientes energéticos también fue analizado, pero no incluimos sus curvas para evitar extendernos demasiado. Con respecto a las ondas compresionales clásicas, se comportan como esperamos: el coeficiente ER_{p1} es pequeño para ángulos de incidencia menores que el valor crítico, mientras que es muy importante para ángulos de incidencia mayores que tal valor; por otra parte, el comportamiento opuesto ocurre para el coeficiente ET_{p1}. En el caso de ER_{s1}, encontramos que este coeficiente es significativo sólo para ángulos de incidencia del orden o mayores que el ángulo crítico, tomando en estos casos valores del orden de 0.1. Finalmente, el *coeficiente energético de reflexión total a ondas lentas* ($ER_{lentas} = ER_{p2} + ER_{p3} + ER_{s2}$) es significativo únicamente para ángulos de incidencia cercanos al crítico, con valores del orden de 0.15; esta proporción de energía es principalmente convertida a ondas compresionales

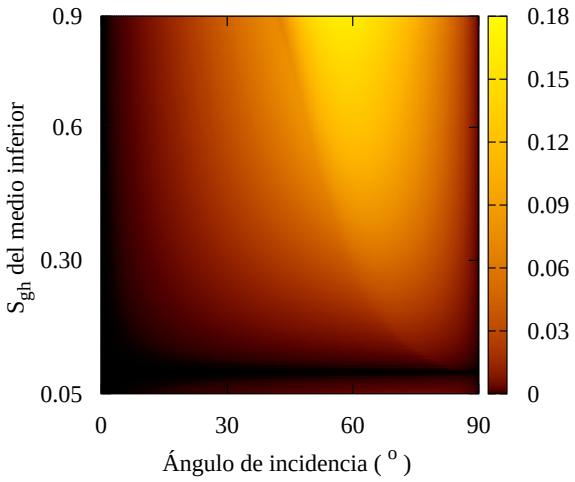

Figura 6.13: Coeficiente energético de transmisión ET_{s1} en función del ángulo de incidencia y de la saturación de hidratos del semiespacio inferior. La onda incidente es una onda compresional clásica, la saturación del semiespacio superior es 0.1 y la frecuencia considerada es de 10KHz.

tipo p_3.

Analicemos ahora lo que ocurre con las particiones de energía cuando el contraste de saturación de hidratos es el opuesto. Para esto, supongamos que la saturación del semiespacio superior es $S_{gh} = 0.85$. En este caso, como la velocidad de fase de la onda compresional clásica en el semiespacio superior es mayor que las velocidades de fase de las ondas que se propagan en el semiespacio inferior para prácticamente todo el rango de saturaciones, no esperamos que existan ángulos críticos. Con respecto a la energía reflejada en la interfase, observamos que mientras los coeficientes ER_{p1} y ER_{s1} son prácticamente despreciables, el coeficiente ER_{lentas} tiene valores significativos. En este sentido, la Figura 6.14 muestra el coeficiente energético de reflexión total a ondas lentas en función del ángulo de incidencia y de la saturación de hidratos del semiespacio inferior. En ella podemos observar que proporciones importantes de la energía incidente son convertidas a ondas lentas reflejadas, con valores cercanos al 20 por ciento principalmente para contrastes fuertes de saturaciones. Esta energía es convertida principalmente a ondas compresionales tipo p_2.

Con respecto a la energía transmitida, el coeficiente energético de transmisión total a ondas lentas es despreciable, mientras que el coeficiente ET_{p1} posee valores muy importantes para todos los ángulos de incidencia y contrastes de saturaciones de hidratos. Por último, el coeficiente ET_{s1} es no despreciable únicamente para contrastes fuertes de S_{gh} y ángulos de incidencia grandes.

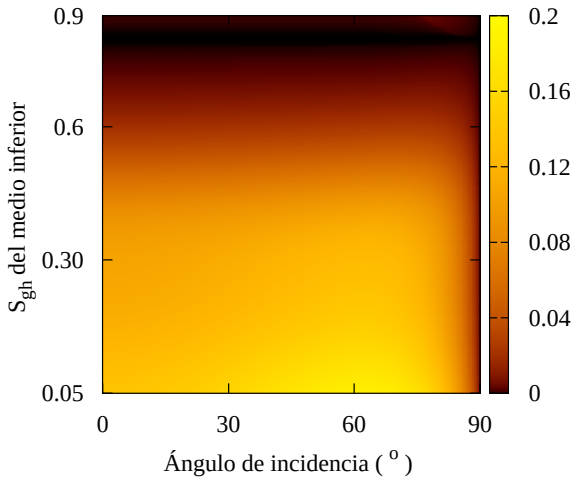

Figura 6.14: Coeficiente energético de reflexión total a ondas lentas en función del ángulo de incidencia y de la saturación de hidratos del semiespacio inferior. La onda incidente es una onda compresional clásica, la saturación del semiespacio superior es 0.85 y la frecuencia utilizada es de 10KHz.

Con el objetivo de analizar las particiones de energía que se producen cuando ondas de *corte* clásicas inciden sobre una heterogeneidad plana, extendamos el procedimiento descripto en el capítulo anterior para calcular los coeficientes energéticos de reflexión y transmisión en estos casos. Dado que el procedimiento es similar al que presentamos para la incidencia de una onda compresional clásica, no mostraremos aquí los detalles matemáticos. Luego, utilizamos estos resultados para obtener los distintos coeficientes energéticos para los casos que analizamos previamente en esta sección pero considerando la incidencia de una onda de corte clásica. En este sentido, supongamos primero que la saturación de hidratos del semiespacio superior es $S_{gh} = 0.1$. En este caso, la velocidad de fase de la onda incidente (v_{s1}) es menor que las velocidades de fase de las ondas

compresionales clásicas que se propagan en ambos semiespacios, e incluso para ciertos contenidos de hidratos del semiespacio inferior esta velocidad también puede ser menor que las velocidades v_{s1}, v_{p2} y v_{s2} en el semiespacio inferior. Por esta razón, en este caso podemos tener varios ángulos críticos, y entonces las características de las conversiones de energía son más complejas que las que analizamos previamente.

La Figura 6.15 muestra el coeficiente energético ET_{lentas} en función del ángulo de incidencia y de la saturación de hidratos del semiespacio inferior. En ella podemos observar que también cuando incide una onda de corte clásica se pueden producir conversiones muy importantes de energía a ondas lentas. De hecho, en este gráfico podemos ver que para contrastes fuertes de saturaciones de hidratos y ángulos de incidencia intermedios, incluso más de la mitad de la energía incidente se puede convertir a energía de ondas lentas transmitidas. Al considerar las contribuciones de las distintas ondas en estas particiones, encontramos que se producen principalmente conversiones de energía a onda de corte tipo s_2. Por otra parte, fracciones significativas de la energía incidente se convierten

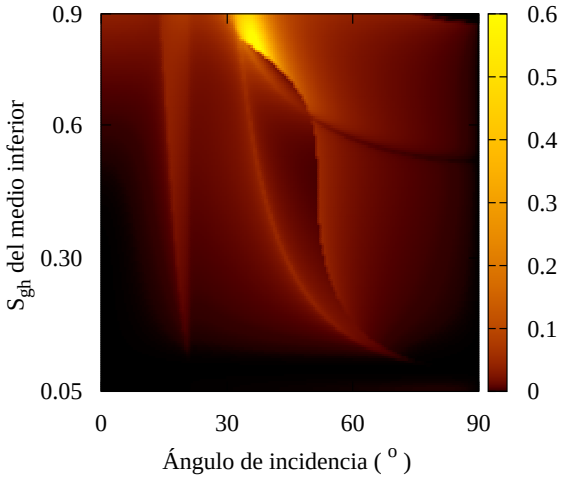

Figura 6.15: Coeficiente energético de transmisión total a ondas lentas en función del ángulo de incidencia y de la saturación de hidratos del semiespacio inferior. La onda incidente es una onda de corte clásica, la saturación del semiespacio superior es 0.1 y la frecuencia considerada es de 10KHz.

también a ondas lentas reflejadas, principalmente para fuertes contrastes de la saturación

de hidratos y ángulos de incidencia intermedios, con valores del coeficiente ER_{lentas} de hasta 0.15. Estas conversiones se deben principalmente a generación de ondas compresionales tipo p_3.

Con respecto a la generación de ondas clásicas en la interfase, hay conversiones no despreciables de la energía incidente a ondas compresionales tipo p_1 tanto reflejadas como transmitidas, pero en todos los casos las fracciones involucradas de energía incidente son menores al 10 por ciento. También hay conversiones importantes a ondas de corte clásicas reflejadas y transmitidas: en el caso del coeficiente ET_{s1}, el mismo toma valores importantes para ángulos de incidencia menores que el ángulo crítico correspondiente a la onda s_1 transmitida, mientras que los mayores valores del coeficiente ER_{s1} suceden cuando el ángulo de incidencia es mayor que tal valor crítico.

Por último, analicemos el comportamiento de las conversiones de energía si invertimos el contraste de saturación de hidratos; es decir, consideremos que $S_{gh} = 0.85$ en el semiespacio superior. En esta situación, la fracción de energía incidente convertida a ondas lentas no es tan importante como en el caso anterior. En este sentido, el coeficiente ER_{lentas} resultó ser no despreciable, principalmente para fuertes contrastes de la saturación de hidratos y ángulos de incidencia grandes, pero con valores por debajo del 8 por ciento. Estas conversiones de energía se deben principalmente a generación de ondas compresionales tipo p_2. Por otro lado, la fracción de energía incidente convertida a ondas lentas transmitidas es despreciable.

Con respecto a la generación de ondas clásicas en la interfase, encontramos que las fracciones de energía incidente convertidas a ondas de corte clásicas transmitidas son en general muy importantes, mientras que el coeficiente ER_{s1} posee valores significativos, principalmente para contrastes fuertes de la saturación de hidratos y grandes ángulos de incidencia. Finalmente, la proporciones de energía convertidas a ondas compresionales clásicas reflejadas son despreciables, mientras que el coeficiente energético ET_{p1} es muy importante, con valores de hasta el 20 por ciento, principalmente para fuertes contrastes de S_{gh} y ángulos de incidencia cercanos (pero menores) al ángulo crítico correspondiente a la onda p_1 transmitida.

