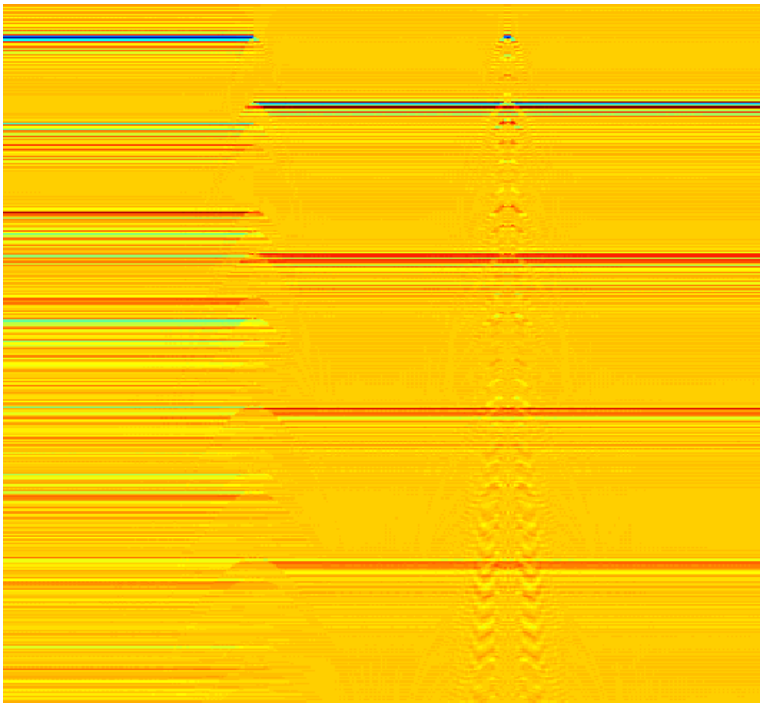
Programa de Doctorado Geodesia, Geofísica y Meteorología

Departamento de Física de la Tierra, Astronomía y Astrofísica I
(Geofísica y Meteorología) (Astronomía y Geodesia)
Universidad Complutense de Madrid

Tema de Investigación de Tercer Ciclo
"Aplicaciones de la Astronomía y Geofísica
a la Arqueología"

Diseño de un algoritmo para la síntesis de radargramas



Raúl Corraliza Nieto

Dirigido por las Dras.
María del Carmen Hernández Lucendo y María de Gracia Rodríguez Caderot

Mayo de 2003

Programa de Doctorado Geodesia, Geofísica y Meteorología

Departamento de Física de la Tierra, Astronomía y Astrofísica I
(Geofísica y Meteorología) (Astronomía y Geodesia)
Universidad Complutense de Madrid

Tema de Investigación de Tercer Ciclo
"Aplicaciones de la Astronomía y Geofísica
a la Arqueología"

Diseño de un algoritmo para la síntesis de radargramas

Dirigido por las Dras.
María del Carmen Hernández Lucendo y María de Gracia Rodríguez Caderot,
Profesoras Titulares del Departamento de Física de la Tierra, Astronomía y Astrofísica I
(Geofísica y Meteorología) (Astronomía y Geodesia)
de la Universidad Complutense de Madrid.

Madrid, Mayo de 2003

Vº Bº
Las Directoras
Fdo.: María del Carmen Hernández Lucendo María de Gracia Rodríguez Caderot

Fdo.: Raúl Corraliza Nieto

Agradecimientos

Deseo expresar mi agradecimiento:

En primer lugar a las Directoras de este trabajo, las Dras. María del Carmen Hernández Lucendo y María de Gracia Rodríguez Caderot, por su constante estímulo y ayuda todo este tiempo. Nuevamente, mi más profundo cariño, respeto y admiración para M.Carmen, por despertar en mí el interés y la pasión por la Prospección Geofísica; por su confianza en mí y su paciencia infinita.

Al Departamento de Física de la Tierra, Astronomía y Astrofísica I (Geofísica y Meteorología) de la Universidad Complutense de Madrid, por la oportunidad que me ha brindado al acogerme en este Programa de Doctorado. También a cada uno de sus miembros, por su paciencia y enseñanzas a lo largo de todos estos años de estudio, primero en las asignaturas de la especialidad en la Licenciatura y luego en el Tercer Ciclo.

Por supuesto, a mi querida amiga de mil y una aventuras, la Dra. Araceli Gallego Cobos, por la paciencia y el apoyo incondicional demostrado todos estos años y, en especial, en éste. Por increíble que parezca, no tengo palabras.

También a mis compañeros del café: Luis Miguel, Isabel, Paco, Carmen… Sin ellos la vida en el Departamento no sería igual (y sería una lástima). Con ellos no sólo he podido poner el reloj en hora todos los días a las 11, sino que me han ayudado a desconectar a media mañana de los líos físico-matemático-informáticos en los que metía yo solito. ¡Qué haría sin vosotros!

No he de olvidar a mis amigos de "Aprox. 20 min": Ángeles, Araceli (otra vez), Carlos, Isabel, Jesús, Maica, Marta, Pedro, Rafa, Teresiña… ¿Qué sería de la vida sin un Cabaret-Concierto que te alegrara la vida?

Tampoco he de olvidar a mis amigos en la Licenciatura de Ciencias y Técnicas Estadísticas: Pili, David, Ana, Juan, Gema…, gracias a los cuales las clases en la Facultad de Matemáticas se han hecho enormemente placenteras. ¡A ver si quedamos más!

Mucho menos, a mis amigos de toda la vida: Susi, Laura, Dani, Aitor, Patricia, Amanda, Ángel… Gracias a que nunca les ha interesado lo más mínimo la Física, me han mantenido apartado del trabajo en los momentos que tocaba descansar. ¡Esto son amigos!

Por supuesto, a todos mis alumnos de este año: Alicia, Amelia, Claudia, Diana, Fran, Gema, Gloria, ambas Jaras, Marina, Quique, Sandra…, por su paciencia conmigo. ¡Qué sería de mí sin vosotros!

Por último (porque se me acaba la hoja) aunque no por ello menos importante, he de mencionar a mi familia: ellos son los que más han tenido que soportar y soportarme. ¡Y lo que les queda!

A todos, nuevamente, gracias.

Índice

Índice de figuras

Índice de tablas

Índice de símbolos y notaciones

En la lista siguiente se muestran los símbolos y notaciones especiales utilizadas en el texto, junto con la página en la que se definen o en la que hacen acto de presencia por primera vez. Si a algún símbolo le han sido adjudicados varios significados, el contexto dejará claro de cuál de ellos se trata en cada momento.

Símbolos latinos

$\overset{m}{\hat{V}}\left(u \mid u, VU\right)$	Ventana desplazada	78
$\left(\overset{q}{\hat{V}}{}^{EX}_{c,1_{VX}}\right)\left(U \mid c, VX\right)$	Transformada de Fourier de la ventana desplazada $\overset{q}{\hat{v}}$ muestreada	65
x	Coordenada en el dominio natural	29
$\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$, $\hat{\mathbf{z}}$	Vectores unitarios en las direcciones de los ejes $\overline{OX}$, $\overline{OY}$, $\overline{OZ}$	11
$\left(x, y, z\right)$	Coordenadas del vector de posición de un punto genérico	11
$\left(x^e, y^e, z^e\right)$	Coordenadas del vector de posición del emisor de las ondas electromagnéticas	11
$\left(x^r, y^r, z^r\right)$	Coordenadas del vector de posición del receptor de las ondas electromagnéticas	11
$\left(x^{re}, y^{re}, z^{re}\right)$	Coordenadas del vector de posición relativa receptor–emisor	13
$\left(X, Y, Z\right)$	Coordenadas del vector de de posición del centro del dispositivo	13

Símbolos griegos

a	Factor de atenuación del medio	120
c	Componente no nula del campo en el sistema de coordenadas $\left(\mathbf{R}, \mathbf{r}^{re}, t\right)$	13
c, c'	Desfase en la aplicación de una ventana en el dominio natural para generar una función con soporte acotado	39
c^{SM}	Sección Medida en el sistema de coordenadas $\left(\mathbf{R}, \mathbf{r}^{re}, t\right)$	12
c^{DR}	Distribución de reflectividad en el sistema de coordenadas $\left(\mathbf{R}, \mathbf{r}^{re}, t\right)$	12
$d\left(x - x_0\right)$	Impulso unitario en el punto $x = x_0$	35
Δ^{EX}	Serie infinita de impulsos equiespaciados una distancia EX	35
e	Permitividad eléctrica	9

f	Componente no nula del campo en el sistema de coordenadas (X, Y, d, D)	13
f^{SM}	Sección Medida en el sistema de coordenadas (X, Y, d, D)	12
f^{DR}	Distribución de reflectividad en el sistema de coordenadas (X, Y, d, D)	12
h	Impedancia del medio	120
m	Permeabilidad magnética	9
s	Conductividad eléctrica	9
u, u'	Desfase en la aplicación de una ventana en el dominio frecuencial para generar una función con soporte acotado	39
w	Velocidad angular, o pulsación, de las ondas electromagnéticas	17
y	Componente no nula del campo en el sistema de coordenadas $(\mathbf{r}^e, \mathbf{r}^r, t)$	11
y^{SM}	Sección Medida en el sistema de coordenadas $(\mathbf{r}^e, \mathbf{r}^r, t)$	12
y^{DR}	Distribución de reflectividad en el sistema de coordenadas $(\mathbf{r}^e, \mathbf{r}^r, t)$	12
f_k, Φ_n	Coeficientes de series de Fourier	32

Otros símbolos

$\mathbb{1}_{VX}$	Ventana cuadrada en el dominio natural	56
$\mathbb{1}_{VU}$	Ventana cuadrada en el dominio frecuencial	50
∇	Operador Nabla: $\nabla \equiv \hat{\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial}{\partial z}$	9

Notaciones

Resumen

En este Trabajo se diseña un algoritmo para la síntesis numérica de radargramas, incluyendo tanto el efecto de la difracción como la presencia de reflexiones múltiples. Este algoritmo para la resolución del Problema Directo se desarrolla para un modelo de Tierra simplificado, consistente en una colección de puntos difractores y reflectores plano-paralelos, inmersos en una matriz homogénea e isótropa, con incidencia normal de la radiación.

Para el desarrollo de este algoritmo se busca relacionar el perfil que se mediría sobre la superficie con la distribución de reflectividad en la subsuperficie, mediante la resolución de la Ecuación de Ondas en el dominio frecuencial.

Dada la necesidad de trabajar con transformadas de Fourier e interpolar los espectros, se estudia la forma apropiada de realizar ésta, desarrollándose la técnica para la interpolación en el espectro mediante la generalización del Teorema de Shannon. Ésta es una técnica muy costosa computacionalmente, por lo que se elige como alternativa la interpolación mediante splines cúbicos. Esta elección implica la aparición de un factor de atenuación espurio, cuya corrección excede los objetivos de este Trabajo, y será tratada en la ampliación natural del mismo.

Dadas las características de este método, la difracción aparece en forma natural. Las reflexiones múltiples se obtienen mediante la introducción, previa a la resolución de la Ecuación de Ondas, de una colección de reflectores ficticios asociados a cada reflexión múltiple, que son determinados mediante un procedimiento análogo al trazado de rayos.

Este algoritmo se implementa en el lenguaje de programación de MATLAB, y se diseña para ser ensamblado fácilmente en un programa más completo de modelado y análisis de radargramas.

Introducción

Los métodos numéricos juegan un papel fundamental en Geofísica Aplicada, ya que al conocimiento directo del subsuelo no puede accederse sin un enorme costo en excavaciones o en perforaciones; que son, además, métodos destructivos. Al contrario de lo que ocurre en otras disciplinas, en las que se pueden construir prototipos para chequear un nuevo concepto o procedimiento, en Geofísica sólo se dispone de simulaciones numéricas para examinar la efectividad de un método en la búsqueda de un objetivo en la subsuperficie. El núcleo de este trabajo lo constituye el diseño de un método para la resolución numérica del Problema Directo para el geo-radar.

El geo-radar es un método de Prospección Geofísica de alta resolución basado en la emisión y propagación de ondas electromagnéticas, y la posterior recepción de las reflexiones en discontinuidades, hábil para el estudio no destructivo de la estructura de la región subsuperficial y la localización de objetos enterrados, que empieza a desarrollarse en la segunda mitad del siglo XX.

El geo-radar consiste esencialmente en una unidad central, que sirve para coordinar el funcionamiento del resto de componentes, una serie de antenas encargadas de emitir los impulsos electromagnéticos y captar sus reflexiones en el subsuelo (cuyo patrón de radiación se considera, en general, contenido en un cono dirigido hacia el subsuelo), así como un soporte para visualizar los resultados y un sistema de grabación de señales que facilite el almacenamiento de los datos para su posterior análisis o reproducción (en la actualidad se emplea un ordenador portátil como medio de almacenamiento y visualización).

Las primeras contribuciones en la literatura científica en relación a este método se centran en la metodología que lo caracteriza. Se hace hincapié en la necesidad de determinar convenientemente los parámetros de adquisición y efectuar una buena caracterización del equipo (se realizan estudios sobre la base de experimentos de campo, en que se analizan diferentes frecuencias y potencias de emisión), y se resuelve el Problema Directo, aunque únicamente en modelos simplificados. Una vez conocidas las bases físicas del método aparecen contribuciones relacionadas con el tratamiento e interpretación de los datos, haciéndose uso de las técnicas tradicionalmente empleadas en la Prospección sísmica de reflexión para la migración, la interpolación, etc.,[1] para conseguir una interpretación cuantitativa más fiable, como puede verse en:

- Antenas (Bernabini et al., 1995; Jol, 1995).
- Funcionamiento y caracterización de sistemas de geo-radar (Pettinelli et al., 1994a y 1994b).
- Modelado numérico (Hollender y Tillard, 1998; Saintenoy y Tarantola, 2001).

[1] En ambos métodos se estudia la propagación de ondas en la subsuperficie, existiendo una mayor analogía entre las ondas S y las ondas electromagnéticas, dadas las características de polarización de estas últimas.

- Modelado de radar (Casper y Kung, 1996; Carcione et al., 2000).
- Procesado de imágenes (Sutinen, 1992; Tercier et al., 2000)
- Procesado de señales (Lehman y Green, 2000; Moran et al., 2000).
- Tomografía (Liu y Xiao, 1998; Holliger et al., 2001).

Es interesante hacer notar la falta de herramientas de tratamiento desarrolladas específicamente para datos de geo-radar, que tengan en cuenta las peculiaridades que diferencia este método con el de sísmica de reflexión.[2] Éste es uno de los aspectos que será tratado en este trabajo.

En la década de los 90 se produce un aumento en la aparición de colaboraciones sobre aplicaciones del geo-radar, alcanzando suficiente importancia como para ser protagonista de sesiones propias en los congresos internacionales. Existe, incluso, un congreso dedicado exclusivamente al geo-radar (International Conference on Ground-Penetrating Radar) iniciado a finales de los 80, que se realiza cada dos años. Así mismo, se incrementan y diversifican los campos de aplicación, por ejemplo:

- Aplicaciones medioambientales (Nakashima et al., 2001; Teixeira et al., 2002).
- Arqueología (Lorenzo et al., 1998; Da Silva et al., 2001; Pérez Gracia, 2001).
- Construcción e inspección (Hugenschmidt et al., 1998; Hugenschmidt, 2000).
- Evaluación de materiales (Matthews et al., 1998; Robert, 1998).
- Glaciología (Beres et al., 1999; Jakobsen y Overgaard, 2002).
- Hidrología (Tronicke et al., 1999; Gloaguen et al., 2001).
- Ingeniería (Lorenzo, 1994; Carcione, 1996).
- Minería (Suman y Knight, 1997; Hollender et al., 1999).
- Pavimentos y puentes (Gordon et al., 1998; Hugenschmidt et al., 1998).
- Radar aplicado a sondeos (Olsson et al., 1992; Hollender et al., 1999).

Este auge en el desarrollo de la técnica del geo-radar da idea de la importancia adquirida por este método de estudio en la última década. Esto es debido, en gran medida, a que se trata de un método no destructivo y a la relativa simplicidad del proceso de adquisición de datos, lo que lo hace un método de Prospección rápido, barato en comparación con otros métodos, eficiente y el de mayor resolución dadas las altas frecuencias que emplea.

En el modelado numérico de perfiles de geo-radar se han empleado fundamentalmente dos técnicas bien diferenciadas (Zeng et al, 1995):

[2] Mientras que en la Prospección sísmica son las propiedades elásticas de los materiales las que rigen la propagación de las ondas, en el caso de la Prospección con geo-radar las propiedades determinantes son las electromagnéticas. Así mismo, el geo-radar emplea ondas de frecuencias mucho mayores que las utilizadas en sísmica: 10–1000 MHz frente a 10–1000 Hz (Pérez Gracia, 2001).

La primera se basa en la resolución de la Ecuación de Ondas en el dominio natural mediante diferencias finitas.[3] Para ello se supone la existencia de capas, con geometría más o menos complicada, dentro de las cuales los parámetros electromagnéticos permanecen constantes. Los algoritmos basados en esta técnica equivalen a un trazado de rayos, y permiten determinar las amplitudes debidas a la reflexión, incluidas las reflexiones múltiples, pero no incluyen efectos típicamente ondulatorios tales como la difracción (Vasco et al, 1997; Chen y Huang, 1998; Frenje y Juhlin, 1999; Hammon et al., 2000; Saintenoy y Tarantola, 2001).

La segunda se basa en la resolución de la Ecuación de Ondas en el dominio frecuencial mediante el uso de transformadas de Fourier. Para ello se supone que los reflectores se encuentran constituidos por la superposición de puntos difractores en una matriz caracterizada por parámetros electromagnéticos constantes. Los algoritmos basados en esta técnica permiten determinar los efectos ondulatorios (difracción), pero no permiten tener en cuenta el patrón de emisión de la antena ni la existencia de reflexiones múltiples (Stolt et al., 1978; Ursin, 1983; Wen et al., 1988; Witten et al., 1994; Carcione y Cavallini, 2001).

El objetivo de este Trabajo de Investigación es diseñar un algoritmo para la síntesis numérica de radargramas, incluyendo tanto el efecto de la difracción como la presencia de reflexiones múltiples. Este algoritmo para la resolución del Problema Directo se desarrolla para un modelo de Tierra simplificado, consistente en una colección de puntos difractores y reflectores plano-paralelos, inmersos en una matriz homogénea e isótropa, con incidencia normal de la radiación; y debe poder ser generalizable a medios complejos, más próximos a la realidad del terreno.

Para el desarrollo de este algoritmo se empleará una metodología inversa a la expuesta por Stolt (1978) para la migración de perfiles sísmicos en el espacio frecuencial mediante resolución de la Ecuación de Ondas en el dominio frecuencial, particularizándose para la propagación de ondas electromagnéticas en el rango de frecuencias del geo-radar. Este método se encuadra en la segunda categoría entre las anteriormente expuestas, por lo que la difracción aparecerá en forma natural. Las reflexiones múltiples serán obtenidas mediante la introducción, previa a la resolución de la Ecuación de Ondas, de una colección de reflectores ficticios asociados a cada reflexión múltiple, que serán determinados mediante un procedimiento análogo al trazado de rayos.

Esta Memoria se encuentra estructurada en cuatro Capítulos. En el primero de ellos se desarrolla el núcleo del algoritmo. Para ello se resuelve el Problema Inverso, particularizado para la propagación de ondas electromagnéticas, empleándose una metodología paralela a la expuesta por Stolt (1974) para resolver la Ecuación de Ondas en el dominio frecuencial. También se discuten las simplificaciones necesarias para la obtención de un algoritmo operativo sencillo. La resolución del Problema Directo se logra mediante la inversión del algoritmo anterior.

Dada la importancia de una apropiada determinación numérica de las transformadas de Fourier directa e inversa, y la necesidad de efectuar interpolación en los dominios frecuencial y natural, en el Capítulo 2 se desarrolla el formalismo matemático de estas transformaciones en su

[3] A los efectos de esta Introducción, se entiende por DOMINIO NATURAL el conjunto de valores (x, y, z, t) en los que se busca la solución de la ecuación de ondas. Así mismo, se entiende por DOMINIO FRECUENCIAL el conjunto de valores de las frecuencias (u, v, w, w) asignadas por la Transformada de Fourier a los valores que definen el dominio natural (Cf. §2.1.1.).

aplicación a las funciones muestreadas con soporte acotado, efectuándose particularizaciones para las funciones constituidas por suma de impulsos, que son las tratadas en el presente trabajo.

En el Capítulo 3 se expone la estructuración del algoritmo implementado en sus módulos constituyentes, prestándose una especial atención al método de determinación de los reflectores ficticios que permiten obtener las ondas reflejadas múltiples.

En el Capítulo 4 se exponen y analizan los resultados de la aplicación de este algoritmo a distintos modelos.

Esta Memoria finaliza con la exposición de las conclusiones finales, prestándose una especial atención a las modificaciones necesarias para soslayar las sucesivas simplificaciones efectuadas en el desarrollo expuesto en esta Memoria.

Dada la complejidad matemática del texto (en especial, el Capítulo 2), y con el objeto de facilitar su lectura y comprensión, las definiciones y resultados matemáticos más importantes se delimitan mediante los símbolos ? y ? . Las demostraciones matemáticas que se desarrollan en este trabajo, que son expuestas en esta Memoria por mor de la completitud y con el objeto de fijar la notación que es empleada, se delimitan mediante símbolos ¦ , con el objeto de facilitar su omisión en una primera lectura, en caso que se desee.

Capítulo 1

Modelado y síntesis de perfiles de geo-radar mediante un algoritmo basado en la transformada de Fourier

Introducción

En este primer Capítulo se efectúa el desarrollo de un algoritmo para la síntesis numérica de radargramas. Para ello se resuelve el Problema Inverso, empleándose una metodología paralela a la expuesta por Stolt (1978) para la migración de perfiles sísmicos en el espacio frecuencial, mediante resolución de la Ecuación de Ondas escalar en el dominio frecuencial. Este desarrollo se particulariza para la propagación de ondas electromagnéticas; discutiéndose las simplificaciones necesarias para la obtención de un algoritmo operativo sencillo. La resolución del Problema Directo se logra mediante la inversión del algoritmo anterior.

Se encuentra dividido en seis Secciones dedicadas, respectivamente:

- A la exposición de las ecuaciones que rigen la propagación del campo electromagnético y a la obtención de la Ecuación de Ondas.
- Al planteamiento del problema de inversión previo a la resolución del Problema Directo.
- A la transformación de la Ecuación de Ondas en el dominio natural, previa a su transformación y resolución en el dominio frecuencial.
- Al planteamiento y resolución del problema de inversión transformado en el dominio frecuencial.
- A la exposición, a modo de compilación, de los principales resultados obtenidos.

1.1. Propagación del campo electromagnético: Ecuación de Ondas

La propagación del campo electromagnético (EM) en el interior de medios lineales, homogéneos e isótropos está descrita por las ecuaciones de Maxwell y las relaciones constitutivas (Ward y Hohmann, 1987):[1]

$$\nabla \wedge \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 , \qquad \nabla \wedge \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J}$$
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 , \qquad \nabla \cdot \mathbf{D} = r \tag{1.1.1}$$

$$\mathbf{D} = e\,\mathbf{E} , \qquad \mathbf{B} = m\mathrm{H} , \qquad \mathbf{J} = s\,\mathbf{E} + \mathbf{J}^{f}$$

Donde $\mathbf{E}$ denota la intensidad de campo eléctrico ($V \cdot m^{-1}$), $\mathbf{B}$ la inducción magnética (T o $Wb \cdot m^{2}$), $\mathbf{H}$ la intensidad de campo magnético ($A \cdot m^{-1}$), $\mathbf{D}$ el desplazamiento eléctrico ($C \cdot m^{-2}$) y $\mathbf{J}$ la densidad de corriente ($A \cdot m^{-2}$), suma de las densidades de corriente de conducción, $\mathbf{J} = s\,\mathbf{E}$, y la asociada a la fuente del campo EM (en el caso del geo-radar, la antena emisora), $\mathbf{J}^{f}$. Estas magnitudes vectoriales son dependientes de la posición y el tiempo.

Así mismo, e representa la permitividad eléctrica ($F \cdot m^{-1}$), m la permeabilidad magnética ($H \cdot m^{-1}$) y s la conductividad eléctrica ($S \cdot m^{-1}$) del medio. Se asume que estas magnitudes escalares son independientes del tiempo, temperatura y presión, pero pueden depender de la posición.

En el caso del geo-radar, la detección del campo EM en la antena receptora comienza una vez finalizada la emisión en la antena emisora, de tal forma que ésta se efectúa en unas condiciones tales que $\mathbf{J}^{f} = 0$ en todo punto del espacio (Lorenzo, 1994; Pérez Gracia, 2001).

Teniendo en cuenta esta consideración, y operando adecuadamente en (1.1.1), es posible escribir las denominadas Ecuaciones de Onda para el campo eléctrico y magnético, en la forma (Ward y Hohmann, 1987; Chen y Huang, 1998):

$$\mathbf{E}_{xx} + \mathbf{E}_{yy} + \mathbf{E}_{zz} = me\mathbf{E}_{tt} + ms\,\mathbf{E}_{t}$$
$$\mathbf{H}_{xx} + \mathbf{H}_{yy} + \mathbf{H}_{zz} = me\mathbf{H}_{tt} + ms\,\mathbf{H}_{t} \tag{1.1.2}$$

Donde los subíndices denotan derivación respecto de las variables indicadas, definidas en la subsección siguiente.

De acuerdo con Chen y Huang (1998), se considerará el campo EM como la superposición de los modos ortogonales transversal eléctrico y transversal magnético (modos TE y TM).

[1] Aquí aparece la primera de las aproximaciones que se consideran en el desarrollo:

> *Se considera que los medios que constituyen la región subsuperficial son lineales, homogéneos e isótropos.*

Es preciso tener en cuenta que las antenas emisora y receptora de un geo-radar están formadas por dipolos de media onda, caracterizados por radiar un campo EM máximo en la dirección perpendicular al dipolo y nulo a lo largo de su eje. Los dipolos emisor y receptor están orientados de tal forma que la dirección del campo eléctrico $\mathbf{E}$ de ambos sea paralela, y paralelos a la dirección de cada perfil (Lorenzo, 1994). En el caso en que las antenas son dipolos eléctricos, la señal registrada en la antena receptora es el campo eléctrico; mientras que en el caso en que las antenas son dipolos magnéticos, la señal registrada es el campo magnético (Cardama et al, 1998).

Teniendo en cuenta estas consideraciones, así como la similitud formal de las ecuaciones (1.1.2), se está interesado en la resolución de la Ecuación de Ondas escalar (Chen y Huang, 1998):

$$y_{xx} + y_{yy} + y_{zz} = me\, y_{tt} + ms\, y_t \qquad (1.1.3)$$

Donde y representa la componente no nula del campo eléctrico, en el caso de dipolos eléctricos, o la componente no nula del campo magnético, en el caso de dipolos magnéticos.

1.2. Planteamiento del Problema Inverso

Sea $\left(O;\hat{x},\hat{y},\hat{z}\right)$ un sistema de referencia, donde el origen O se sitúa sobre la superficie de la Tierra, el eje $\overline{OZ}$ (con vector unitario $\hat{\mathbf{z}}$) se sitúa en la dirección de la vertical, con sentido positivo hacia el interior de la Tierra, y los ejes $\overline{OX}$ y $\overline{OY}$ (con vectores unitarios $\hat{\mathbf{x}}$ y $\hat{\mathbf{y}}$ respectivamente) se sitúan sobre la superficie, ortogonales con $\overline{OZ}$ y entre sí, como se muestra en la Figura 1–2–1.