6.4.3 Pérdidas de amplitudes en sedimentos que contienen distribuciones altamente heterogéneas de hidratos de metano

El análisis que efectuamos previamente nos muestra que cuando una onda clásica incide sobre una discontinuidad plana en sedimentos que contienen hidratos de metano, se pueden generar en la interfase ondas lentas que transportan fracciones significativas de la energía incidente, además de las conversiones de energía a ondas clásicas reflejadas y transmitidas. Este hecho nos sugiere cualitativamente que la generación de ondas lentas en heterogeneidades del medio podría tener un rol importante en la atenuación de ondas clásicas que viajan a través de sedimentos que contienen distribuciones heterogéneas de hidratos de metano. Sin embargo, debemos tener en cuenta que estos cálculos son válidos para ondas sísmicas que inciden sobre interfases planas que separan dos semiespacios homogéneos, o equivalentemente, sobre una interfase que separa dos capas planas de espesores mucho mayores que la longitud de onda incidente. Esta suposición puede ser razonable en el rango de frecuencias sísmicas (longitudes de onda largas), pero es incorrecta en el rango de las frecuencias sónicas, para las cuales las ondas sísmicas son frecuentemente afectadas por heterogeneidades de distintas escalas y formas.

Con el fin de analizar el comportamiento de ondas clásicas que viajan a través de sedimentos que contienen distribuciones altamente heterogéneas de hidratos de metano, y para cuantificar las pérdidas de amplitud que experimentan tales ondas debido a conversiones de energía en las heterogeneidades, realizaremos simulación numérica de propagación de ondas en estos medios. Con este objetivo, consideremos la propagación de ondas clásicas a través de un dominio cuadrado $\Omega = [0, L] \times [0, L]$ de lado L. Supongamos además que el medio contiene una dada saturación promedio de hidratos de metano $\bar{S}_{gh}$, la cual resulta de una distribución *patchy* binaria que consiste de regiones irregulares con bajas y altas saturaciones de hidratos de metano. Estas heterogeneidades poseen tamaños menores o del orden de las longitudes de onda de las ondas clásicas primarias, de modo que esperamos que se produzcan conversiones de energía en las interfases irregulares que separan zonas con diferentes saturaciones de hidratos. Dado que queremos realizar estos experimentos numéricos en el rango sónico de frecuencias, para validar la suposición de la distribución patchy de hidratos de metano que estamos proponiendo sería necesario conocer la distribución espacial de los hidratos de metano en los sedimentos con una resolución de algunos centímetros. Sin embargo, la determinación de la saturación de hidratos usando mediciones de perfiles de pozos se realiza frecuentemente

con una resolución vertical mucho menor (del orden de 30 cm para perfilaje resistivo de alta resolución, tal como HRLA™). Esta limitación nos permite asumir que las saturaciones de hidratos derivadas de mediciones de resistividad reflejan valores promedios del campo de saturación de una distribución de hidratos altamente heterogénea a una escala menor, como la que presentamos aquí.

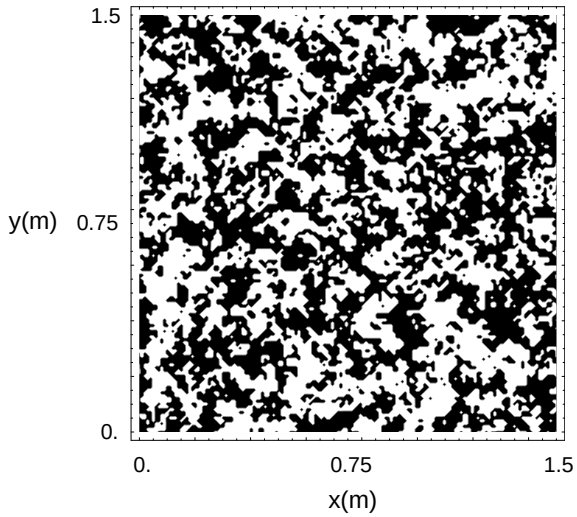

Figura 6.16: Distribución de hidratos de metano considerada en los experimentos numéricos. Las zonas blancas se corresponden con una saturación de hidratos de 0.9, mientras que las zonas negras representan celdas con una saturación de 0.25.

Para realizar los experimentos numéricos consideramos una malla de 150×150 elementos cuadrados iguales de 0.01m de lado; es decir, el dominio es un cuadrado de lado $L = 1.5$m. La Figura 6.16 muestra la distribución de hidratos elegida: las regiones blancas se corresponden con una saturación de hidratos de 0.9, mientras que las negras representan celdas con una saturación de 0.25. La saturación macroscópica resultante es $\bar{S}_{gh} = 0.58$. Además, usamos el modelo calibrado en este capítulo para definir completamente las propiedades de las dos regiones en función de la saturación de hidratos.

Entonces, debemos resolver en el dominio Ω las ecuaciones de movimiento del modelo físico planteadas en el dominio espacio-frecuencia (ecuación (5.10)), con un término adicional que representa la fuente que perturba al medio. Con este fin, utilizamos un procedimiento de descomposición de dominio de elementos finitos: para aproximar los desplazamientos de las dos fases sólidas usamos los espacios de elementos finitos no

conformes definidos por Douglas et al. [28], mientras que para el desplazamiento de la fase fluida utilizamos la parte vectorial del espacio de Raviart-Thomas-Nedelec de orden cero [75, 65]. Luego, para recuperar la solución en el dominio espacio-tiempo, resolvemos las ecuaciones de movimiento para un número finito de frecuencias y usamos la transformada de Fourier inversa. Los detalles de este procedimiento se encuentran en un trabajo presentado por Santos y Sheen [84].

El dominio computacional es excitado (en el tiempo $t = 0$) con una fuente compresional puntual de amplitud arbitraria ubicada en $(x_f, y_f) = (0.75\text{m}, 0.1\text{m})$, actuante sobre las dos fases sólidas y con una frecuencia dominante de 10KHz. Las longitudes de onda asociadas con la onda compresional y de corte clásicas para esa frecuencia y para la saturación macroscópica considerada son de 0.25m y 0.12m, respectivamente. Luego, usamos el procedimiento iterativo de descomposición de dominio para encontrar las transformadas de Fourier de los desplazamientos de los sólidos y de la fase fluida para 110 frecuencias temporales equiespaciadas en el intervalo $(0, 30\text{KHz})$.

Las Figuras 6.17 (a) y (b) muestran, en unidades arbitrarias, la componente vertical del campo de velocidades de las partículas del sólido 1 para los tiempos $t = 0.25$ms y $t = 0.5$ms, respectivamente. En ellas podemos observar que la amplitud de la onda clásica primaria cae drásticamente con la distancia, lo que se debe a fenómenos de divergencia esférica, atenuación intrínseca por fricción viscosa y pérdidas de energía asociadas con efectos de scattering que se producen en las heterogeneidades.

Con el objetivo de aislar las pérdidas de amplitud relacionadas con los efectos de conversiones de energía en las heterogeneidades, realicemos una simulación numérica similar a la anterior pero considerando que el dominio Ω es homogéneo, con una saturación de hidratos constante e igual a la saturación macroscópica del caso heterogéneo (es decir, $S_{gh} = 0.58$). En tal sentido la Figura 6.18 muestra, en función del tiempo, la componente vertical de la velocidad de las partículas de sólido 1 para el caso homogéneo y el heterogéneo, para un receptor ubicado en $x = 0.75$m, $y = 0.7$m. En ella podemos ver que el pico de amplitud correspondiente al arribo de la onda compresional clásica en el caso heterogéneo es mucho menor que en el caso homogéneo. Dado que las dos ondas sufren pérdidas similares de amplitud por efectos de fricción viscosa y divergencia esférica, la caída de amplitud adicional que observamos en el caso heterogéneo se debe a las conversiones de energía que se producen en las interfases irregulares del medio. Estos resultados nos muestran la importancia de los efectos de scattering en la ate-

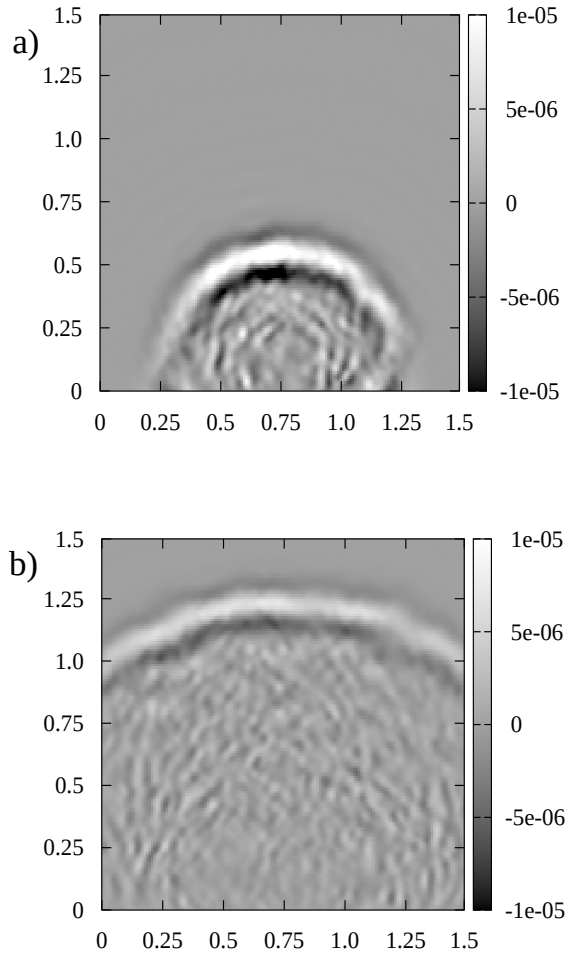

Figura 6.17: Componente vertical del campo de velocidades de las partículas del sólido 1 para los tiempos (a) $t = 0.25$ms y (b) $t = 0.5$ms.

nuación de ondas compresionales clásicas que viajan a través de sedimentos que contienen distribuciones altamente heterogéneas de hidratos de metano.

Para estudiar las conversiones de energía a ondas compresionales que se producen en las heterogeneidades del medio, aislemos la parte compresional del campo de onda total. Con este objetivo, la Figura 6.19 (a) muestra la divergencia del campo de velocidades de las partículas del sólido 1 para un tiempo $t = 0.5$ms. Teniendo en cuenta que las longitudes de onda de las ondas compresionales lentas son más cortas que las de las ondas tipo p_1, podemos observar en la figura la presencia de "fuentes" de ondas compresionales lentas. Esta generación de ondas lentas está asociada con fenómenos de conversión de

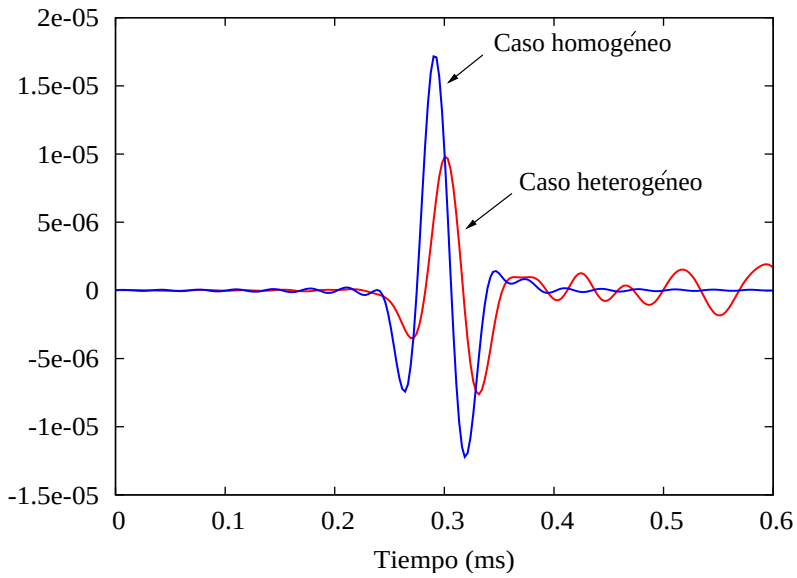

Figura 6.18: Componente vertical de la velocidad de las partículas del sólido 1 en función del tiempo, para un receptor ubicado en $x = 0.75$m, $y = 0.7$m. Las distintas curvas muestran la respuesta del medio en el caso de la distribución altamente heterogénea de hidratos que estamos considerando, y para una distribución homogénea.

modos, y contribuye a producir las caídas de amplitud que observamos en la onda clásica generada en la fuente.

Por otra parte, la Figura 6.19 (b) muestra el rotor del campo de velocidades de las partículas del sólido 1 para el mismo tiempo $t = 0.5$ms, permitiéndonos aislar la fracción de energía incidente convertida a ondas de corte. Observando esta figura podemos concluir que se producen conversiones significativas de energía incidente a ondas de corte en las heterogeneidades del medio.

Con el objetivo de cuantificar las pérdidas de energía que experimenta la onda compresional clásica primaria al viajar a través de los sedimentos heterogéneo que estamos estudiando, estimemos el factor de calidad aproximado Q_{p1} del medio. Para esto, consideremos tres receptores R1, R2, R3, ubicados en las posiciones (x_{Ri}, y_{Ri}), con $x_{Ri} = 0.75$m $(i = 1, 2, 3)$, $y_{R1} = 0.3$m, $y_{R2} = 0.7$m e $y_{R3} = 1.1$m. La Figura 6.20 muestra las trazas de la componente vertical de la velocidad de las partículas del sólido 1 en los tres receptores. En ella podemos ver una fuerte caída de amplitud del arribo de la onda compresional primaria p_1 a medida que el receptor se aleja de la fuente. Para estimar el

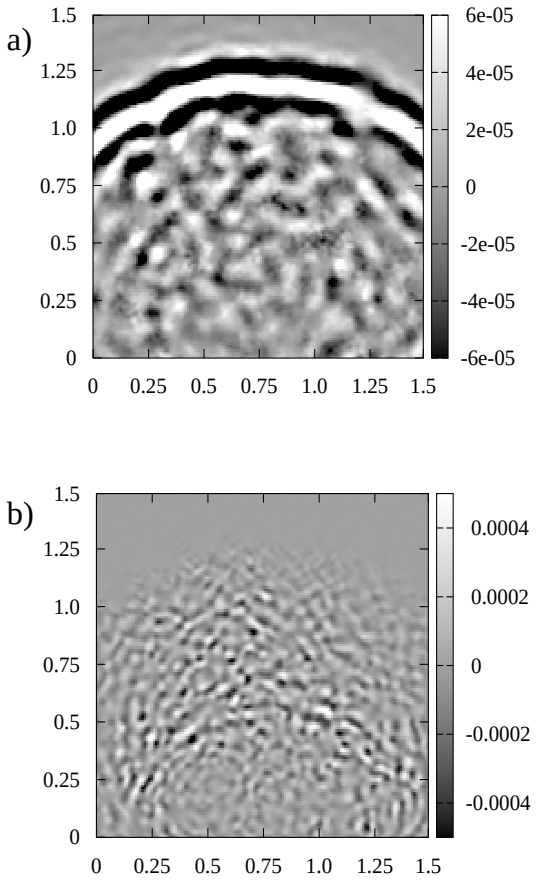

Figura 6.19: Divergencia (a) y rotor (b) del campo de velocidades de las partículas del sólido 1 para un tiempo $t = 0.5$ms. Ambos campos han sido truncados para ver las conversiones de energía con más detalle. Los valores máximos de estos campos son realmente (a) 3.4×10^{-4} y (b) 7.6×10^{-4}.

factor de calidad Q_{p1} del medio, tomamos cada par de receptores Ri, Rj ($i, j = 1, 2, 3$) y usando el método de la relación espectral [62] obtenemos un factor de calidad por cada par de receptores. Luego, para determinar un factor de calidad representativo del medio en estudio, promediamos los 3 valores previamente calculados, obteniendo un factor de calidad promedio $Q_{p1} = 10.5$. Lo interesante de este resultado es que este valor aproxima razonablemente los niveles de atenuación medidos en el pozo Mallik 5L-38. De hecho, los factores de calidad obtenidos de las mediciones tienen un valor promedio $Q_p \simeq 14$ para una saturación de hidratos de metano similar al valor de saturación macroscópica de hidratos (0.58) que usamos en este experimento numérico (ver, por ejemplo, Figura 3

de Guerin et al. [38]).

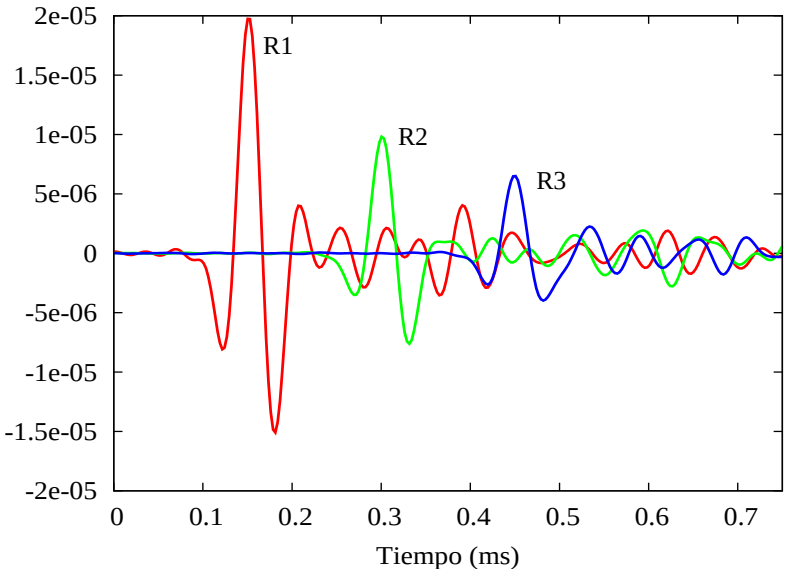

Figura 6.20: Trazas de la componente vertical de la velocidad de las partículas del sólido 1 para los tres receptores R1, R2 y R3.

Ahora, con el objetivo de analizar el comportamiento de las ondas de *corte* clásicas que viajan a través de sedimentos que contienen distribuciones altamente heterogéneas de hidratos de metano, repitamos un análisis similar al que presentamos previamente pero reemplazando la fuente compresional por una fuente de corte puntual, también aplicada sobre ambos sólidos. En este sentido, la Figura 6.21 muestra la componente horizontal del campo de velocidades de las partículas del sólido 1, para el tiempo $t = 0.7$ms. En ella podemos observar que la amplitud del frente de onda s_1 se ve muy afectada por la presencia de las heterogeneidades en el medio.

Para observar las conversiones de energía a ondas compresionales que se producen en las heterogeneidades del medio, la Figura 6.22 muestra la divergencia del campo de velocidades de las partículas del sólido 1, para el tiempo $t = 0.7$ms. En ella podemos observar que fracciones significativas de la energía de corte incidente son convertidas a ondas compresionales rápidas y lentas. Esta generación de ondas compresionales contribuye al mecanismo de tipo scattering que afecta la amplitud de la onda de corte clásica primaria a medida que la misma se propaga a través del medio.

Por último, para cuantificar las pérdidas de energía que experimenta la onda de corte

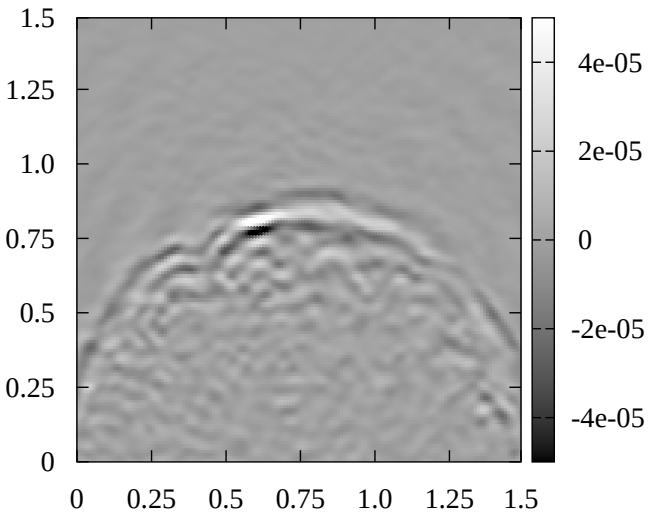

Figura 6.21: Componente horizontal del campo de velocidades de las partículas del sólido 1 para el tiempo $t = 0.7$ms. Este campo ha sido truncado para analizar con más detalle las pérdidas de amplitud experimentadas por la onda de corte clásica primaria. El máximo valor del mismo es 8.5×10^{-5}.

clásica al viajar a través del medio, consideremos tres receptores R4, R5, R6 ubicados en las posiciones $x_{Ri} = 0.75$m $(i = 4, 5, 6)$, $y_{R4} = 0.3$m, $y_{R5} = 0.5$m e $y_{R6} = 0.7$m. La Figura 6.23 muestra, en función del tiempo, la componente horizontal de la velocidad de las partículas del sólido 1 para los tres receptores . En ella podemos observar fuertes caídas de la amplitud del arribo de la onda de corte primaria s_1 a medida que los receptores se alejan de la fuente. Estas pérdidas de amplitud están relacionadas principalmente con conversiones de energía en las heterogeneidades del medio. Como lo hicimos previamente, para estimar un factor de calidad Q_{s1} para los sedimentos con hidratos que estamos analizando, determinamos para cada par de receptores un factor de calidad usando el método de la relación espectral, y luego promediamos tales valores para obtener un factor del calidad representativo para el medio. En este caso el valor promedio resultó ser $Q_{s1} = 5.5$, lo que nos muestra que los efectos de scattering asociados con distribuciones heterogéneas de hidratos de metano afectan más a las ondas de corte clásicas que a las ondas compresionales clásicas. Esta particularidad está de acuerdo con las observaciones realizadas en el pozo Mallik 5L-38 . De hecho, el valor promedio para Q_{s1} obtenido a partir de las simulaciones numéricas es similar al valor promedio $Q_s \simeq 6$ medido en el pozo en estudio para un valor de la saturación de hidratos igual al valor macroscópico

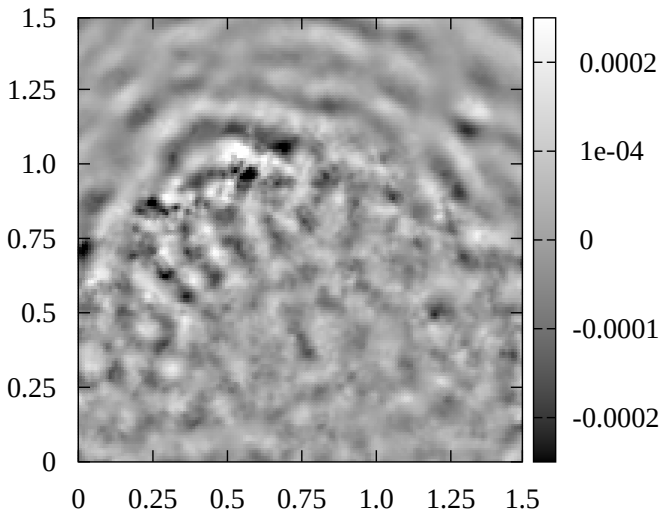

Figura 6.22: Divergencia del campo de velocidades de las partículas del sólido 1 para el tiempo $t = 0.7$ms. Este campo ha sido truncado para analizar con más detalle las conversiones de energía a ondas compresionales.

utilizado en este experimento numérico (ver Figura 3 de Guerin et al. [38]).