De acuerdo con Stolt (1978), se considera que cada traza representa, medida sobre la superficie, la amplitud de una de las componentes del campo eléctrico o magnético en función del tiempo. Ésta se representa mediante una función escalar y, que se considera que depende de las posiciones del emisor, $\mathbf{r}^e=\left(x^e,y^e,z^e\right)$, y receptor, $\mathbf{r}^r=\left(x^r,y^r,z^r\right)$, y del tiempo, que se denota:

$$y \equiv y\left(x^e, y^e, z^e; x^r, y^r, z^r; t\right) \tag{1.2.1}$$

De tal forma que un perfil está constituido por un conjunto de trazas, medidas a lo largo de un segmento de línea sobre la superficie.

El objetivo de este Capítulo es hallar la relación entre esta función escalar (1.2.1) y la distribución de reflectividad de la región subsuperficial, dado por una función escalar R función de la posición $\mathbf{r}=\left(x,y,z\right)$.

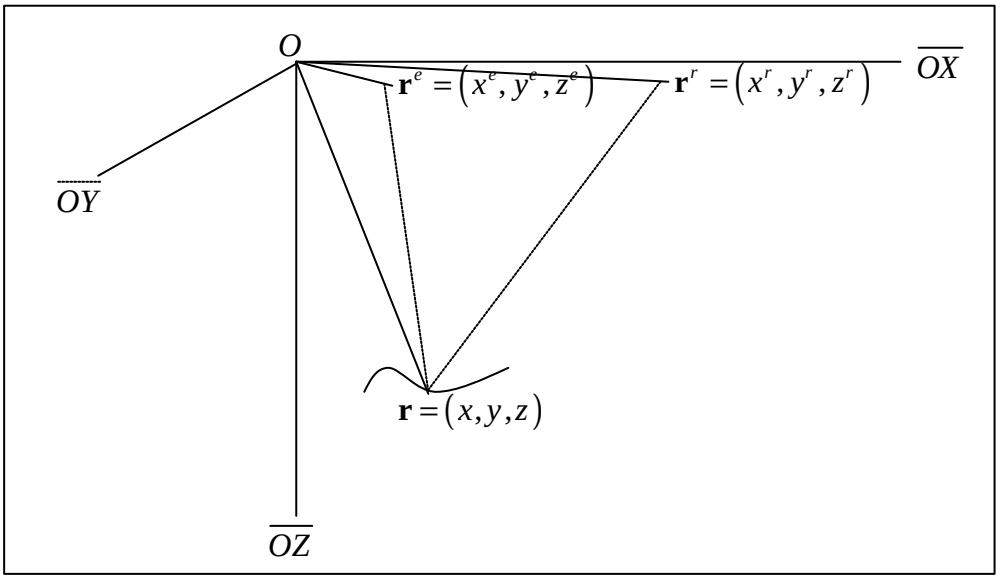


Figura 1–2-1: Sistema de coordenadas. Los vectores $\mathbf{r}^e$ y $\mathbf{r}^r$ denotan, respectivamente, la posición del emisor y el receptor; $\mathbf{r}$ denota la posición de un punto genérico de la subsuperficie.

Esta distribución de reflectividad R se estima como el valor de la función y que se observaría en cada punto, en el caso en que emisor y receptor se aproximan hacia el punto $\mathbf{r}$ de la subsuperficie, de tal forma que el tiempo de recorrido se hace cero; de tal forma que (Claerbout, 1971; Stolt, 1978):

$$R(x,y,z) \simeq y\,(x,y,z;x,y,z;0) \tag{1.2.2}$$

De aquí en adelante se referirá al conjunto de trazas (1.2.1) que determinan un perfil como **SECCIÓN MEDIDA**, y se denotará y^{SM}; y al conjunto de valores (1.2.2) que caracterizan la región subsuperficial como **DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD**, y se denotará y^{DR}.

1.3. Transformaciones de la Ecuación de Ondas en el dominio natural

Una vez planteado el Problema Inverso, se realizan varias aproximaciones, con el objeto de reducir el número de grados de libertad del problema e incrementar la factibilidad de su resolución. Para ello, se efectúan en la Ecuación de Ondas escalar dos transformaciones, resultado de sendos cambios de variables realizados con el objeto de expresar dichas aproximaciones en forma sencilla.

1.3.1. Primera transformación

1.3.1.1. Cambio de variables

Stolt (1978) propone efectuar un primer cambio de variables:

$$\left.\begin{matrix}\mathbf{r}^r\\ \mathbf{r}^e\end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix}\mathbf{R} \equiv \dfrac{\mathbf{r}^r + \mathbf{r}^e}{2}\\ \mathbf{r}^{re} \equiv \dfrac{\mathbf{r}^r - \mathbf{r}^e}{2}\end{matrix}\right. \tag{1.3.1}$$

De tal forma que $\mathbf{R} = \left(X, Y, Z\right)$ representa la posición del centro del dispositivo y $\mathbf{r}^{re} = \left(x^{re}, y^{re}, z^{re}\right)$ la posición relativa receptor–emisor. Téngase en cuenta que, en la mayor parte de los casos, emisor y receptor se mueven simultáneamente a lo largo del perfil, de tal forma que la coordenada $\mathbf{r}^{re}$ permanece constante.

En este nuevo sistema de coordenadas, la función y expuesta en (1.2.1) se rescribe en la forma:

$$c\left(X, Y, Z; x^{re}, y^{re}, z^{re}; t\right) \equiv y\left(x^e, y^e, z^e; x^r, y^r, z^r; t\right) \tag{1.3.2}$$

Stolt (1978) propone efectuar una primera aproximación:

> *Se considera que la superficie viene dada por el plano horizontal* $z = 0$*, de tal forma que* $z^e = z^r = 0$*; luego* $Z = z^{re} = 0$.

Teniendo en cuenta esta aproximación, la SECCIÓN MEDIDA (1.2.1) toma la forma:

$$c^{SM}\left(X,Y,0;\, x^{re}, y^{re},0;\, t\right) = y^{SM}\left(x^{e}, y^{e},0;\, x^{r}, y^{r},0;\, t\right) \tag{1.3.3}$$

Y la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD (1.2.2):

$$c^{DR}\left(X,Y,Z;\, 0,0,0;0\right) = y^{DR}\left(x, y, z;\, x, y, z;\, 0\right) \tag{1.3.4}$$

En este último caso, téngase en cuenta que la posición del centro del dispositivo coincide con la posición del punto, y la posición relativo receptor–emisor es el vector cero, al ser ambos coincidentes.

Stolt (1978) propone efectuar una segunda aproximación:

> *Se considera incidencia normal a la superficie, de tal forma que emisor y receptor son coincidentes y* $x^e = x^r$, $y^e = y^r$; *luego* $X = x^e$, $Y = y^e$ *y* $x^{re} = y^{re} = 0$.

Teniendo en cuenta esta aproximación, la SECCIÓN MEDIDA (1.3.3) y la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD (1.3.4) se rescriben, respectivamente, en la forma:

$$\begin{aligned} c^{SM}\left(X,Y,0;0,0,0;\, t\right) &= y^{SM}\left(x^{e}, y^{e},0;\, x^{e}, y^{e},0;\, t\right) \\ c^{DR}\left(X,Y,Z;0,0,0;0\right) &= y^{DR}\left(x, y, z;\, x, y, z;\, 0\right) \end{aligned} \tag{1.3.5}$$

1.3.1.2. Transformación de la Ecuación de Ondas

Dado el cambio de variables (1.3.1), es preciso modificar la Ecuación de Ondas (1.1.3) para transformar las derivadas respecto de las variables antiguas y expresarlas en términos de derivadas respecto de las nuevas variables. Este cambio de derivadas se efectúa teniendo en consideración la siguiente particularización de la Regla de la Cadena (Harris y Stocker, 1998, §12.2.10; Marsden y Hoffman, 1999, §6.5.1):

? **REGLA DE LA CADENA (CASO PARTICULAR).** Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $f : A \to \mathbb{R}^m$ una función diferenciable en $x \in A$, y sea $B \subset \mathbb{R}^m$ un abierto y $g : B \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en $f(x) \in B$. Entonces, la matriz jacobiana de la función compuesta $h \equiv g \circ f = g\left[f(x)\right]$ en el punto x es el producto de la matriz jacobiana de g evaluada en

$f(x)$ con la matriz jacobiana de f evaluada en x, en este orden, de tal forma que las derivadas parciales de h vienen dadas por la expresión:

$$\frac{\partial h}{\partial x_i} = \sum_{a=1}^{m} \frac{\partial h}{\partial y_a} \cdot \frac{\partial y_a}{\partial x_i}$$

$$\forall i \in \{1, \cdots, n\} \tag{1.3.6}$$

?

Las derivadas parciales de segundo orden se determinan mediante iteración, en la forma (Harris y Stocker, 1998, §12.6.1; Marsden y Hoffman, 1999, §6.8):

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial h}{\partial x_i}\right)$$

$$\forall i, j \in \{1, \cdots, n\} \tag{1.3.7}$$

Bajo ciertas condiciones, las derivadas parciales cumplen una propiedad de simetría:

? **LEMA DE SCHWARZ (CASO PARTICULAR).** Sea $h : A \to \mathbb{R}^n$ una función diferenciable dos veces en el conjunto abierto $A \subset \mathbb{R}$, con derivadas parciales segundas continuas. Entonces se da la igualdad:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 h}{\partial x_j \partial x_i}$$

$$\forall i, j \in \{1, \cdots, n\} \tag{1.3.8}$$

?

Teniendo en cuenta la regla de la cadena (1.3.6), las derivadas parciales (1.3.7) se determinan en la forma:

? **DETERMINACIÓN DE DERIVADAS PARCIALES SEGUNDAS (CASO PARTICULAR).** Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $f : A \to \mathbb{R}^m$ una función diferenciable en $x \in A$, y sea $B \subset \mathbb{R}^m$ un abierto y $g : B \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en $f(x) \in B$. Entonces, las derivadas parciales de segundo orden de h vienen dadas por la expresión:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x_j \partial x_i} = \sum_{b=1}^{m}\sum_{a=1}^{m}\left(\frac{\partial y_b}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial^2 h}{\partial y_b \partial y_a}\cdot\frac{\partial y_a}{\partial x_i} + \frac{\partial y_b}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial h}{\partial y_a}\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial y_a}{\partial y_b}\right)\right)$$

(1.3.9)

$$\forall i, j \in \{1, \cdots, n\}$$

?

¦ **DEMOSTRACIÓN:** Aplicando nuevamente la Regla de la Cadena (1.3.6) en (1.3.7), se obtiene directamente:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 h}{\partial x_j \partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_j}\sum_{a=1}^{m}\frac{\partial h}{\partial y_a}\cdot\frac{\partial y_a}{\partial x_i} = \\ &= \sum_{b=1}^{m}\frac{\partial}{\partial y_b}\left(\sum_{a=1}^{m}\frac{\partial h}{\partial y_a}\cdot\frac{\partial y_a}{\partial x_i}\right)\frac{\partial y_b}{\partial x_j} = \\ &= \sum_{b=1}^{m}\sum_{a=1}^{m}\left(\frac{\partial y_b}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial^2 h}{\partial y_b \partial y_a}\cdot\frac{\partial y_a}{\partial x_i} + \frac{\partial y_b}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial h}{\partial y_a}\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial y_a}{\partial y_b}\right)\right)\end{aligned} \tag{1.3.10}$$

$$\forall i, j \in \{1, \cdots, n\}$$

¦

Obsérvese que, en el caso habitual en que las coordenadas $\{y_i\}_{i=1}^{m}$ son independientes entre sí (basta que sean linealmente dependientes), la expresión para las derivadas segundas (1.3.7), se reduce a:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x_j \partial x_i} = \sum_{b=1}^{m}\sum_{a=1}^{m}\frac{\partial^2 h}{\partial y_a \partial y_b}\cdot\frac{\partial y_a}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial y_b}{\partial x_j}$$

(1.3.11)

$$\forall i, j \in \{1, \cdots, n\}$$

Teniendo en cuenta las expresiones para el cambio de variables en las derivadas parciales expuestas en (1.3.6) y (1.3.9) se obtiene, para el cambio de variables expuesto en (1.3.1):

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x_r} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial X} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}, \qquad \frac{\partial}{\partial x_e} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial X} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} \\ &\frac{\partial^2}{\partial x_r^2} = \frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial X \partial x} + \frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial^2}{\partial x_e^2} = \frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial X^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial X \partial x} + \frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\end{aligned} \tag{1.3.12}$$

Obteniéndose expresiones análogas para el resto de coordenadas.

Stolt (1978) propone efectuar una nueva aproximación:

> *Se desprecian las derivadas parciales respecto a* x, y, z.

Este autor considera difícil de justificar esta aproximación, cuya necesidad tiene un carácter meramente operativo. En el caso que se está tratando en este trabajo, es preciso tener en cuenta que, bajo las aproximaciones anteriormente realizadas, estas coordenadas han sido fijadas a cero, de tal forma que carece de sentido tener en cuenta las derivadas parciales respecto de éstas.