Estos resultados nos muestran la importancia de los efectos de scattering, asociados con conversiones de energía que se producen en las heterogeneidades entre la onda clásica primaria y los distintos tipos de ondas (rápidas y lentas) que se pueden propagar en sedimentos que contienen hidratos de metano. Además, la muy buena correspondencia entre los niveles de atenuación producidos por estos efectos y los medidos en el pozo Mallik 5L-38, nos conducen a proponer una posible explicación para los altos niveles de atenuación que se suelen observar en el rango de las frecuencias sónicas en estos ambientes, un fenómeno en discusión que aún no cuenta con una interpretación teórica satisfactoria. En tal sentido, del análisis previo podemos concluir que los altos niveles de atenuación sísmica observados en estos ambientes se producirían por efectos de scattering, asociados con distribuciones altamente heterogéneas (a una escala pequeña comparada con la longitud de onda sónica) de hidratos de metano, y constituidas por zonas irregulares con altos contrastes de saturación.

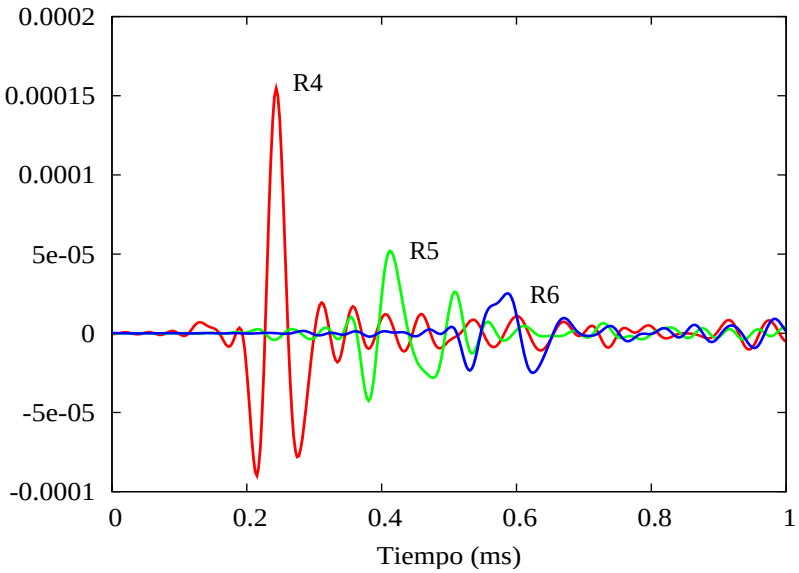

Figura 6.23: Trazas de la componente horizontal de la velocidad de las partículas del sólido 1 para los tres receptores R4, R5 y R6.

Capítulo 7

Conclusiones

El objetivo principal de este trabajo consistió en estudiar la atenuación y dispersión que experimentan las ondas sísmicas clásicas al viajar a través de medios porosos saturados heterogéneos, tanto de matriz simple como compuesta. En este análisis, prestamos particular atención al papel que juegan las ondas lentas generadas en las heterogeneidades del medio cuando una onda clásica viaja a través del mismo. Los principales resultados de estas investigaciones constituyen aportes originales al entendimiento de los efectos mesoscópicos y sus propiedades, como así también al comportamiento sísmico de medios porosos saturados de matriz compuesta y a la atenuación sísmica en sedimentos que contienen hidratos de metano en sus poros.

Particularmente, en la primera parte de la Tesis nos abocamos al estudio de la respuesta sísmica de medios porosos saturados de matriz simple. En tal sentido, inicialmente presentamos la teoría clásica de Biot y analizamos las principales características de las ondas clásicas (compresional y de corte) y de la onda compresional lenta que pueden viajar a través de estos medios. Además, analizamos minuciosamente el carácter difusivo que presenta la onda lenta en el rango de bajas frecuencias. Luego, en el Capítulo 3, introdujimos el mecanismo mesoscópico de atenuación y dispersión. Con este fin, presentamos la teoría analítica de White, y a continuación propusimos un procedimiento de elementos finitos para realizar simulación numérica de propagación de ondas en medios poroso saturados, con el objetivo de cuantificar los efectos mesoscópicos del medio a través del cual se propagan las perturbaciones generadas en la fuente. La comparación de los resultados obtenidos con este procedimiento en el caso de medios periódicos estratificados y para frecuencias sísmicas con los que resultan de la teoría analítica de White nos permitieron confirmar que el procedimiento propuesto se puede utilizar para cuantificar correctamente los efectos mesoscópicos de medios porosos saturados que contienen heterogeneidades de geometrías generales, incluso para las bajas frecuencias que se utilizan en la sísmica de prospección. En este contexto, cabe remarcar que los experimentos numéricos presentados en esta sección constituyen las primeras simulaciones numéricas de propagación de

ondas que permitieron observar de manera directa los efectos mesoscópicos en el rango de frecuencias sísmicas.

El hecho de que la realización de simulación numérica de propagación de ondas con el fin de determinar los efectos mesoscópicos implica un costo computacional muy elevado, nos motivó para presentar una metodología alternativa para estudiar este fenómeno. En tal sentido, en el Capítulo 4 propusimos experimentos numéricos que simulan las pruebas que se realizan en laboratorios para estimar las propiedades viscoelásticas de las muestras de roca. Estos experimentos numéricos consistieron en aplicar esfuerzos armónicos compresionales y de corte sobre muestras de roca representativas, y a partir de los cambios de volumen y forma que experimentaron se cuantificaron los efectos mesoscópicos de las mismas. Esta metodología es muy conveniente desde el punto de vista computacional, y además fue validada comparando los efectos mesoscópicos determinados con la misma en el caso de medios periódicos estratificados con los obtenidos utilizando la teoría analítica de White. A continuación, la aplicamos para realizar un análisis detallado de sensibilidad de los efectos mesoscópicos a distintos tipos de heterogeneidades en las propiedades litológicas y en los fluidos porales de la roca. Finalmente, propusimos una técnica Monte Carlo para extraer el comportamiento estadístico de medios altamente heterogéneos que contienen inhomogeneidades caracterizadas por cierta densidad espectral. Es importante señalar que en el contexto de la geofísica de exploración, estos procedimientos nos permitirían también determinar sólidos viscoelásticos homogéneos equivalentes para las distintas regiones del modelo geológico en estudio. Esto es muy importante pues la realización de simulación numérica de propagación de ondas a través de un solido viscoelástico heterogéneo es computacionalmente mucho más conveniente que cualquier procedimiento numérico basado en la discretización de las ecuaciones de Biot para el mismo orden de exactitud.

La segunda parte de la Tesis estuvo íntegramente dedicada a estudiar la respuesta sísmica de medios porosos saturados de matriz compuesta. En este sentido, en el Capítulo 5 presentamos la teoría desarrollada por Santos et al. [86], que permite analizar la propagación de ondas en estos medios. A continuación, analizamos las principales características de las tres ondas compresionales y las dos ondas de corte que de acuerdo con esta teoría pueden viajar en estos ambientes. Luego realizamos un análisis cuantitativo de las particiones de energía que tienen lugar cuando una onda compresional clásica incide sobre una heterogeneidad plana en estos medios. El análisis presentado en este

capítulo es el primero en la literatura que considera la participación de los cinco modos de propagación que existen en estos medios en las conversiones de energía que se producen cuando una onda clásica incide sobre una interfase plana. Los resultados obtenidos nos permitieron determinar que las tres ondas lentas intervienen de manera significativa en las conversiones de energía que tienen lugar en las heterogeneidades del medio.

Por último, en el Capítulo 6 aplicamos los resultados obtenidos en el Capítulo 5 para estudiar la respuesta sísmica de sedimentos que contienen hidratos de metano en sus poros. Con este objetivo, calibramos el modelo teórico utilizando datos reales obtenidos en el pozo Mallik 5L-38, ubicado en el Delta del río Mackenzie, Canadá. Luego, cuantificamos las conversiones de energía que se producen cuando una onda clásica incide sobre una interfase plana determinada por una discontinuidad en la saturación de hidratos. En estos análisis observamos que fracciones muy importantes de la energía de la onda clásica incidente se pueden convertir a ondas lentas en las heterogeneidades, sugiriendo que estos efectos de scattering podrían tener consecuencias muy importantes sobre el comportamiento de la onda clásica primaria. Con el objetivo de estudiar este fenómeno en el caso de heterogeneidades irregulares, realizamos simulación numérica de propagación de ondas a través de sedimentos que contienen distribuciones altamente heterogéneas de hidratos de metano. Estos experimentos numéricos nos permitieron verificar que las ondas clásicas se ven fuertemente afectadas por la presencia de las heterogeneidades, manifestando una importante caída de amplitud a medida que viajan a través del medio. La muy buena concordancia entre las pérdidas de energía modeladas en los experimentos numéricos con las observadas en los sedimentos del Delta del Mackenzie nos sugieren que estos fenómenos de scattering asociados con distribuciones altamente heterogéneas de hidratos de metano permitirían explicar los altos niveles de atenuación sísmica que se suelen observar en estos ambientes, un problema para el que aún no se ha encontrado una explicación teórica satisfactoria.

Agradecimientos

En estas pocas líneas quiero agradecer profundamente a las personas que me apoyaron durante estos años en que la tesis fue tomando forma.