Teniendo en cuenta estas consideraciones, así como el resultado expuesto en (1.3.12), en este nuevo sistema de coordenadas la Ecuación de Ondas escalar (1.1.3) se rescribe en la forma:

$$c_{XX} + c_{YY} + c_{ZZ} = 4\left(mec_{tt} + msc_{t}\right) \tag{1.3.13}$$

1.3.2. Segunda transformación

1.3.2.1. Cambio de variables

Stolt (1978) propone efectuar un nuevo cambio de variables:

$$\left.\begin{matrix} Z \\ t \end{matrix}\right\} \rightarrow \begin{cases} d \equiv Z \\ D \equiv \dfrac{ct}{2} + Z \end{cases} \tag{1.3.14}$$

Donde c representa la velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas en el medio, dada por (Lorenzo, 1994):

$$c = \frac{w}{\mathrm{Im}\left(\sqrt{iwms - wme}\right)} = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{me}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \left(\dfrac{s}{we}\right)^2}\right)}} \tag{1.3.15}$$

Donde, a su vez, $w = 2p\,f$ representa la frecuencia angular, o pulsación, de las ondas electromagnéticas (rad·s^{-1}). Obsérvese que la velocidad de propagación depende de la posición (a través de los parámetros electromagnéticos del medio) y de cada frecuencia contenida en la emisión de la antena. Únicamente en medios no conductores, al ser la conductividad nula, desaparece la dependencia de la frecuencia, y la velocidad de propagación se expresa en la forma:

$$c = \frac{1}{\sqrt{me}} \tag{1.3.16}$$

En este caso la nueva coordenada d sustituye a la profundidad Z, y la coordenada D representa el doble del promedio entre la profundidad real y la profundidad asociada al tiempo doble de recorrido. Este cambio carece de sentido físico, y se introduce con el objeto de simplificar la posterior resolución de la Ecuación de Ondas en el dominio frecuencial.

En este nuevo sistema de coordenadas, la función c expuesta en (1.3.2) se rescribe en la forma:

$$f\left(X,Y,d,D\right) \equiv c\left(X,Y,Z;0,0,0;\ t\right) \tag{1.3.17}$$

En este trabajo se propone efectuar una nueva aproximación:

> *Se considera que los parámetros electromagnéticos son constantes en todo el medio.*

Esta aproximación carece de sentido físico, en términos estrictos, puesto que la existencia de reflectores se ve condicionada a la presencia de discontinuidades en los parámetros electromagnéticos del medio. No obstante, hay autores (p.e., Zen et al., 1995) que consideran que esta aproximación es aplicable en muchos casos, citándose el caso de rocas ígneas donde la compactación diferencial respecto a la profundidad no es significativa, o terrenos calcáreos. Éste no es el caso que se da en la mayor parte de las aplicaciones a la Arqueología; no obstante, será tenida en cuenta con el objeto de simplificar convenientemente el presente desarrollo, y será discutida en Capítulos posteriores.[2]

Teniendo en cuenta esta aproximación, la SECCIÓN MEDIDA y la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD expuestas en (1.3.5) se rescriben, respectivamente, en la forma:

$$\begin{aligned} f^{SM}\left(X,Y,0,D\right) &= f^{SM}\left(X,Y,0,\frac{ct}{2}\right) = c^{SM}\left(X,Y,0;0,0,0;\ t\right) \\ f^{DR}\left(X,Y,D,D\right) &= f^{DR}\left(X,Y,Z,Z\right) = c^{DR}\left(X,Y,Z;0,0,0;0\right) \end{aligned} \tag{1.3.18}$$

[2] En desarrollos posteriores, donde se elimina esta aproximación, cobra sentido físico la definición de las nuevas variables D y d (Stolt, 1974).

1.3.2.2. Transformación de la Ecuación de Ondas

Dado el cambio de variables (1.3.14), es preciso modificar nuevamente la Ecuación de Ondas (1.3.13) para transformar las derivadas respecto de las variables antiguas y expresarlas en términos de derivadas respecto de las nuevas variables. Teniendo en cuenta las expresiones para el cambio de variables en las derivadas parciales expuestas en (1.3.6) y (1.3.9) se obtiene, para el cambio expuesto en (1.3.14):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial Z} &= \frac{\partial}{\partial D} + \frac{\partial}{\partial d}, \qquad & \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{c}{2}\frac{\partial}{\partial D} \\ \frac{\partial^2}{\partial Z^2} &= \frac{\partial^2}{\partial D^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial D \partial d} + \frac{\partial^2}{\partial d^2}, \qquad & \frac{\partial^2}{\partial t^2} &= \frac{c}{4}\frac{\partial^2}{\partial D^2} \end{aligned} \tag{1.19}$$

Así pues, es posible rescribir en este nuevo sistema de coordenadas la Ecuación de Ondas escalar (1.3.13) en la forma:

$$f_{XX} + f_{YY} + f_{DD} + 2f_{Dd} + f_{dd} = c^2 me f_{DD} + 2cms f_D \tag{1.3.20}$$

Teniendo en cuenta el valor de la velocidad de propagación expuesto en (1.3.15), es posible rescribir esta ecuación en la forma:

$$f_{XX} + f_{YY} + f_{DD} + 2f_{Dd} + f_{dd} = 2\left(\frac{1}{f^2} f_{DD} + \frac{g}{f} f_D \right) \tag{1.3.21}$$

Donde han sido definidas:

$$f(w) \equiv \sqrt{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{s}{we} \right)^2}}, \qquad g \equiv s\sqrt{2\frac{m}{e}} \tag{1.3.22}$$

La expresión de la Ecuación de Ondas escalar (1.3.21) será la empleada en la siguiente Sección para determinar la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD conocida la SECCIÓN MEDIDA.

1.4. Resolución de la Ecuación de Ondas en el dominio frecuencial: Obtención de la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD a partir de la SECCIÓN MEDIDA

La relación entre la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD y la SECCIÓN MEDIDA se determina vía sus transformadas de Fourier, a través de la transformada de la Ecuación de Ondas escalar (1.3.21) obtenida tras los cambios de variable y las aproximaciones efectuadas en la Sección anterior.

1.4.1. Generalización de la SECCIÓN MEDIDA en función de su transformada de Fourier

Sea la transformada de Fourier de la SECCIÓN MEDIDA expuesta en (1.3.18):[3]

$$A(U,V,Q) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dX \int_{-\infty}^{\infty} dY \int_{-\infty}^{\infty} dD\, e^{-i(UX+VY+QD)} \cdot f^{SM}(X,Y,0,D) \qquad (1.4.1)$$

Donde U, V y Q representan las frecuencias asociadas a las coordenadas X, Y y D, respectivamente.

Dada la transformada (1.4.1), es posible recuperar la SECCIÓN MEDIDA en la forma:

$$f^{SM}(X,Y,0,D) = \left(\frac{1}{2p}\right)^3 \int_{-\infty}^{\infty} dU \int_{-\infty}^{\infty} dV \int_{-\infty}^{\infty} dQ\, e^{i(UX+VY+QD)} \cdot A(U,V,Q) \qquad (1.4.2)$$

Es posible generalizar la expresión anterior en la forma:

$$f(X,Y,d,D) = \left(\frac{1}{2p}\right)^3 \int_{-\infty}^{\infty} dU \int_{-\infty}^{\infty} dV \int_{-\infty}^{\infty} dQ\, e^{i(UX+VY+qd+QD)} \cdot A(U,V,Q) \qquad (1.4.3)$$

Donde q representa la frecuencia asociada a la coordenada d. Obsérvese que si se sustituye $d = 0$ en la expresión anterior, se obtiene (1.4.2).

La nueva frecuencia q debe ser tal que se verifique la Ecuación de Ondas escalar (1.3.21). Ésta se expresa en el dominio frecuencial en la forma (Ward y Hohmann, 1987):

[3] Cf. Capítulo 2.

$$\left[(iU)^2+(iV)^2+(iQ)^2+2(iQ)(iq)+(iq)^2\right]\cdot\Phi(U,V,q,Q)= \\ =2\left(\frac{1}{f^2}(iQ)^2+\frac{g}{f}(iQ)\right)\cdot\Phi(U,V,q,Q) \tag{1.4.4}$$

Donde $\Phi(U,V,q,Q)$ representa la transformada de Fourier de $f(X,Y,d,D)$. Así pues, se obtiene la relación de dispersión:

$$U^2+V^2+Q^2+2Qq+q^2=2\left(\frac{1}{f^2}Q^2-\frac{g}{f}iQ\right) \tag{1.4.5}$$

De tal forma que es posible obtener la nueva frecuencia q en términos del resto de frecuencias en la forma:

$$q=-Q\pm\sqrt{2\left(\frac{1}{f^2}Q^2-\frac{g}{f}iQ\right)-\left(U^2+V^2\right)} \tag{1.4.6}$$

1.4.2. Obtención de la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD

Es posible obtener una expresión para la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD expuesta en (1.3.18), sustituyendo la expresión de q (1.4.6) en la generalización (1.4.3), considerando el caso particular $d=D$, en la forma:

$$f^{DR}(X,Y,D,D)= \\ =\left(\frac{1}{2p}\right)^3\int_{-\infty}^{\infty}dU\int_{-\infty}^{\infty}dV\int_{-\infty}^{\infty}dQ\; e^{i\left(UX+VY\pm D\sqrt{2\left(\frac{1}{f^2}Q^2-\frac{g}{f}iQ\right)-\left(U^2+V^2\right)}\right)}\cdot A(U,V,Q) \tag{1.4.7}$$

Es posible rescribir la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD arriba expuesta para expresarla en la forma de una transformada de Fourier inversa. Para ello, se propone el cambio de variable:

$$K\equiv\pm\sqrt{2\left(\frac{1}{f^2}Q^2-\frac{g}{f}iQ\right)-\left(U^2+V^2\right)} \tag{1.4.8}$$

Elevando al cuadrado y operando en la expresión anterior se obtiene:

$$\frac{1}{f^2}Q^2-\frac{g}{f}iQ-\frac{H^2}{2}=0 \tag{1.4.9}$$

Donde se ha definido:

$$H^2\equiv K^2+U^2+V^2 \tag{1.4.10}$$

De tal forma que es posible expresar la frecuencia Q en la forma:

$$Q = \left(\frac{ig \pm \sqrt{2H^2 - g^2}}{2} \right) \cdot f(w) \tag{1.4.11}$$

Teniendo en cuenta el valor de H^2 expuesto en (1.4.10), tomando diferenciales en ambos miembros de la expresión anterior se obtiene:

$$dQ = \pm \frac{K}{\sqrt{2H^2 - g^2}} f(w) \cdot dK \tag{1.4.12}$$

Así pues, es posible rescribir la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD (1.4.7), sustituyendo el valor de Q expuesto en (1.4.11) y el valor de la diferencial dQ expuesto en (1.4.12) en la forma:

$$f^{DR}(X, Y, D, D) = \left(\frac{1}{2p} \right)^3 \int_{-\infty}^{\infty} dU \int_{-\infty}^{\infty} dV \int_{-\infty}^{\infty} dK \, e^{i(UX + VY + KD)} \cdot B(U, V, K) \tag{1.4.13}$$

Donde se ha definido el nuevo espectro filtrado:

$$B(U, V, K) \equiv \left(\frac{dQ}{dK} \right) A(U, V, Q(U, V, K)) \tag{1.4.14}$$

Es importante observar que, en las aplicaciones numéricas, se parte de un espectro $A(U, V, Q)$ definido en puntos equiespaciados en el dominio frecuencial. No obstante, el nuevo espectro filtrado $B(U, V, K)$ dado por la expresión anterior no se encontrará definido en puntos equiespaciados en el dominio de la nueva frecuencia K, dada la forma funcional de la transformación (1.4.11).

Debido a que el cálculo numérico de la transformada de Fourier inversa requiere que el espectro se defina en puntos equiespaciados, será preciso interpolar adecuadamente el espectro obtenido mediante (1.4.14). Esta es una de las razones que motivan los desarrollos que se efectuarán en el Capítulo 2.

1.5. Recapitulación

En esta Sección se exponen, a modo de compilación, los resultados principales expuestos en el presente Capítulo para el desarrollo de un algoritmo para la síntesis numérica de radargramas.

1.5.1. Aproximaciones efectuadas

En el desarrollo expuesto en este Capítulo se efectúan las siguientes aproximaciones y simplificaciones:

1. Se consideran los medios como lineales, homogéneos e isótropos.
2. Se considera que la superficie viene dada por un plano horizontal.
3. Se considera incidencia normal a la superficie, de tal forma que emisor y receptor son coincidentes.
4. Se desprecian las derivadas parciales respecto a las coordenadas relativas receptor–emisor.
5. Se considera que los parámetros electromagnéticos son constantes en todo el medio.

En los Capítulos subsiguientes estas aproximaciones serán discutidas, y se indicará la metodología necesaria para soslayarlas.

1.5.2. Resolución del Problema Inverso: Determinación de la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD a partir de la SECCIÓN MEDIDA

En esta Subsección se expone, en forma operativa, la metodología desarrollada en el presente Capítulo para la resolución del Problema Inverso.

1. Se efectúan los cambios de variable necesarios para trasladar los datos de la SECCIÓN MEDIDA desde el sistema de coordenadas $\left(x^e, y^e, z^e; x^r, y^r, z^r; t\right)$ al sistema de coordenadas $\left(X, Y, d, D\right)$, de acuerdo con (1.3.1) y (1.3.14), obteniéndose la función :

$$f^{SM}\left(X,Y,0,D\right) = y^{SM}\left(x,y,0;\, x,y,0;\, t\right) \qquad (1.3.3),\ (1.3.5),\ (1.3.18)$$

2. Se determina, en este sistema de coordenadas, la transformada de Fourier de la SECCIÓN MEDIDA:

$$A\left(U,V,Q\right) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dX \int_{-\infty}^{\infty} dY \int_{-\infty}^{\infty} dD\; e^{-i(UX+VY+QD)} \cdot f^{SM}\left(X,Y,0,D\right) \qquad (1.4.1)$$

3. Se filtra la transformada de Fourier anterior mediante (1.4.14), obteniéndose el nuevo espectro:

$$B\left(U,V,K\right) \equiv \left(\frac{dQ}{dK}\right) A\left(U, V, Q\left(U, V, K\right)\right) \qquad (1.5.1)$$

Donde dQ/dK se determina de acuerdo con (1.4.12) en la forma:

$$\frac{dQ}{dK} = \pm \frac{K}{\sqrt{2H^2 - g^2}}\, f\left(w\right) \qquad (1.5.2)$$

Donde, a su vez, $K\left(U,V,Q\right)$ se determina mediante (1.4.8), H^2 mediante (1.4.10) y $f = f\left(w\right)$ y g mediante (1.3.22).