A mis papás, mi abuela, mis hermanas, quienes siempre están "ahí". A mis sobrinos, que le pusieron color y una cuota de irracionalidad a estos tiempos.

A Ani, que día tras día me escuchó, contuvo, aconsejó y alentó a seguir adelante cuando los obstáculos iban apareciendo... y por haber sacado mi cabeza tantas veces del trabajo y las preocupaciones.

A Rolando, Elena, Nora, Silvia, Mara, Javier y Sebastián, mi nueva familia de Bariloche.

A Pablito y a Victor. A todos los amigos que conocí mientras cursé la carrera de grado. A los nuevos amigos que hice en el Departamento de Geofísica Aplicada; a Luis, que me escuchó y aconsejó tantas veces durante estos años.

A la Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas de la Universidad Nacional de La Plata y al Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET) por haber sustentado académica y económicamente este trabajo.

Por último, a mis directores, quienes permitieron que realizara esta Tesis Doctoral.

Apéndice A

Aproximación numérica de los experimentos de compresión y de corte

En este apéndice presentaremos las formas débiles asociadas con los problemas de condiciones de contorno que surgieron al proponer experimentos de compresión y de corte para analizar los efectos mesoscópicos. Luego, presentaremos los espacios y el procedimiento de elementos finitos para aproximar las soluciones de tales problemas. Finalmente, acotaremos el error de las aproximaciones obtenidas usando los procedimientos propuestos.

A.1 Una formulación variacional

Sea Ω el dominio rectangular donde resolveremos los problemas de condiciones de contorno. Además, sea Γ su borde, y Γ^T, Γ^B, Γ^L y Γ^R los lados superior, inferior, izquierdo y derecho de Γ, respectivamente.

Para obtener una formulación variacional de las ecuaciones (2.17) bajo las condiciones de borde (4.2) ó (4.6), introduzcamos los espacios

$$H^{1,P}_{0,B}(\Omega) = \{v \in [H^1(\Omega)]^2 : v \cdot \nu = 0 \text{ en } \Gamma^L \cup \Gamma^R, v = 0 \text{ en } \Gamma^B\},$$

$$H^{1,T}_{0,B}(\Omega) = \{v \in [H^1(\Omega)]^2 : v = 0 \text{ en } \Gamma^B\},$$

$$H_0(div;\Omega) = \{v \in [L^2(\Omega)]^2 : \nabla \cdot v \in L^2(\Omega), v \cdot \nu = 0 \text{ en } \Gamma\},$$

y

$$H^1_0(div;\Omega) = \{v \in [H^1(\Omega)]^2 : \nabla \cdot v \in H^1(\Omega),\ v \cdot \nu = 0 \text{ en } \Gamma\}.$$

Los espacios $H^{1,P}_{0,B}$ y $H^{1,T}_{0,B}$ son subespacios cerrados de $H^1(\Omega)$. Introduzcamos también los espacios

$$\mathcal{V}^{(P)} = \left[H^{1,P}_{0,B}(\Omega)\right]^2 \times H_0(div;\Omega), \quad \mathcal{V}^{(T)} = \left[H^{1,T}_{0,B}(\Omega)\right]^2 \times H_0(div;\Omega).$$

Luego, multiplicando la ecuación (2.17) por $v = \left(v^s, v^f\right) \in \mathcal{V}^{(P)}$, integrando por partes y aplicando las condiciones de borde (4.2), se encuentra que la solución $u^{(P)} = (u^{(s,P)}, u^{(f,P)}) \in \mathcal{V}^{(P)}$ de la ecuación (2.17) bajo las condiciones de borde (4.2), satisface *la forma débil*:

$$\Lambda(u^{(P)}, v) = -\left\langle \Delta P, v^s \cdot \nu \right\rangle_{\Gamma^T}, \qquad \forall v = \left(v^s, v^f\right) \in \mathcal{V}^{(P)}, \tag{A.1}$$

donde ΔP es la amplitud de la compresión armónica que se aplica sobre la muestra representativa de roca, de acuerdo con las condiciones de borde (4.2). En la ecuación anterior, dados $u, v \in [H^1(\Omega)]^2 \times H(div;\Omega)$, la forma bilineal $\Lambda(u,v)$ está dada por

$$\begin{aligned}\Lambda(u,v) &= -\omega^2\,(\mathcal{P}u, v) + i\omega\,(\mathcal{B}u, v) + \sum_{l,m}(\sigma_{lm}(u), \epsilon_{lm}(v^s)) - \big(p_f(u), \nabla\cdot v^f\big)\\ &= -\omega^2\,(\mathcal{P}u, v) + i\omega\,\big(bu^f, v^f\big) + (\mathbf{D}\ \tilde{\epsilon}(u), \tilde{\epsilon}(v))\,. \end{aligned} \tag{A.2}$$

En la expresión (A.2), la matriz definida positiva $\mathbf{D}$ y el vector columna $\tilde{\epsilon}(u)$ se definen mediante

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_c + 2\mu & \lambda_c & \alpha K_{av} & 0\\ \lambda_c & \lambda_c + 2\mu & \alpha K_{av} & 0\\ \alpha K_{av} & \alpha K_{av} & K_{av} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4\mu \end{pmatrix} \quad , \quad \tilde{\epsilon}(u) = \begin{pmatrix} \epsilon_{11}(u^s)\\ \epsilon_{22}(u^s)\\ \nabla\cdot u^f\\ \epsilon_{12}(u^s) \end{pmatrix}.$$

De manera similar, la solución $u^{(T)} = (u^{(s,T)}, u^{(f,T)}) \in \mathcal{V}^{(T)}$ de la ecuación (2.17) bajo las condiciones de borde (4.6), satisface *la forma débil*:

$$\Lambda(u^{(T)}, v) = \langle g, v^s\rangle_{\Gamma^T}\,, \qquad \forall v = \big(v^s, v^f\big) \in \mathcal{V}^{(T)}, \tag{A.3}$$

donde la función $g(x,y)$ está definida según la expresión (4.7)

Asumamos la existencia de los problemas de valores de contorno dados por la ecuación (2.17) bajo las condiciones de borde (4.2) ó (4.6), y sus formulaciones variacionales (A.1) ó (A.3). Analicemos la unicidad de la solución $u^{(P)}$ del problema (A.1). Con este objetivo, consideremos $\Delta P = 0$ y elijamos $v = u^{(P)}$ en la ecuación (A.1), y así obtenemos

$$-\omega^2\,\big(\mathcal{P}u^{(P)}, u^{(P)}\big) + i\omega\,\big(bu^{(f,P)}, u^{(f,P)}\big) + \big(\mathbf{D}\ \tilde{\epsilon}(u^{(P)}), \tilde{\epsilon}(u^{(P)})\big) = 0. \tag{A.4}$$

Si tomamos la parte imaginaria en la ecuación (A.4), podemos ver que

$$\|u^{(f,P)}\|_0^2 = 0. \tag{A.5}$$

Entonces, la ecuación (A.4) se reduce a

$$-\omega^2\,\big(\rho_b u^{(s,P)}, u^{(s,P)}\big) + \Big(\widehat{\mathbf{D}}\ \tilde{\tilde{\epsilon}}(u^{(s,P)}), \tilde{\tilde{\epsilon}}(u^{(s,P)})\Big) = 0, \tag{A.6}$$

donde

$$\widehat{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} \lambda_c + 2\mu & \lambda_c & 0\\ \lambda_c & \lambda_c + 2\mu & 0\\ 0 & 0 & 4\mu \end{pmatrix} \quad , \quad \tilde{\tilde{\epsilon}}(u^{(s,P)}) = \begin{pmatrix} \epsilon_{11}(u^{(s,P)})\\ \epsilon_{22}(u^{(s,P)})\\ \epsilon_{12}(u^{(s,P)}) \end{pmatrix}.$$

Por otra parte, para cualquier v que se anule sobre un subconjunto de medida positiva de Γ (en nuestro caso Γ^B), usando la segunda desigualdad de Korn [66] puede demostrarse que [21]

$$|||v||| = \left(\sum_{kl} \int_{\Omega} |\epsilon_{kl}(v)|^2 d\Omega \right)^{1/2} \tag{A.7}$$

define sobre $H^{1,P}_{0,B}(\Omega)$ una norma equivalente a la norma de $H^1(\Omega)$. Entonces, existe un par de constantes positivas C_1, C_2, para las que se cumple

$$C_1 \|v\|_1 \leq |||v||| \leq C_2 \|v\|_1, \quad \forall v \in H^{1,P}_{0,B}(\Omega). \tag{A.8}$$

Ahora, si ρ_b^{max} es el mayor valor de $\rho_b(x,y)$ y $\lambda_{min}(\widehat{\mathbf{D}})$ el menor autovalor de la matriz $\widehat{\mathbf{D}}$, teniendo en cuenta además la relación (A.8) es fácil ver que se cumple

$$-\omega^2 \left(\rho_b u^{(s,P)}, u^{(s,P)}\right) \geq -\omega^2 \rho_b^{max} ||u^{(s,P)}||_0^2, \tag{A.9}$$

$$\left(\widehat{\mathbf{D}} \tilde{\tilde{\epsilon}}(u^{(s,P)}), \tilde{\tilde{\epsilon}}(u^{(s,P)})\right) \geq \lambda_{min}(\widehat{\mathbf{D}}) |||u^{(s,P)}|||^2 \geq C_1^2 \lambda_{min}(\widehat{\mathbf{D}}) \|u^{(s,P)}\|_1^2. \tag{A.10}$$

Sumando ambas desigualdades y considerando la igualdad (A.6), encontramos

$$\begin{aligned} 0 &\geq -\omega^2 \rho_b^{max} \|u^{(s,P)}\|_o^2 + \lambda_{min}(\widehat{\mathbf{D}}) C_1^2 \|u^{(s,P)}\|_1^2 \\ &\geq \lambda_{min}(\widehat{\mathbf{D}}) C_1^2 \|\nabla u^{(s,P)}\|_0^2 + \left(\lambda_{min}(\widehat{\mathbf{D}}) C_1^2 - \omega^2 \rho_b^{max}\right) \|u^{(s,P)}\|_0^2 \\ &\geq \lambda_{min}(\widehat{\mathbf{D}}) C_1^2 \|\nabla u^{(s,P)}\|_0^2, \end{aligned} \tag{A.11}$$

siempre que ω satisfaga la condición

$$\omega \leq C_1 \sqrt{\frac{\lambda_{min}(\widehat{\mathbf{D}})}{\rho_b^{max}}}. \tag{A.12}$$

Luego, recordando que para cualquier $v \in H^{1,P}_{0,B}(\Omega)$ se satisface la desigualdad de Poincaré, es decir,

$$\|v\|_0 \leq C_3 \|\nabla v\|_0, \tag{A.13}$$

combinando las expresiones (A.11) y (A.13), se encuentra que

$$\|u^{(s,P)}\|_0 = 0. \tag{A.14}$$

Finalmente, de las expresiones (A.5) y (A.14) se concluye la unicidad del problema (A.1) para $\omega > 0$ satisfaciendo (A.12). La unicidad de la solución $u^{(T)}$ para el problema (A.3) puede demostrarse de manera análoga, siempre que se cumpla una condición idéntica a la que se encuentra en la ecuación (A.12) para el rango de frecuencias.