4. Se interpola el nuevo espectro para determinar su valor en puntos equiespaciados del nuevo dominio frecuencial.

5. La DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD se determina mediante la transformada de Fourier inversa del nuevo espectro filtrado:

$$f^{DR}\left(X,Y,D,D\right) = \\ = \left(\frac{1}{2p}\right)^3 \int_{-\infty}^{\infty} dU \int_{-\infty}^{\infty} dV \int_{-\infty}^{\infty} dK\; e^{i(UX+VY+KD)} \cdot B\left(U,V,K\right) \qquad (1.4.13)$$

6. Finalmente, se efectúan los cambios de variable necesarios para trasladar los datos de la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD desde el sistema de coordenadas $\left(X, Y, d, D\right)$ al sistema de coordenadas $\left(x^e, y^e, z^e; x^r, y^r, z^r; t\right)$, de acuerdo con (1.3.1) y (1.3.14), obteniéndose la función:

$$R\left(x,y,z\right) \simeq y\left(x, y, z; x, y, z; 0\right) = f^{DR}\left(X,Y,D,D\right) \qquad (1.2.2),\ (1.3.4),\ (1.3.5),\ (1.3.18)$$

1.5.3. Resolución del Problema Directo: Determinación de la SECCIÓN MEDIDA a partir de la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD

En esta Subsección se expone, en forma operativa, la metodología para la resolución del Problema Directo, objetivo del presente Capítulo. Esta metodología consiste en la inversión de la expuesta en la Subsección anterior para la resolución del Problema Inverso.

1. Se efectúan los cambios de variable necesarios para trasladar los datos de la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD desde el sistema de coordenadas $\left(x^e, y^e, z^e; x^r, y^r, z^r; t\right)$ al sistema de coordenadas $\left(X, Y, d, D\right)$, de acuerdo con (1.3.1) y (1.3.14), obteniéndose la función:

$$f^{DR}\left(X, Y, D, D\right) = y\left(x, y, z; x, y, z; 0\right) \simeq R\left(x, y, z\right) \qquad \text{(1.2.2), (1.3.4), (1.3.5), (1.3.18)}$$

2. Se determina, en este sistema de coordenadas, la transformada de Fourier de la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD:

$$B\left(U, V, K\right) = \int_{-\infty}^{\infty} dX \int_{-\infty}^{\infty} dY \int_{-\infty}^{\infty} dD\, e^{-i(UX+VY+KD)} \cdot f^{DR}\left(X, Y, D, D\right) \qquad (1.5.3)$$

3. Se filtra la transformada de Fourier anterior, mediante inversión de (1.4.14), obteniéndose el nuevo espectro:

$$A\left(U, V, Q\right) \equiv \left(\frac{dQ}{dK}\right)^{-1} B\left(U, V, K\left(U, V, Q\right)\right) \qquad (1.5.4)$$

Donde $\left(dQ/dK\right)^{-1}$ se determina de acuerdo con (1.4.12), aplicando el teorema de la función inversa (Harris y Stocker, 1998, §12.2.15; Marsden y Hoffman, 1999, §7.1.1), en la forma:

$$\left(\frac{dQ}{dK}\right)^{-1} = \pm \frac{\sqrt{2H^2 - g^2}}{K \cdot f\left(w\right)} \qquad (1.5.5)$$

Donde, a su vez, H^2 se determina mediante (1.4.10) y $f = f\left(w\right)$ y g mediante (1.3.22).

4. Se interpola el nuevo espectro para determinar su valor en puntos equiespaciados del nuevo dominio frecuencial.

5. La SECCIÓN MEDIDA se determina mediante la transformada de Fourier inversa del nuevo espectro filtrado:

$$f^{SM}\left(X, Y, 0, D\right) = \left(\frac{1}{2p}\right)^3 \int_{-\infty}^{\infty} dU \int_{-\infty}^{\infty} dV \int_{-\infty}^{\infty} dQ\, e^{i(UX+VY+QD)} \cdot A\left(U, V, Q\right) \qquad (1.4.2)$$

6. Finalmente, se efectúan los cambios de variable necesarios para trasladar los datos de la SECCIÓN MEDIDA desde el sistema de coordenadas $\left(X, Y, d, D\right)$ al sistema de coordenadas $\left(x^e, y^e, z^e; x^r, y^r, z^r; t\right)$, de acuerdo con (1.3.1) y (1.3.14), obteniéndose la función:

$$y^{SM}\left(x, y, 0; x, y, 0; t\right) = f^{SM}\left(X, Y, 0, D\right) \qquad (1.3.3), (1.3.5), (1.3.18)$$

Capítulo 2

Formalismo matemático
de la transformada de Fourier
de funciones muestreadas
con soporte acotado

Introducción

En este segundo Capítulo se realiza un estudio del análisis de Fourier. Existen numerosas publicaciones en que este tema es tratado en amplitud, ya sea desde el punto de vista analítico-matemático (Tranter, 1956; Papoulis, 1962; Kaiser, 1994; Debnath, 1995; Partington y Ünalmis, 2001) como desde el punto de vista de sus aplicaciones (Udías y López Arroyo, 1970; Brigham 1974; Andrews y Shivamoggi, 1988; James, 1995). En este Capítulo se realizará un estudio aplicado a las funciones muestreadas de soporte acotado,[1] efectuándose particularizaciones para las funciones constituidas por suma de impulsos, que son las tratadas en el presente trabajo. Todos los desarrollos se efectuarán para funciones en una única dimensión, pudiendo realizarse de forma trivial la extensión a dimensiones superiores.

Se encuentra dividido en seis Secciones dedicadas, respectivamente:

- A la definición de la transformada integral de Fourier y la exposición del Teorema Integral de Fourier. Así mismo, en el camino hacia la determinación de versiones del antedicho Teorema en forma discreta, se definen las series de Fourier.

- Al muestreo y acotación del soporte de funciones mediante la aplicación de ventanas, y a la definición formal de funciones muestreadas con soporte acotado.

- A la determinación de las transformadas de Fourier directa e inversa de funciones muestreadas con soporte acotado, y su relación con las transformadas que son determinadas computacionalmente.[2]

- Al estudio de la interpolación en las transformadas de Fourier, mediante generalizaciones del Teorema del Muestreo para funciones con soporte acotado por la aplicación de una ventana general.

- Al estudio de las relaciones entre las transformadas directa e inversa y la función original.

- A la exposición, a modo de compilación, de los principales resultados obtenidos.

[1] Se define el soporte de una función f como el cierre del conjunto de valores de los argumentos para los cuales f es no nula (Weisstein, 1999).

[2] En el desarrollo de este Capítulo, se entenderá que las transformadas determinadas computacionalmente se calculan con MATLAB (Cf. §3.1).

2.1. Transformada integral de Fourier

2.1.1. Transformadas de Fourier directa e inversa. Teorema Integral de Fourier

? **DEFINICIÓN (TRANSFORMADA DE FOURIER).** Dada una función $f(x)$, se define su transformada de Fourier mediante la integral (Papoulis, 1962; Brigham, 1974):

$$F(u) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx\ f(x) \cdot e^{-iux} \tag{2.1.1}$$

Se denota la transformada de Fourier por $TF\left[f(x)\right](u) \equiv F(u)$.

?

La transformada de Fourier inversa puede determinarse haciendo uso del Teorema Integral de Fourier en forma exponencial:

? **TEOREMA INTEGRAL DE FOURIER.** Dada una función $f(x)$ absolutamente integrable, esto es:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \left| f(x) \right| < +\infty \tag{2.1.2}$$

Tal que ella y su derivada son continuas a trozos, se cumple (Debnath, 1995):

$$f(x) = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} du\, e^{iux} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dx'\ f(x') \cdot e^{-iux'} \tag{2.1.3}$$

?

En la §2.3 de la obra de Andrews y Shivamoggi (1988) puede consultarse una demostración rigurosa de este Teorema, en su forma habitual en términos de cosenos.

Obsérvese que la integral más interna de (2.1.3) representa la transformada de Fourier de $f(x)$, de tal forma que, mediante sustitución, esta expresión se rescribe en la forma:

$$f(x) = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} du\ F(u) \cdot e^{iux} \tag{2.1.4}$$

Esta expresión permite definir la transformada de Fourier inversa:

? **DEFINICIÓN (TRANSFORMADA DE FOURIER INVERSA).** Dada una función $F(u)$ definida sobre la recta real, se define su transformada de Fourier inversa mediante la integral (2.1.4), y se denota por $TF^{-1}\left[F(u)\right](x) \equiv f(x)$.

?

Al conjunto de valores x donde la función $f(x)$ está definida se le denomina genéricamente **DOMINIO NATURAL**. Al conjunto de valores u donde la función $F(u)$ está definida se le denomina genéricamente **DOMINIO FRECUENCIAL**. Las variables x y u así relacionadas se denominan **VARIABLES CONJUGADAS**. En el caso en que x sea una coordenada de posición, su frecuencia asociada u será un número de onda, mientras que en el caso en que sea un tiempo, su frecuencia asociada será la frecuencia angular.

Las transformadas de Fourier directa e inversa existirán si se satisfacen las condiciones de Dirichlet (James, 1995):

- Las transformadas $F(u)$ y $f(x)$ son funciones univaluadas en todo su dominio.
- Las funciones $F(u)$ y $f(x)$ son continuas a trozos.
- Las funciones $F(u)$ y $f(x)$ son de cuadrado integrable, esto es:

$$\int_{-\infty}^{\infty} du \left\| F(u) \right\|^2 < +\infty , \qquad \int_{-\infty}^{\infty} dx \left\| f(x) \right\|^2 < +\infty \tag{2.1.5}$$

- Las funciones $F(u)$ y $f(x)$ están acotadas superior e inferiormente.

Estas condiciones, pese a ser muy restrictivas, se cumplen en el caso de funciones muestreadas de soporte acotado, que son las tratadas en este trabajo.

Es interesante mencionar que la condiciones de Dirichlet son suficientes, aunque no necesarias, para la existencia de la transformada de Fourier (por ejemplo, la d de Dirac no es una función acotada, pese a lo cual sí tiene transformada de Fourier). Existen generalizaciones de la definición de transformada de Fourier (Lighthill, 1958; Jones, 1982) que permiten incluir funciones que no cumplen estas condiciones.

2.1.2. Hacia la discretización del Teorema Integral de Fourier. Series de Fourier.

El Teorema Integral de Fourier demuestra ser una herramienta enormemente útil en los desarrollos que involucran las transformaciones integrales en general, y la transformada de Fourier en particular. En este trabajo se tratan funciones muestreadas con soporte acotado, por lo que resulta necesario desarrollar una versión de este Teorema en forma discreta.

Como primera etapa de este desarrollo, aparecen de forma natural las series de Fourier, tanto para la función $f(x)$ como de la función $F(u)$, por lo que éstas serán expuestas en primer lugar.

2.1.2.1. Serie de Fourier de funciones en el dominio natural

En el caso en que la función f tiene soporte acotado, es posible rescribir (2.1.3) en la forma:

$$f(x) = \frac{1}{2p}\int_{-\infty}^{\infty} du\, e^{iux} \cdot \int_{VX} dx'\ f(x') \cdot e^{-iux'} \tag{2.1.6}$$

Donde VX representa el recinto que soporta a $f(x)$.

Es posible aproximar la integral en u de esta expresión por un sumatorio aplicando la fórmula del rectángulo (Harris y Stoker, 1998; Spiegel et al., 2000), lo que equivale a operar en forma inversa a como lo hace en su obra Debnath (1995) para pasar de sumatorios a integrales, rescribiéndose esta expresión en la forma:

$$f(x) = \frac{EU}{2p}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikEU \cdot x} \cdot \int_{VX} dx'\ f(x') \cdot e^{-iux'} \tag{2.1.7}$$

Donde EU representa el espaciado que caracteriza la discretización en el dominio frecuencial.

Esta última expresión permite definir la serie de Fourier de $f(x)$:

? **DEFINICIÓN (SERIE DE FOURIER DE LA FUNCIÓN $f(x)$).** Dada una función $f(x)$ con soporte acotado, se define su serie de Fourier mediante la suma:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k \cdot e^{ikEU \cdot x} \tag{2.1.8}$$

Donde los coeficientes f_k se determinan mediante la integral:

$$f_k \equiv \frac{EU}{2p}\int_{VX} dx \;\; f(x)\cdot e^{-ik\cdot EU\cdot x} \tag{2.1.9}$$

?

Aplicando un procedimiento análogo al empleado anteriormente, es posible aproximar la integral en x de (2.1.9) por un sumatorio, rescribiéndose esta expresión en la forma:

$$f_k = \frac{EU\cdot EX}{2p}\sum_{n=\underline{n}}^{\overline{n}} f\left(n\cdot EX\right)\cdot e^{-ik\cdot EU\, n\, EX} \tag{2.1.10}$$

Donde EX representa el espaciado que caracteriza la discretización en el dominio natural. El sumatorio se extiende entre los índices $\underline{n}$ y $\overline{n}$, que caracterizan los valores $x = n\cdot EX$ contenidos en el recinto VX.

2.1.2.2. Serie de Fourier de funciones en el dominio frecuencial

Es posible escribir una versión del Teorema Integral de Fourier para la transformada de Fourier $F(u)$, multiplicando (2.1.4) por la exponencial e^{-iux} e integrando respecto x, teniendo en cuenta la definición de Transformada de Fourier (2.1.1):

? **TEOREMA INTEGRAL DE FOURIER PARA EL DOMINIO FRECUENCIAL.** Dada una función $F(u)$ absolutamente integrable, tal que ella y su derivada son continuas a trozos, se cumple:

$$F(u) = \frac{1}{2p}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-iux}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} du'\; F(u')\cdot e^{iu'x} \tag{2.1.11}$$

?