A.2 Los procedimientos de elementos finitos

Sea $\mathcal{T}^h(\Omega)$ una partición no solapada del dominio Ω en rectángulos Ω_j, de diámetros acotados por h, tales que $\overline{\Omega} = \cup_{j=1}^{J} \overline{\Omega}_j$. Para aproximar el desplazamiento del sólido en el caso del experimento de compresión, usamos un espacio de elementos finitos conforme denotado por $\mathcal{N}_{0,B}^{h,P} \subset H_{0,B}^{1,P}(\Omega)$, mientras que para el experimento de corte consideramos el espacio de elementos finitos conforme $\mathcal{N}_{0,B}^{h,T} \subset H_{0,B}^{1,T}(\Omega)$. Estos espacios están definidos mediante

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_{0,B}^{h,P} &= \{v : v|_{\Omega_j} \in P_{1,1} \times P_{1,1},\, v \cdot \nu = 0 \text{ en } \Gamma^L \cup \Gamma^R, v = 0 \text{ en } \Gamma^B\} \cap [C^0(\overline{\Omega})]^2, \\
\mathcal{N}_{0,B}^{h,T} &= \{v : v|_{\Omega_j} \in P_{1,1} \times P_{1,1},\, v = 0 \text{ en } \Gamma^B\} \cap [C^0(\overline{\Omega})]^2,
\end{aligned}$$

donde $P_{1,1}$ son los polinomios de grado no mayor que 1 en cada variable.

Para aproximar el desplazamiento del fluido, usamos un subespacio cerrado de la parte vectorial del espacio de Raviart-Thomas-Nedelec de orden cero, denotado $\mathcal{W}_0^h$ [75, 65]. Este espacio está definido como

$$\mathcal{W}_0^h = \{v : v|_{\Omega_j} \in P_{1,0} \times P_{0,1},\, v \cdot \nu = 0 \text{ en } \Gamma\}.$$

Sean

$$\Pi_h^{(P)} : \left[H^2(\Omega) \cap H_{0,B}^{1,P}(\Omega)\right]^2 \to \mathcal{N}_{0,B}^{h,P}, \quad \Pi_h^{(T)} : \left[H^2(\Omega) \cap H_{0,B}^{1,T}(\Omega)\right]^2 \to \mathcal{N}_{0,B}^{h,T}$$

las proyecciones definidas localmente tales que $\Pi_h^{(P)}|_{\Omega_j} = \Pi_{h,j}^{(P)}$, $\Pi_h^{(T)}|_{\Omega_j} = \Pi_{h,j}^{(T)}$, donde

$$\begin{aligned}
(\Pi_{h,j}^{(P)}\varphi - \varphi, v)_{\Omega_j} &= 0, \quad v \in P_{1,1} \times P_{1,1},\, v \cdot \nu = 0, \text{ en } \Gamma^L \cup \Gamma^R, v = 0 \text{ en } \Gamma^B, \\
(\Pi_{h,j}^{(T)}\varphi - \varphi, v)_{\Omega_j} &= 0, \quad v \in P_{1,1} \times P_{1,1},\, v = 0 \text{ en } \Gamma^B.
\end{aligned}$$

También, sea

$$Q^h : H_0^1(div;\Omega) \to \mathcal{W}_0^h$$

la proyección definida por

$$\left\langle (Q^h\psi - \psi) \cdot \nu, 1 \right\rangle_B = 0, \quad B = \partial\Omega_j \cap \partial\Omega_k \text{ ó } B = \partial\Omega_j \cap \partial\Omega.$$

Es conocido que, para todo $\varphi \in [H^2(\Omega) \cap H^{1,P}_{0,B}(\Omega)]^2$, $\psi \in [H^2(\Omega) \cap H^{1,T}_{0,B}(\Omega)]^2$ y $\eta \in H^1_0(div;\Omega)$ [21, 65, 75],

$$\|\varphi - \Pi_h^{(P)}\varphi\|_0 + h\|\varphi - \Pi_h^{(P)}\varphi\|_1 \leq Ch^2\|\varphi\|_2, \tag{A.15a}$$

$$\|\psi - \Pi_h^{(T)}\psi\|_0 + h\|\psi - \Pi_h^{(T)}\psi\|_1 \leq Ch^2\|\psi\|_2, \tag{A.15b}$$

$$\|\eta - Q^h\eta\|_0 \leq Ch\|\eta\|_1, \tag{A.15c}$$

$$\|\eta - Q^h\eta\|_{H(div;\Omega)} \leq Ch\left(\|\eta\|_1 + \|\nabla\cdot\eta\|_1\right). \tag{A.15d}$$

Definamos los espacios de elementos finitos

$$\mathcal{V}^{(h,P)} = \mathcal{N}^{h,P}_{0,B} \times \mathcal{W}^h_0, \quad \mathcal{V}^{(h,T)} = \mathcal{N}^{h,T}_{0,B} \times \mathcal{W}^h_0.$$

Entonces, el procedimiento de elementos finitos para aproximar la solución del problema (A.1) se define de la siguiente manera: encontrar $u^{(h,P)} = \left(u^{(s,h,P)}, u^{(f,h,P)}\right)^t \in \mathcal{V}^{(h,P)}$ tal que

$$\Lambda(u^{(h,P)}, v) = -\left\langle \Delta P, v^s\cdot\nu\right\rangle_{\Gamma^T}, \qquad v = \left(v^s, v^f\right) \in \mathcal{V}^{(h,P)}. \tag{A.16}$$

También, el procedimiento de elementos finitos para aproximar la solución del problema (A.3) consiste en encontrar $u^{(h,T)} = \left(u^{(s,h,T)}, u^{(f,h,T)}\right)^t \in \mathcal{V}^{(h,T)}$ tal que

$$\Lambda(u^{(h,T)}, v) = \left\langle g, v^s\right\rangle_{\Gamma^T}, \qquad v = \left(v^s, v^f\right) \in \mathcal{V}^{(h,T)}. \tag{A.17}$$

Dado que $u^{(h,P)} \in H^{1,P}_{0,B}$ y $u^{(h,T)} \in H^{1,T}_{0,B}$, la unicidad para los problemas discretos (A.16) y (A.17) se puede garantizar con el mismo argumento que para el caso continuo, siempre que la frecuencia ω cumpla con la restricción (A.12). La existencia de las soluciones de estos problemas discretos resulta del hecho que los espacios $\mathcal{V}^{(h,P)}$ y $\mathcal{V}^{(h,T)}$ son de dimensión finita.

Es interesante remarcar aquí que esta afirmación sobre la unicidad para los problemas discretos dejaría de ser válida si usáramos espacios de elementos finitos *no conformes*. Esto se debe a que tales espacios están incluidos en $L^2(\Omega)$, pero no en $H^1(\Omega)$, y entonces no se puede afirmar que la expresión (A.7) induce una norma equivalente a la norma de $H^1(\Omega)$. Luego, en tal caso, no sería válido utilizar el argumento de unicidad presentado en el caso continuo para garantizar la unicidad del problema discreto.

A.3 Estimación de los errores para los procedimientos de elementos finitos

Derivemos la estimación del error *a priori* para el procedimiento (A.16). La estimación correspondiente al procedimiento (A.17) se puede obtener con un argumento similar.

Primero, usando la desigualdad (A.8) se encuentra que para $u = (u^s, u^f) \in \mathcal{V}^P$, la forma bilineal Λ satisface la desigualdad de tipo Garding

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\,(\Lambda(u,u)) &\geq \lambda_{min}(\mathbf{D})\left(|||u^s|||^2 + \|\nabla\cdot u^f\|_0^2\right) - \omega^2\lambda^{max}(\mathcal{P})\left(\|u^s\|_0^2 + \|u^f\|_0^2\right)\\ &\geq C_4\left(\|u^s\|_1^2 + \|u^f\|_0^2 + \|\nabla\cdot u^f\|_0^2\right) - C_5(\omega)\|u^f\|_0^2, \end{aligned} \tag{A.18}$$

donde

$$C_4 = \min\left(\frac{1}{2}\lambda_{min}(\mathbf{D})C_1^2, \lambda_{min}(\mathbf{D})\right), \quad C_5(\omega) = \omega^2\lambda^{max}(\mathcal{P}) + \lambda_{min}(\mathbf{D}),$$

siempre que la frecuencia ω satisfaga la condición

$$\omega < C_1\left(\frac{\lambda_{min}(\mathbf{D})}{2\lambda^{max}(\mathcal{P})}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{A.19}$$

En la ecuación anterior, $\lambda^{max}(\mathcal{P})$ denota el máximo autovalor de la matriz $\mathcal{P}$. Por otra parte, Λ es $\mathcal{V}^{(P)}$-continuo, es decir,

$$\begin{aligned}|\Lambda(u,v)| \leq C_6(\omega)\left(\|u^s\|_1\|v^s\|_1 + \|\nabla\cdot u^f\|_0\|\nabla\cdot v^f\|_0 + \|u^f\|_0\|v^f\|_0\right) \\ \forall u = (u^s, u^f), v = (v^s, v^f) \in \mathcal{V}^P.\end{aligned} \tag{A.20}$$

Teniendo en cuenta que el error del procedimiento de elementos finitos está dado por

$$e = u^{(h,P)} - u^{(P)} = (e^s, e^f),$$

restando la ecuación (A.1) de la expresión (A.16), se obtiene la siguiente ecuación del error

$$\Lambda(e,v) = 0, \qquad v = \left(v^s, v^f\right) \in \mathcal{V}^{(h,P)}. \tag{A.21}$$

Si tomamos $v = u^{(P)} - u^{(h,P)} + \psi - u^{(P)}$, con $\psi = (\Pi_h^{(P)}u^{(s,P)}, Q^h u^{(f,P)}) \in \mathcal{V}^{(h,P)}$ en la ecuación (A.21), obtenemos

$$\Lambda((e^s,e^f),(e^s,e^f)) = \Lambda\left((e^s,e^f),(u^{(s,P)} - \Pi_h^{(P)}u^{(s,P)}, u^{(f,P)} - Q^h u^{(f,P)})\right). \tag{A.22}$$

Luego, tomando parte imaginaria en la ecuación (A.22) y usando la expresión (A.20), encontramos que

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Im}\,(\Lambda(e,e)) = \omega(be^f, e^f) \qquad (A.23)\\
&\leq |\Lambda\left((e^s,e^f),(u^{(s,P)}-\Pi_h^{(P)}u^{(s,P)}, u^{(f,P)}-Q^h u^{(f,P)})\right)|\\
&\quad \leq C_6(\omega)\left(\|e^s\|_1\|u^{(s,P)}-\Pi_h^{(P)}u^{(s,P)}\|_1 + \|\nabla\cdot e^f\|_0\|\nabla\cdot\left(u^{(f,P)}-Q^h u^{(f,P)}\right)\|_0\right.\\
&\quad \left.+\|e^f\|_0\|u^{(f,P)}-Q^h u^{(f,P)}\|_0\right).
\end{aligned}$$

Entonces, usando las propiedades (A.15) en la ecuación (A.23), obtenemos la desigualdad

$$\begin{aligned}
\|e^f\|_0^2 \leq C_7(\omega)h\left(\|e^s\|_1\|u^{(s,P)}\|_2 + \|\nabla\cdot e^f\|_0\|\nabla\cdot u^{(f,P)}\|_1\right.\\
\left.+\|e^f\|_0\|u^{(f,P)}\|_1\right). \qquad (A.24)
\end{aligned}$$

Ahora, si tomamos parte real en la igualdad (A.22) y usamos la desigualdad de Garding (A.18) y las estimaciones (A.20) y (A.24), encontramos que

$$\begin{aligned}
&C_4\left(\|e^s\|_1^2 + \|e^f\|_0^2 + \|\nabla\cdot e^f\|_0^2\right) \qquad (A.25)\\
&\leq \mathrm{Re}\left(\Lambda\left((e^s,e^f),(u^{(s,P)}-\Pi_h^{(P)}u^{(s,P)}, u^{(f,P)}-Q^h u^{(f,P)})\right)\right) + C_5(\omega)\|e^f\|_0^2\\
&\quad \leq C_8(\omega)\left(\|e^s\|_1\|u^{(s,P)}-\Pi_h^{(P)}u^{(s,P)}\|_1 + \|\nabla\cdot e^f\|_0\|\nabla\cdot\left(u^{(f,P)}-Q^h u^{(f,P)}\right)\|_0\right.\\
&\quad \left.+\|e^f\|_0\|u^{(f,P)}-Q^h u^{(f,P)}\|_0\right)\\
&\quad +C_9(\omega)h\left(\|e^s\|_1\|u^{(s,P)}\|_2 + \|\nabla\cdot e^f\|_0\|\nabla\cdot u^{(f,P)}\|_1 + \|e^f\|_0\|u^{(f,P)}\|_1\right).
\end{aligned}$$

Luego, aplicando las propiedades (A.15) en la ecuación (A.25) se obtiene

$$\begin{aligned}
C_4\left(\|e^s\|_1^2 + \|e^f\|_0^2 + \|\nabla\cdot e^f\|_0^2\right) \leq C_{10}(\omega)\left(h^2\left[\|u^{(s,P)}\|_2^2 + \|u^{(f,P)}\|_1^2 + \|\nabla\cdot u^{(f,P)}\|_1^2\right]\right.\\
\left.+\delta\left[\|e^s\|_1^2 + \|e^f\|_1^2 + \|\nabla\cdot e^f\|_1^2\right]\right). \qquad (A.26)
\end{aligned}$$

Y finalmente, tomando δ pequeño en la ecuación (A.26), se obtiene la estimación

$$\begin{aligned}
\|e^s\|_1 + \|e^f\|_0 + \|\nabla\cdot e^f\|_0 \leq C_{11}(\omega)h\left(\|u^{(s,P)}\|_2 + \|u^{(f,P)}\|_1\right.\\
\left.+\|\nabla\cdot u^{(f,P)}\|_1\right). \qquad (A.27)
\end{aligned}$$

Con un argumento idéntico, se puede derivar una expresión similar a la estimación (A.27) para el error $\widetilde{e} = u^{(h,T)} - u^{(T)}$, asociado con la aproximación por elementos finitos

del problema (A.17). Es decir, hemos probado que las soluciones $u^{(h,P)}$ y $u^{(h,T)}$ de los problemas (A.16) y (A.17) satisfacen

$$\begin{aligned} &\|u^{(s,h,j)} - u^{(s,j)}\|_1 + \|u^{(f,h,j)} - u^{(f,j)}\|_0 + \|\nabla \cdot \left(u^{(f,h,j)} - u^{(f,j)}\right)\|_0 \\ &\qquad \leq C_{11}(\omega) h \left(\|u^{(s,j)}\|_2 + \|u^{(f,j)}\|_1 + \|\nabla \cdot u^{(f,j)}\|_1\right), \quad j = P, T, \end{aligned} \tag{A.28}$$

para cualquier $\omega > 0$ que satisfaga la condición (A.19).

Referencias

[1] Aki, K. and Richards, P.G. *Quantitative seismology.* University Science Books, 2002.

[2] Aurialt, J.L., Borne, L. and Chambon, R. Dynamics of porous saturated media, checking of the generalized Law of Darcy. *J. Acoust. Soc. Am.*, 77:1641–1650, 1985.

[3] Ballio, F., and Guadagnini, A. Convergence assessment of numerical Monte Carlo simulations in groundwater hydrology. *Water Resources Research*, 40:W04603, 2004.

[4] Bear, J. *Dynamics of fluid in porous media.* Dover Publications, New York, 1972.

[5] Berryman, J.G. Elastic waves in fluid-saturated porous media. *Lecture Notes in Physics*, 154:38–50, 1982.

[6] Biot, M.A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low frequency range. *J. Acoust. Soc. Am.*, 28:168–171, 1956.

[7] Biot, M.A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. II. High frequency range. *J. Acoust. Soc. Am.*, 28:179–191, 1956.

[8] Biot, M.A. Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media. *Journal of Applied Physics*, 33:1482–1498, 1962.

[9] Bourbié, T., Coussy, O. y Zinszner, B. *Acoustic of porous media.* Institut francais du pétrole publications, 1987.

[10] Burridge, R. and Keller, J.B. Poroelasticity equations derived from microstructure. *J. Acoust. Soc. Am.*, 70:1140–1145, 1981.

[11] Carcione, J.M. *Wave fields in real media: wave propagation in anisotropic, anelastic and porous media.* Pergamon, 2001.

[12] Carcione, J.M. and Gei, D. Gas-hydrate concentration estimated from p- and s-wave velocities at the Mallik 2L-38 research well, Mackenzie Delta, Canada. *Journal of Applied Geophysics*, 56:73–78, 2004.

[13] Carcione, J.M. and Picotti, S. P-wave seismic attenuation by slow-wave difussion: Effects of inhomogeneous rock properties. *Geophysics*, 71:O1–O8, 2006.

[14] Carcione, J.M. and Tinivella, U. Bottom-simulating reflectors: Seismic velocities and AVO effects. *Geophysics*, 65(1):54–67, 2000.

[15] Carcione, J.M., Gurevich, B. and Cavallini, F. A generalized Biot-Gassmann model for the acoustic properties of shaley sandstones. *Geophysical Prospecting*, 48:539–557, 2000.

[16] Carcione, J.M., Santos, J.E., Ravazzoli, C.L. and Helle, H.B. Wave simulation in partially frozen porous media with fractal freezing conditions. *Journal of Applied Physics*, 94:7839–7847, 2003.

[17] Carcione, J.M. y Seriani, G. Seismic velocities in permafrost. *Geophysical Prospecting*, 46:441–454, 1998.

[18] Cerveny, V. *Energy flux of time-harmonic waves in anisotropic dissipative media.* In Seismic waves in complex 3-D structures, Consorptium Research Project, Dept. of Geophysics, Charles University, Prage, Report 11, 2001.

[19] Chand, S. and Minshull, T.A. The effect of hydrate content on seismic attenuation: A case study for Mallik 2L-38 well data, Mackenzie delta, Canada. *Geophysical Research Letters*, 31:L14609, 2004.

[20] Chand, S., Minshull, T., Gei, D. and Carcione. Elastic velocity models for gas-hydrate-bearing sediments–a comparison. *Geophysical Journal International*, 159:573–590, 2004.

[21] Ciarlet, P.G. *The finite element method for elliptic problems.* Noth Holland, 1980.

[22] Cruckshank, M.J. and Masutani, S.M. Methane hydrate research & development. *Sea technology*, 40(8):69–74, 1999.

[23] Dallimore, S.R. and Collet, T.S. *Scientific results from the Mallik 2002 Gas Hydrate Research Well Program, Mackenzie Delta, Canada.* Geological Survey of Canada Bulletin 585, 2002.

[24] Dallimore, S.R., Medioli, B.E., Laframboise, R.R., and Giroux, D. Appendix A: Well data and interactive data viewer, in Scientific Results from the Mallik 2002 Gas Hydrate Production Research Well Program, Mackenzie Delta, Northwest Territories, Canada (DVD). *Bull. Geol. Surv. Can.*, vol. 585, 2005.

[25] De la Cruz, V. and Spanos, T.J.T. Seismic wave propagation in a porous medium. *Geophysics*, 50:1556–1565, 1985.

[26] Douglas Jr., J, Santos, J.E. and Sheen, D. Nonconforming Galerkin methods for the Helmholtz equation. *Numer. Methods Partial Differ. Equ.*, 17:475–494, 2001.

[27] Douglas Jr., J, Santos, J.E., Sheen, D. and Bennethum, L. Frequency domain treatment of one-dimensional scalar waves. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 3:171–194, 1993.

[28] Douglas Jr., J, Santos, J.E., Sheen, D., and Ye, X. Nonconforming galerkin methods based on quadrilateral elements for second order elliptic problems. *RAIRO Math. Model. Numer. Anal.*, 33:747–770, 1999.

[29] Dutta, N.C. Theoretical analysis of observed second bulk compressional wave in a fluid-saturated porous solid at ultrasonic frequencies. *Applied Physics Letters*, 37(10):898–900, 1980.

[30] Dutta, N.C. and Odé, H. Attenuation and dispersion of compressional waves in fluid-filled porous rocks with partial gas saturation (White model) – Part I: Biot theory. *Geophysics*, 44:1777–1788, 1979.

[31] Dutta, N.C. and Odé, H. Seismic reflections from a gas-water contact. *Geophysics*, 48(2):148–162, 1983.

[32] Dvorkin, J., Nur, A. and Yin, H. Effective properties of cemented granular material. *Mechanics of Materials*, 18:351–366, 1994.

[33] Frankel, A. and Clayton, R.W. Finite difference simulation of seismic wave scattering: Implications for the propagation of short period seismic waves in the crust and models of crustal heterogeneity. *Journal of Geophysical Research*, 91:6465–6489, 1986.