En el caso en que la función F tiene soporte acotado, es posible rescribir (2.1.11) en la forma:

$$F(u) = \frac{1}{2p}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-iux}\cdot\int_{VU} du'\; F(u')\cdot e^{iu'x} \tag{2.1.12}$$

Donde VU representa el recinto que soporta a $F(u)$.

Aplicando un procedimiento análogo al empleado en el apartado anterior, es posible aproximar la integral en x de esta expresión por un sumatorio, rescribiéndose en la forma:

$$F(u) = \frac{EX}{2p} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-iun \cdot EX} \cdot \int_{VU} du' \, F(u') \cdot e^{iu'n \cdot EX} \tag{2.1.13}$$

Donde EX representa el espaciado que caracteriza la discretización en el dominio natural.

Esta última expresión permite definir la serie de Fourier de $F(u)$:

? **DEFINICIÓN (SERIE DE FOURIER DE LA FUNCIÓN $F(u)$).** Dada una función $F(u)$ con soporte acotado, se define su serie de Fourier mediante la suma:

$$F(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi_n \cdot e^{-iun \cdot EX} \tag{2.1.14}$$

Donde los coeficientes Φ_n se determinan mediante la integral:

$$\Phi_n \equiv \frac{EX}{2p} \int_{VU} du \, F(u) \cdot e^{iun \cdot EX} \tag{2.1.15}$$

?

Aplicando un procedimiento análogo al empleado anteriormente, es posible aproximar la integral en x de (2.1.15) por un sumatorio, rescribiéndose esta expresión en la forma:

$$\Phi_n \equiv \frac{EX \cdot EU}{2p} \sum_{k=\underline{k}}^{\overline{k}} F(k \cdot EU) \cdot e^{ik \cdot EU \, n \, EX} \tag{2.1.16}$$

Donde EU representa el espaciado que caracteriza la discretización en el dominio frecuencial. El sumatorio se extiende entre los índices $\underline{k}$ y $\overline{k}$, que caracterizan los valores $u = k \cdot EU$ contenidos en el recinto VU.

2.1.2.3. Discretizaciones del Teorema Integral de Fourier

Es posible rescribir el Teorema Integral de Fourier, enunciado para funciones definidas en el dominio natural, sustituyendo (2.1.10) en (2.1.8):

$$f(x) = \frac{EU \cdot EX}{2p} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=\underline{n}}^{\overline{n}} f(n \cdot EX) \cdot e^{-ik \cdot EU \, n \, EX} \cdot e^{ik \cdot EU \cdot x} \tag{2.1.17}$$

Si se evalúa la función $f(x)$ en valores de la forma $x = m \cdot EX'$, se obtiene la discretización del Teorema Integral de Fourier:

? **LEMA (DISCRETIZACIÓN DEL TEOREMA INTEGRAL DE FOURIER PARA FUNCIONES EN EL DOMINIO NATURAL).** Dada una función $f(x)$ con soporte acotado, que verifica las hipótesis del Teorema Integral de Fourier, se cumple:

$$f(m\cdot EX') = \frac{EU\cdot EX}{2p}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{n=\underline{n}}^{\bar{n}} f(n\cdot EX)\cdot e^{-ik\cdot EU\cdot n\cdot EX}\cdot e^{ik\cdot EU\cdot m\cdot EX'} \tag{2.1.18}$$

?

Así mis mo, es posible escribir una expresión análoga para funciones definidas en el dominio frecuencial, sustituyendo (2.1.16) en (2.1.14):

$$F(u) = \frac{EX\cdot EU}{2p}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=\underline{k}}^{\bar{k}} F(k\cdot EU)\cdot e^{ik\cdot EU\cdot n\cdot EX}\cdot e^{-iu\cdot n\cdot EX} \tag{2.1.19}$$

Si se evalúa la función $F(u)$ en valores de la forma $u = q\cdot EU'$, se obtiene la discretización del Teorema Integral de Fourier:

? **LEMA (DISCRETIZACIÓN DEL TEOREMA INTEGRAL DE FOURIER PARA FUNCIONES EN EL DOMINIO FRECUENCIAL).** Dada una función $F(u)$ con soporte acotado, que verifica las hipótesis del Teorema Integral de Fourier, se cumple:

$$F(q\cdot EU') = \frac{EX\cdot EU}{2p}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=\underline{k}}^{\bar{k}} F(k\cdot EU)\cdot e^{ik\cdot EU\cdot n\cdot EX}\cdot e^{-iq\cdot EU'\cdot n\cdot EX} \tag{2.1.20}$$

?

2.2. Muestreo de funciones y acotación del soporte

2.2.1. Muestreo de funciones

? **DEFINICIÓN (FUNCIÓN MUESTREADA).** Dada una función $f(x)$, se define la función muestreada con periodo o espaciado EX, y se denota por f^{EX}, mediante el producto de la función y la serie infinita de impulsos unitarios equiespaciados Δ^{EX}, definida mediante la expresión:

$$\Delta^{EX}(x) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} d(x - n \cdot EX) = \\ = \cdots + d(x + 2 \cdot EX) + d(x + EX) + d(x) + d(x - EX) + d(x - 2 \cdot EX) + \cdots \tag{2.2.1}$$

Donde se define el impulso unitario:

$$d(x - n \cdot EX) \equiv \begin{cases} 1 & x = n \cdot EX \\ 0 & x \neq n \cdot EX \end{cases}, \qquad \forall n \in \mathbb{Z} \tag{2.2.2}$$

De tal forma que (Brigham, 1974):

$$f^{EX}(x) \equiv f(x) \cdot \Delta^{EX}(x) = \\ = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n \cdot EX) \cdot d(x - n \cdot EX) \tag{2.2.3}$$

Esta función está representada por los valores:

$$f^{EX}(n \cdot EX) = f(n \cdot EX), \qquad \forall n \in \mathbb{Z} \tag{2.2.4}$$

?

Este resultado se ejemplifica en las figuras 2–2–1 y 2–2–2:

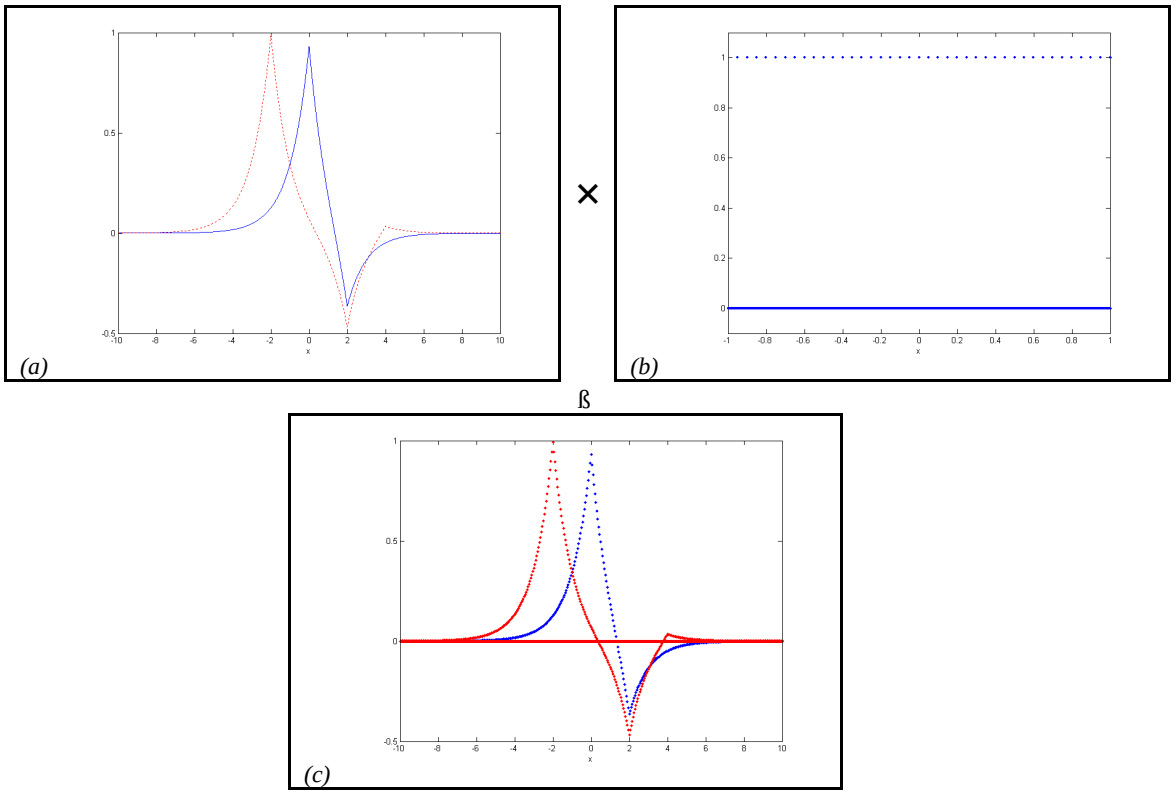


Figura 2–2-1: Muestreo de funciones, ejemplo I:

(a) Función $f(x) = \left(e^{-|x|} - \frac{1}{2} e^{-|x-2|} \right) + i \left(e^{-|x+2|} - \frac{1}{2} e^{-|x-2|} + \frac{1}{10} e^{-|x-4|} \right).$

(b) Serie de impulsos unitarios equiespaciados $\Delta^{0,05}(x)$.

(c) Función muestreada $f^{0,05}(x)$.

La relación entre figuras es (a) × (b) = (c).

En todos los casos se muestra en azul la parte real, en rojo la parte imaginaria.

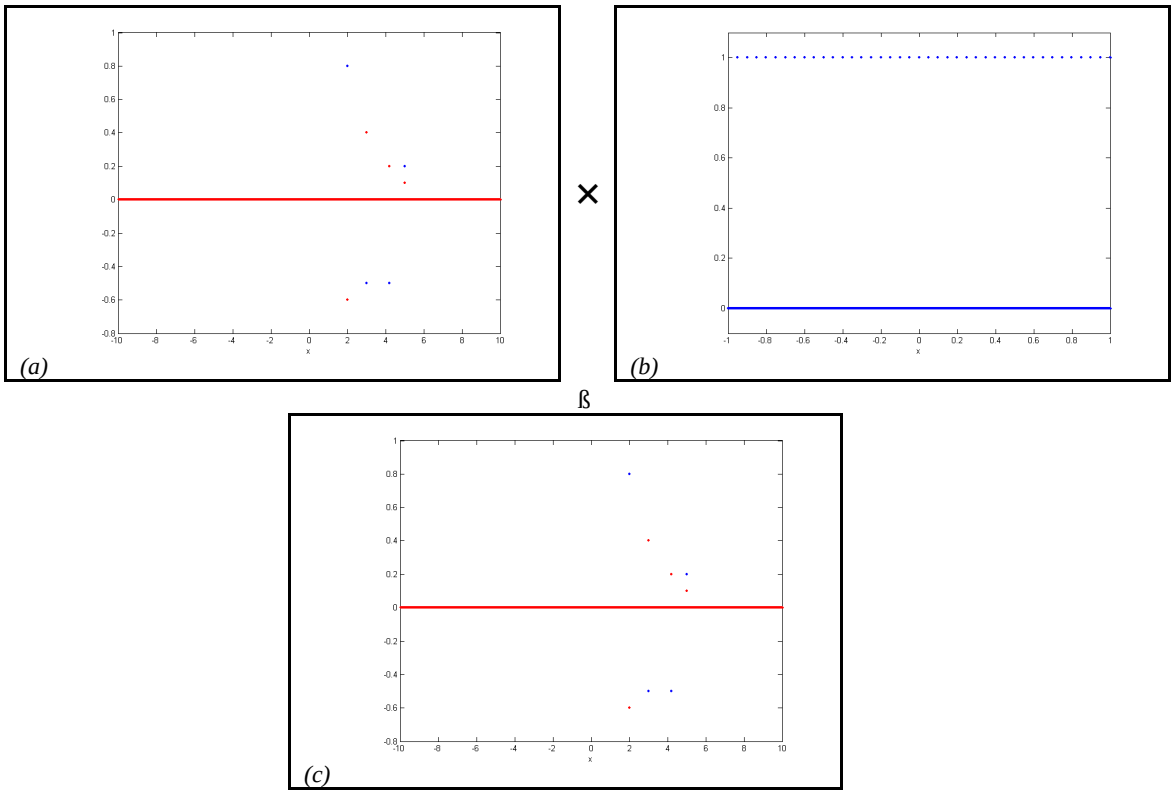


Figura 2–2-2: Muestreo de funciones, ejemplo II:

(a) Función $g(x) = (0{,}8 - 0{,}6 \cdot i) \cdot d(x-2) + (-0{,}5 + 0{,}4 \cdot i) \cdot d(x-3) +$
$+ (-0{,}5 + 0{,}2 \cdot i) \cdot d(x - 4{,}2) + (0{,}2 + 0{,}1 \cdot i) \cdot d(x-5)$.

(b) Serie de impulsos unitarios equiespaciados $\Delta^{0{,}05}(x)$.

(c) Función muestreada $g^{0{,}05}(x)$.

La relación entre figuras es (a) × (b) = (c).

En todos los casos se muestra en azul la parte real, en rojo la parte imaginaria.

2.2.2. Acotación del soporte de funciones. Ventanas

La acotación del soporte de una función $f(x)$ se consigue mediante la aplicación sobre la misma de una ventana:

? **DEFINICIÓN (VENTANA).** Se define la ventana con soporte en el intervalo $[0, VX]$ como una función $v_{VX}(x)$ de soporte en dicho intervalo, esto es (Daubechies, 1992; Kaiser, 1994):

$$v_{VX}(x) \equiv \begin{cases} v(x) & 0 < x < VX \\ 0 & x \le 0 \vee VX \le x \end{cases}, \qquad v(x) \neq 0 \tag{2.2.5}$$

?

Obsérvese que, dada la acotación del soporte de la ventana, la aplicación de la misma sobre una función $f(x)$ tiene por resultado una función con soporte acotado:

? **DEFINICIÓN (FUNCIÓN CON SOPORTE ACOTADO POR APLICACIÓN DE UNA VENTANA).** Dadas una función $f(x)$ y una ventana $v_{VX}(x)$, se define la función con soporte acotado por aplicación de la ventana, y se denota por $f_{c,v_{VX}}$, al producto (Daubechies, 1992; Kaiser, 1994):

$$f_{c,v_{VX}} \equiv v_{VX}(x-c) \cdot f(x) \tag{2.2.6}$$

El valor de c y la longitud de la ventana VX determinan el soporte de la función $f_{c,v_{VX}}$, dado por intervalo $[c, VX + c]$.

?

Este resultado se ejemplifica en las figuras 2–2–3 y 2–2–4, empleándose la ventana de Hanning (Press et al., 1992, 1996). Esta ventana, con soporte en el intervalo $[0, VX]$, viene dada por la expresión:

$$h_{VX}(x) \equiv \begin{cases} \frac{1}{2}\left[1 + \cos\left(\frac{2p}{VX}x - p\right)\right] & 0 < x < VX \\ 0 & x \le 0 \vee VX \le x \end{cases} \tag{2.2.7}$$

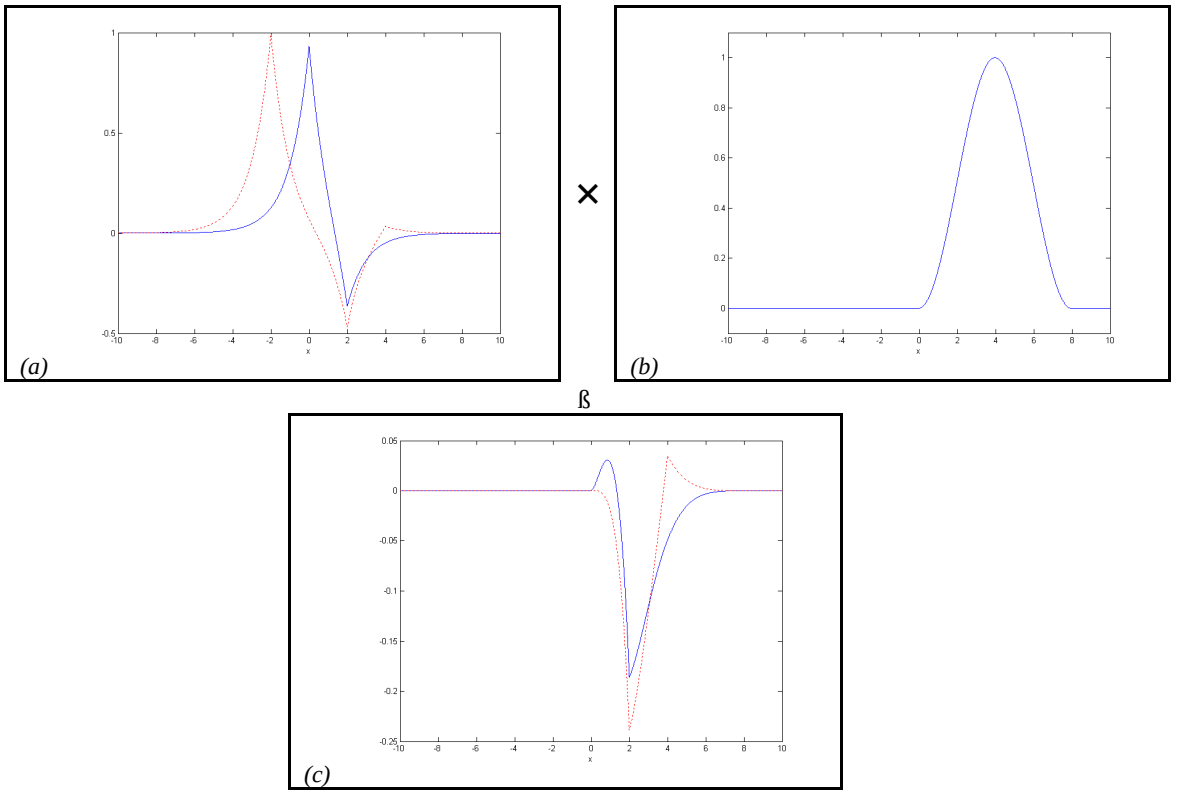


Figura 2–2-3: Acotación del soporte de funciones mediante la aplicación de ventanas, ejemplo I:

(a) Función $f(x) = \left(e^{-|x|} - \frac{1}{2} e^{-|x-2|} \right) + i \left(e^{-|x+2|} - \frac{1}{2} e^{-|x-2|} + \frac{1}{10} e^{-|x-4|} \right)$.

(b) Ventana $h_8(x + 0{,}025)$.

(c) Función con soporte acotado $f_{0{,}025;\, h_8}(x)$.

La relación entre figuras es (a) × (b) = (c).

En todos los casos se muestra en azul la parte real, en rojo la parte imaginaria.

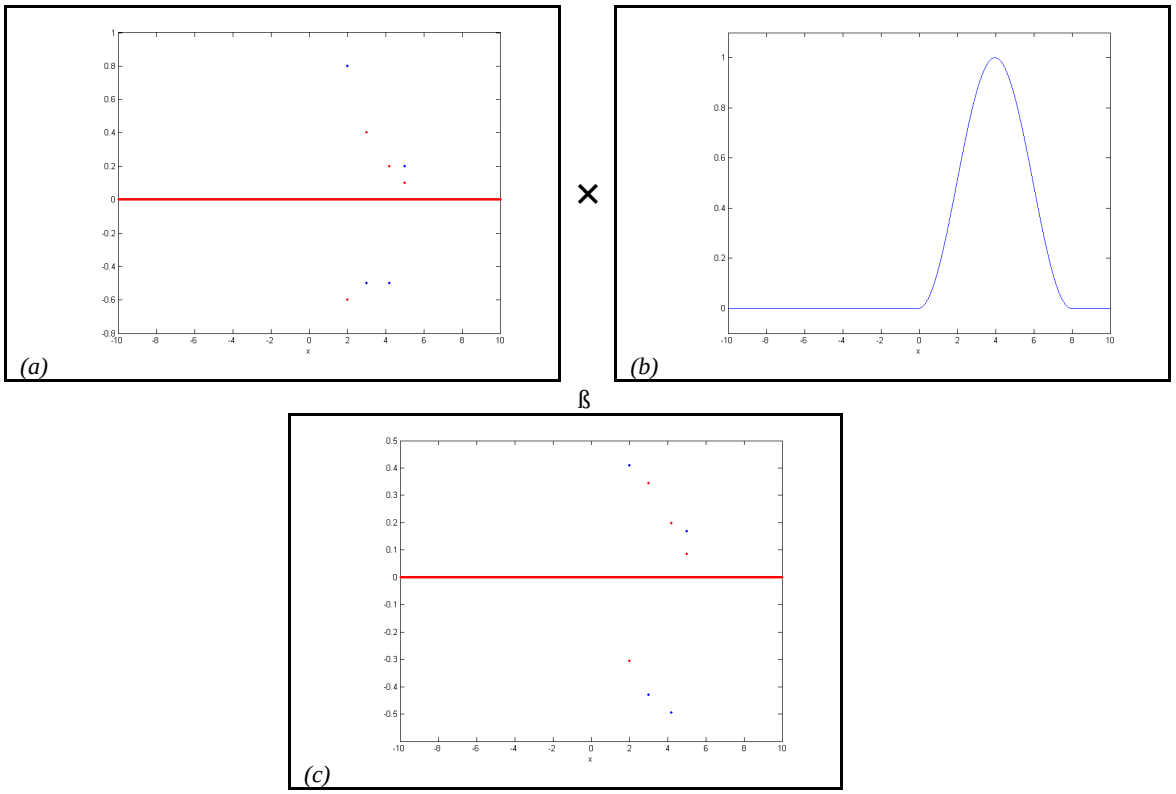


Figura 2–2-4: Acotación del soporte de funciones mediante la aplicación de ventanas, ejemploII:

(a) Función $g(x) = (0{,}8 - 0{,}6 \cdot i) \cdot d(x-2) + (-0{,}5 + 0{,}4 \cdot i) \cdot d(x-3) +$
$+ (-0{,}5 + 0{,}2 \cdot i) \cdot d(x-4{,}2) + (0{,}2 + 0{,}1 \cdot i) \cdot d(x-5)$.

(b) Ventana $h_8(x + 0{,}025)$.

(c) Función con soporte acotado $g_{0{,}025;h_8}(x)$.

La relación entre figuras es (a) × (b) = (c).

En todos los casos se muestra en azul la parte real, en rojo la parte imaginaria.

2.2.3. Funciones muestreadas con soporte acotado

El muestreo y la acotación del soporte de una función $f(x)$ se consigue mediante la aplicación simultánea sobre la misma de la serie infinita de impulsos unitarios equiespaciados y una ventana:

? **DEFINICIÓN (FUNCIÓN MUESTREADA CON SOPORTE ACOTADO).** Dadas una función $f(x)$ y una ventana $v_{VX}(x)$, se define la función muestreada con periodo o espaciado EX y soporte acotado por aplicación de la ventana, y se denota por $f_{c,v_{VX}}^{EX}$, al producto:

$$\begin{aligned} f_{c,v_{VX}}^{EX}(x) &\equiv v_{VX}(x-c)\cdot f(x)\cdot\Delta^{EX}(x) = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_{VX}(n\cdot EX - c)\cdot f(n\cdot EX)\cdot d(x - n\cdot EX) \end{aligned} \tag{2.2.8}$$

El valor de c y la longitud de la ventana VX determinan el soporte de la función $f_{c,v_{VX}}^{EX}$, dado por intervalo $[c, VX + c]$.

Dada la acotación del soporte de la ventana, es posible rescribir (2.2.8) en la forma:

$$f_{c,v_{VX}}^{EX}(x) = \sum_{n=\underline{n}}^{\overline{n}} v_{VX}(n\cdot EX - c)\cdot f(n\cdot EX)\cdot d(x - n\cdot EX) \tag{2.2.9}$$

De tal forma que esta función está representada por los valores:

$$\begin{aligned} & f_{c,v_{VX}}^{EX}(n\cdot EX) = v_{VX}(n\cdot EX - c)\cdot f(n\cdot EX) \\ & \forall n \in \{\underline{n} \quad \underline{n}+1 \quad \cdots \quad \overline{n}-1 \quad \overline{n}\} \end{aligned} \tag{2.2.10}$$

Donde se ha definido:[3]

$$\underline{n} \equiv \left\lceil \frac{c}{EX} \right\rceil, \qquad \overline{n} \equiv \left\lfloor \frac{VX + c}{EX} \right\rfloor \tag{2.2.11}$$

Y se define el número de puntos en el eje:

$$PE \equiv \mathrm{card}\{\underline{n} \quad \underline{n}+1 \quad \cdots \quad \overline{n}-1 \quad \overline{n}\} \tag{2.2.12}$$

?

Este resultado se ejemplifica en las figuras 2–2–5 y 2–2–6:

[3] Se denota $\lceil x \rceil$ el menor entero mayor o igual que x, y $\lfloor x \rfloor$ el mayor entero menor o igual que x.

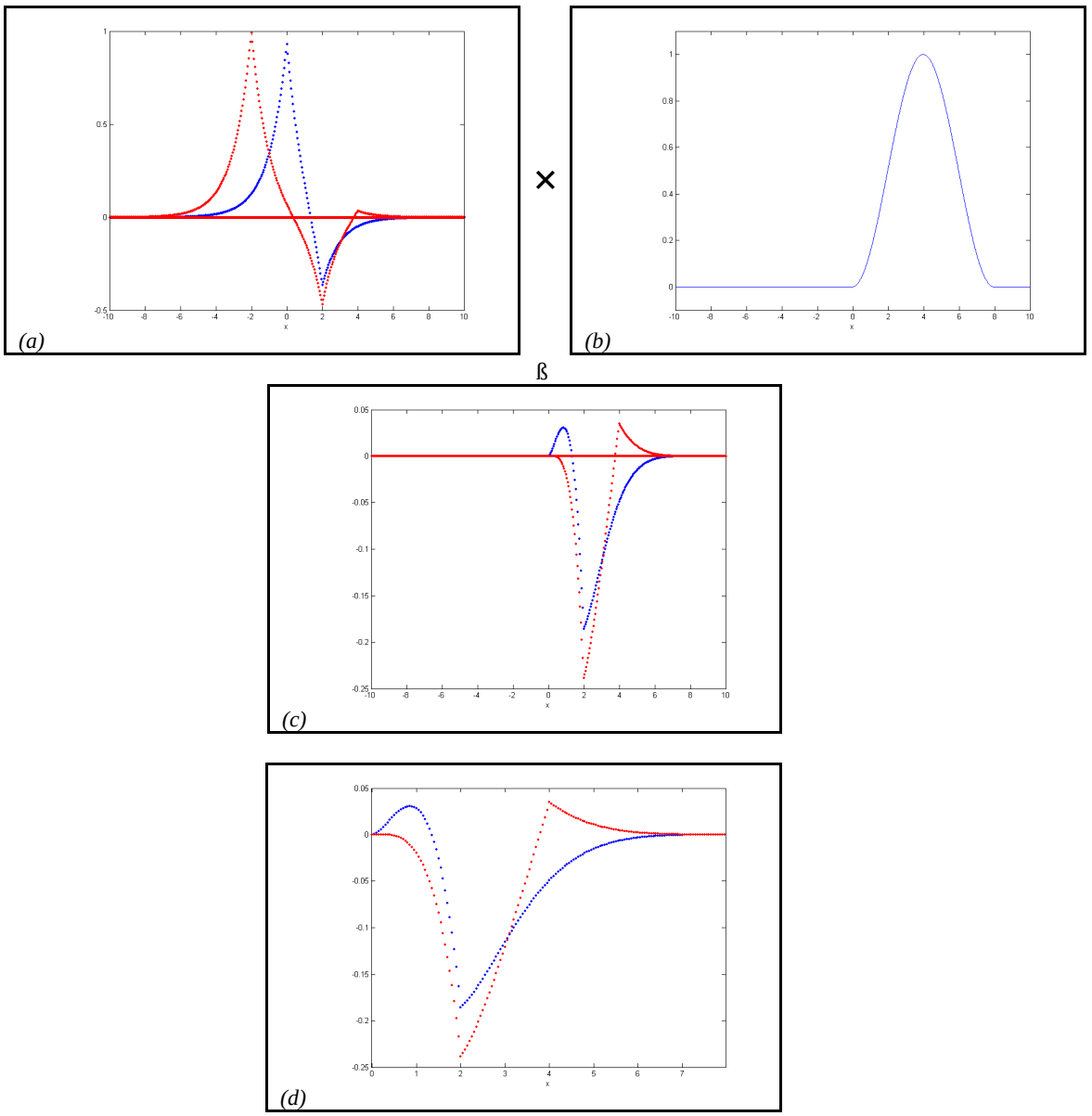


Figura 2–2-5: Funciones muestreadas con soporte acotado, ejemplo I:

(a) Función muestreada $f^{0,05}(x)$.