[34] Frenkel, J. On the theory of seismic and seismoelectric phenomena in a moist soil. *J. Phys. (Soviet)*, 8:230–241, 1944.

[35] Fung, Y.C. *Foundations of solid mechanics*. Prentice-Hall, 1965.

[36] Gassmann, F. Uber die elastizitat poroser medien (on the elasticity of porous media). *Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gessellschaft in Zurich*, 96:1–23, 1951.

[37] Guarracino, L. y Santos, J.E. Stochastic modelling of variable saturated transient flow in fractal porous media. *Mathematical Geology*, 36:217–238, 2004.

[38] G. Guerin, D. Goldberg, and T.S. Collet. Sonic attenuation in the Mallik 5L-38 gas hydrate production research well. In S.R. Dallimore and T.S. Collet, editors, *Scientific Results from the Mallik 2002 Gas hydrate Production Research Well Program, Mackenzie Delta, Northwest Territories, Canada.* Geological Survey of Canada, Bulletin 585, 2005.

[39] Guerin, G. and Goldberg, D. Modeling of acoustic wave dissipation in gas hydrate bearing sediments. *Geochemistry, Geohpysics, Geosystems (G^3)*, 6(7):Q07010, 2005.

[40] Guerin, G., Goldberg, D., and Meltser, A. Characterization of in situ elastic properties of gas hydrate-bearing sediments on the Blake Ridge. *Journal of Geophysical Research*, 104(B8):17781–17795, 1999.

[41] Gurevich, B. and Lopatnikov, S.L. Velocity and attenuation of elastic waves in finely layered porous rocks. *Geophysical Journal International*, 121:933–947, 1995.

[42] Ha, T., Santos, J.E. and Sheen, D. Nonconforming finite element methods for the simulation of waves in viscoelastic solids. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 191:5647–5670, 2002.

[43] Hassan, A.E., Cushman, J.H. and Delleur, J.W. Monte carlo studies of flow and transport in fractal conductivity fields: Comparison with stochastic perturbation theory. *Water Resources Research*, 33(11):2519–2534, 1997.

[44] Helle, H.B., Pham, N.M., and Carcione, J.M. Velocity and attenuation in partially saturated rocks: Poroelastic numerical experiments. *Geophysical Prospecting*, 51:551–566, 2003.

[45] Hill, R. Theory of mechanical properties of fiber-strengthened materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 11:357–372, 1964.

[46] Hovem, J.M. and Ingram, G.D. Viscous attenuation of sound in saturated sand. *Journal of the Acoustical Society of America*, 66:1807–1812, 1979.

[47] Hyndman, R.D. and Dallimore, S.R. Natural gas hydrate in Canada. *CSEG Recorder*, 26(5):11–20, 2001.

[48] Johnson, D.L. Theory of frequency dependent acoustics in patchy-saturated porous media. *J. Acoust. Soc. Am.*, 110:682–694, 2001.

[49] Johnson, D.L., Koplik, J. and Dashen, R. Theory of dynamic permeability and tortuosity in fluid-saturated porous media. *Journal of fluid mechanics*, 176:379–402, 1987.

[50] Knott, C.G. Reflection and refraction of seismic waves with seismological applications. *Phyl. Mag.*, 48:64–96, 1899.

[51] Kostadinoff, J. Hidratos de metano en el margen continental argentino. *Revista de la Asociación Geológica Argentina*, 56(3):392–395, 2001.

[52] Kosten, C.W. and Zwicker, C. Extended theory of the absorption of sound by compressible wall-coverings. *Physica*, 8:968–978, 1941.

[53] Krief, M., Garat, J., Stellingwerff, J. and Ventre, J. A petrophysical interpretation using the velocities of p and s waves (full-waveform sonic). *The Log Analyst*, 31:355–369, 1990.

[54] Kuster, G.T. and Toksöz, M.N. Velocity and attenuation of seismic waves in two-phase media. 1. Theoretical formulations. *Geophysics*, 39:587–606, 1974.

[55] Leclaire, Ph, Cohen-Tenoudji, F. y Aguirre-Puente J. Extension of Biot's theory of wave propagation to frozen porous media. *Journal of the Acoustical Society of America*, 96(6):3753–3767, 1994.

[56] Leclaire, Ph, Cohen-Tenoudji, F. y Aguirre-Puente J. Observation of two longitudinal and two transverse waves in a frozen porous medium. *Journal of the Acoustical Society of America*, 97(4):2052–2055, 1995.

[57] Lee, M.W. Biot-gassmann theory for velocities of gas hydrate-bearing sediments. *Geophysics*, 67(6):1711–1719, 2002.

[58] Lee, M.W. and Collet, T.S. Elastic properties of gas hydrate-bearing sediments. *Geophysics*, 66(3):763–771, 2001.

[59] Markl, R.G., Bryan, G.M. and Ewing, J.I. Structure of the Black-Bahama outer ridge. *Journal of Geophysical Research*, 75:4539–4555, 1970.

[60] Marshall, P.A. Los hidratos de metano. *Petrotecnia*, 6:72–76, 2002.

[61] Masson, Y.J. and Pride, S.R. Poroelastic finite difference modelling of seismic attenuation and dispersion due to mesoscopic-scale heterogeneity. *Journal of Geophysical Research*, 112:B03204, 2007.

[62] Mavko, G., Mukerji, T., and Dvorkin, J. *The rock physics handbook*. Cambridge University Press, 1998.

[63] Metropolis, N., and Ulam, S. The Monte Carlo method. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 44:335–341, 1949.

[64] Morack, J.L. y Rogers, J.C. Seismic evidence of shallow permafrost beneath the islands in the beafort sea. *Artic*, 3:166–174, 1981.

[65] Nedelec, J.C. Mixed finite elements in R^3. *Numer. Math.*, 35:315–341, 1980.

[66] Nitsche, J.A. On Korn's second inequality. *RAIRO*, 15:237–249, 1981.

[67] Norris, A.N. Low-frequency dispersion and attenuation in partially saturated rocks. *Journal of the Acoustical Society of America*, 94:359–370, 1993.

[68] Plona, T.J., and Johnson, D.L. Experimental study of the two compressional modes in water-saturated porous structures. *Proc. IEE Ultrason. Symp.*, pages 868–871, 1980.

[69] Pratt, T. and Bauer, K. and Weber, M. Crosshole waveform tomography velocity and attenuation images of arctic gas hydrates. *73rd Annual International Meeting SEG, Expanded Abstracts*, pages 2255–2258, 2003.

[70] Pride, S., Gangi, A. and Dale Morgan, F. Deriving the equations of motion for porous isotropic media. *J. Acoust. Soc. Am.*, 92:3278–3290, 1992.

[71] Pride, S.R. and Berryman, J.G. Linear dynamics of double-porosity and dual-permeability materials. I. Governing equations and acoustic attenuation. *Physical Review E*, 68:036603, 2003.

[72] Pride, S.R., Berryman, J.G., and Harris, J.M. Seismic attenuation due to wave-induced flow. *Journal of Geophysical Research*, 109:B01201, 2004.

[73] Quan, Y. and Harris, J.M. Seismic attenuation tomography using the frequency shift method. *Geophysics*, 62:895–905, 1997.

[74] Ravazzoli, C.L. *Modelado de fenómenos de propagación de ondas en medios disipativos. Tesis doctoral.* Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas, UNLP, 1995.

[75] Raviart, P.A. and Thomas, J. *Mixed finite element method for 2nd order elliptic problems. Mathematical aspects of the finite element methods, Lectures notes of mathematics*, volume 606. Springer, 1975.

[76] Rubin, Y. and Hubbard, S.S. *Hydrogeophysics.* Springer, 2005.

[77] Rubino, J.G., Santos, J.E., Picotti, S., and Carcione, J.M. Simulation of upscaling effects due to wave-induced fluid flow in Biot media using the finite-element method. *Journal of Applied Geophysics*, 62:193–203, 2007.

[78] Rubino, J.G., Ravazzoli, C.L. and Santos, J.E. *Modeling and inversion of sonic P and S wave velocities at the Mallik 5L-38 Gas Hidrate Research Well.* Resumen expandido de 2006 EAGE/EAGO/SEG Conference and Exhibition, San Petersburgo, Rusia, 2006.

[79] Rubino, J.G., Ravazzoli, C.L. and Santos, J.E. Reflection and transmission of waves in composite porous media: A quantification of energy conversions involving slow waves. *Journal of the Acoustical Society of America*, 120(5):2425–2436, 2006.

[80] Rubino, J.G., Ravazzoli, C.L. and Santos, J.E. Equivalent viscoelastic solids for heterogeneous fluid-saturated porous rocks. *Geophysics*, 74:N1–N13, 2009.

[81] Rubino, J.G., Ravazzoli, C.L. y Santos, J.E. Biot-type scattering effects in gas hydrate-bearing sediments. *Journal of Geophysical Research*, 113:B06102, 2008.

[82] Santos, J.E., Corbero, J.M., Ravazzoli, C.L., and Hensley, J.L. Reflection and transmission coefficients in fluid-saturated porous media. *J. Acoust. Soc. Am.*, 91(4):1911–1923, 1992.

[83] Santos, J.E., Ravazzoli, C.L., Gauzellino, P.M., and Carcione, J.M. Numerical simulation of ultrasonic waves in reservoir rocks with patchy saturation and fractal petrophysical properties. *Computational Geosciences*, 9:1–27, 2005.

[84] Santos, J.E. and Sheen, D. Finite element methods for the simulation of waves in composite saturated poroviscoelastic media. *SIAM Journal on numerical analysis*, 45:389–420, 2007.

[85] Santos, J.E., Douglas, J. Jr., Morley, M.E. and Lovera, O.M. Finite element methods for a model for full waveform acoustic logging. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 8:415–433, 1988.

[86] Santos, J.E., Ravazzoli, C.L. y Carcione, J.M. A model for wave propagation in a composite solid matrix saturated by a single-phase fluid. *Journal of the Acoustical Society of America*, 115(6):2749–2760, 2004.

[87] Telford, W.M., Geldart, L.P., and Sheriff, R.E. *Applied Geophysics Second Edition.* Cambridge University Press, 1990.

[88] White, J.E. Computed seismic speeds and attenuation in rocks with partial gas saturation. *Geophysics*, 40:224–232, 1975.

[89] White, J.E., Mikhaylova, N.G., and Lyakhovitskiy, F.M. Low-frequency seismic waves in fluid-saturated layered rocks. *Izvestija Academy of Science USSR, Physics of the Solid Earth*, 10:654–659, 1975.

[90] Winters, W.J. and Pecher, I.A. and Waite, W.F and Mason D.H. Physical properties and rock physics models of sediment containing natural and laboratory-formed methane gas hydrate. *American Mineralogist*, 89:1221–1227, 2004.