(b) Ventana $h_8(x+0,025)$.

(c) Función muestreada con soporte acotado $f^{0,05}_{0,025;\,h_8}(x)$.

La relación entre figuras es (a) × (b) = (c).

(d) Valores representativos de $f^{0,05}_{0,025;\,h_8}$ *en el intervalo* $(0,8)$. *En este ejemplo* $PE=160$.

En todos los casos se representa en azul la parte real, en rojo la parte imaginaria.

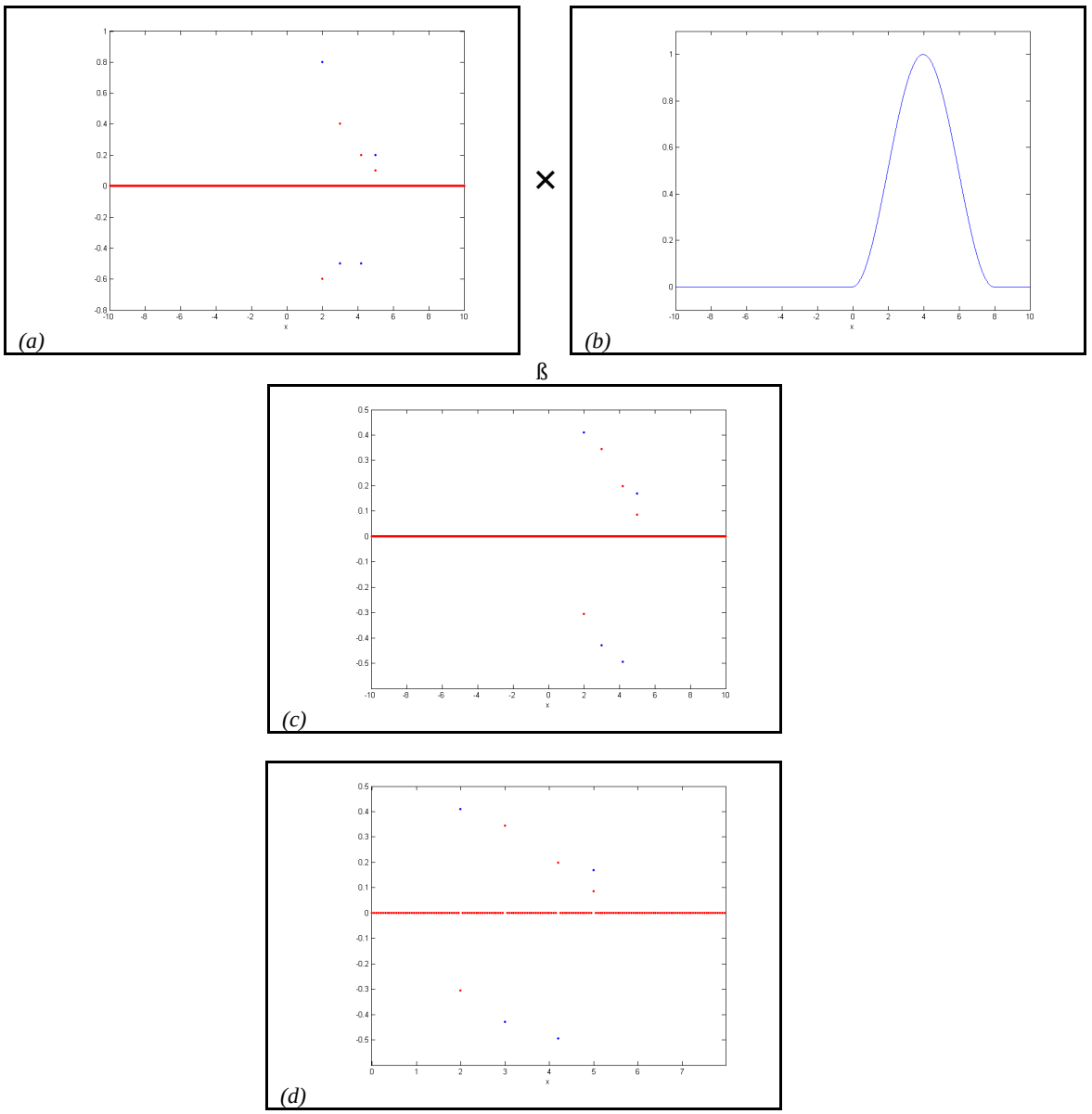


Figura 2–2-6: Funciones muestreadas con soporte acotado, ejemplo II:

(a) Función muestreada $f^{0,05}(x)$.

(b) Ventana $h_8(x+0,025)$.

(c) Función muestreada con soporte acotado $f^{0,05}_{0,025;\,h_8}(x)$.

La relación entre figuras es (a) × (b) = (c).

(d) Valores representativos de $f^{0,05}_{0,025;\,h_8}$ *en el intervalo* $(0,8)$. *En este ejemplo* $PE=160$.

En todos los casos se representa en azul la parte real, en rojo la parte imaginaria.

En los casos que se tratan en este trabajo, siempre será $c = -\frac{EX}{2}$ y VX un múltiplo entero de EX de tal forma que $\underline{n} = 0$, $\overline{n} = PE - 1$. Nótese que los PE valores donde se calcula la transformada se extienden desde $x = 0$ hasta $x = (PE - 1) \cdot EX$, siendo la longitud del eje muestreado:

$$LX \equiv (PE - 1) \cdot EX \tag{2.2.13}$$

Y la longitud de la ventana:

$$VX \equiv LX + EX = PE \cdot EX \tag{2.2.14}$$

Este resultado se ejemplifica en la Figura 2–2–7:

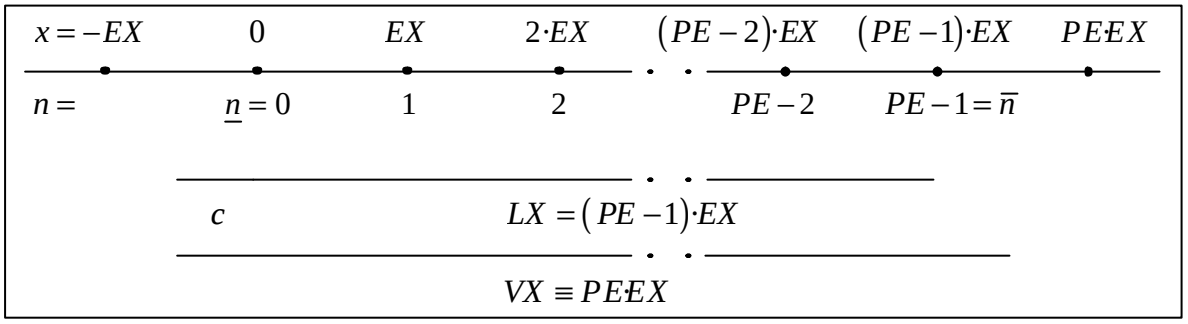


Figura 2–2-7: Elección de c y determinación de LX, VX y los índices n.

2.3. Transformadas de Fourier de funciones muestreadas con soporte acotado

En esta Sección se exponen las expresiones pertinentes para la determinación de las transformadas de Fourier directa e inversa de funciones muestreadas de soporte acotado, y se expresa la relación entre estas transformadas de Fourier y las transformadas de Fourier discretas que se determinan computacionalmente.

El desarrollo de las demostraciones es, en ambos casos, paralela al desarrollo que realiza Papoulis (1962) en la §3–2 de su obra.

En la última Subsección se exponen, a modo de compendio, las relaciones entre las magnitudes que describen las funciones en los dominios natural y frecuencial, como referencia para las Secciones subsiguientes.

2.3.1. Transformada de Fourier directa

? **PROPOSICIÓN (TRANSFORMADA DE FOURIER DE UNA FUNCIÓN MUESTREADA CON SOPORTE ACOTADO).** Dada una función muestreada con soporte acotado $f_{c,v_{VX}}^{EX}$ definida en el dominio natural, dada por (2.2.9), se determina su transformada de Fourier, y se representa por $\left(F_{c,v_{VX}}^{EX}\right)^{\frac{2p}{VX}}$, mediante la expresión:

$$\left(F_{c,v_{VX}}^{EX}\right)^{\frac{2p}{VX}}(u)=\frac{2p}{VX}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{n=\underline{n}}^{\overline{n}}v_{VX}\left(n\cdot EX-c\right)\cdot f\left(n\cdot EX\right)\cdot e^{-ik\frac{2p}{VX}n\cdot EX}\right)d\left(u-k\frac{2p}{VX}\right) \tag{2.3.1}$$

Representada por repeticiones cíclicas de los valores:

$$\left(F_{c,v_{VX}}^{EX}\right)_{u,\mathrm{I}_{VU}}^{\frac{2p}{VX}}\left(k\frac{2p}{VX}\right)=\frac{2p}{VX}\sum_{n=\underline{n}}^{\overline{n}}v_{VX}\left(n\cdot EX-c\right)\cdot f\left(n\cdot EX\right)\cdot e^{-ik\frac{2p}{VX}n\cdot EX} \tag{2.3.2}$$

$$\forall k\in\left\{\underline{k}\quad \underline{k}+1\quad \cdots\quad \overline{k}-1\quad \overline{k}\right\}$$

Donde el conjunto de índices $\left\{\underline{k}\quad \underline{k}+1\quad \cdots\quad \overline{k}-1\quad \overline{k}\right\}$ cumple la condición:

$$\mathrm{card}\left\{\underline{k}\quad \underline{k}+1\quad \cdots\quad \overline{k}-1\quad \overline{k}\right\}=PE \tag{2.3.3}$$

?

DEMOSTRACIÓN. Para determinar la transformada de Fourier de la función $f_{c,v_{VX}}^{EX}$ dada en (2.2.9), se considera su extensión periódica:

$$\begin{aligned} f_p^{EX}(x) &\equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_{c,v_{VX}}^{EX}(x - n\cdot VX) = \\ &= \left(f_{c,v_{VX}}^{EX} * \Delta^{VX} \right)(x) \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

Donde el símbolo $*$ representa la convolución de funciones, definida mediante la integral (Spiegel et al., 2000):

$$(h_1 * h_2)(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dy\, h_1(t-y)\cdot h_2(y) \tag{2.3.5}$$

Dada la expresión (2.3.4), se cumple:

$$f_p^{EX}(x) = f_{c,v_{VX}}^{EX}(x), \qquad \forall x \in (c \quad VX + c) \tag{2.3.6}$$

Obsérvese que, puesto que la función $f_{c,v_{VX}}^{EX}$ dada por (2.2.9) viene representada por los PE valores dados por (2.2.10), la función f_p^{EX} contendrá únicamente PE valores independientes, siendo el resto repeticiones cíclicas de éstos.

La transformada de Fourier directa de una función periódica es otra función periódica, que viene dada por la expresión:

$$F_p^{EU}(u) \equiv 2p \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Phi_k \cdot d(u - k\cdot EU) \tag{2.3.7}$$

Donde se define el espaciado en el dominio frecuencial:

$$EU \equiv \frac{2p}{VX} \tag{2.3.8}$$

Y los coeficientes Φ_k vienen dados por la expresión:

$$\begin{aligned} \Phi_k &\equiv \frac{1}{VX} \int_c^{VX+c} dx\; f_p^{EX}(x)\cdot e^{-ik\cdot EU\cdot x} = \\ &= \frac{1}{VX} \int_c^{VX+c} dx\; f_{c,v_{VX}}^{EX}(x)\cdot e^{-ik\cdot EU\cdot x} \end{aligned} \tag{2.3.9}$$

Donde se ha tenido en cuenta (2.3.6) para escribir la última igualdad.

Estos coeficientes pueden ser determinados explícitamente, sustituyendo el valor de $f_{c,v_{VX}}^{EX}$ dado por (2.2.9) en la expresión anterior:

$$\Phi_k = \frac{1}{VX}\int_c^{VX+c} dx\left(\sum_{n=\underline{n}}^{\overline{n}} v_{VX}\left(n\cdot EX - c\right)\cdot f\left(n\cdot EX\right) d\left(x - n\cdot EX\right)\right) e^{-ik\cdot E\,U\cdot x} =$$
$$= \frac{1}{VX}\sum_{n=\underline{n}}^{\overline{n}} v_{VX}\left(n\cdot EX - c\right)\cdot f\left(n\cdot EX\right)\cdot\int_c^{VX+c} dx\, d\left(x - n\cdot EX\right) e^{-ik\cdot E\,U\cdot x} =$$
$$= \frac{1}{VX}\sum_{n=\underline{n}}^{\overline{n}} v_{VX}\left(n\cdot EX - c\right)\cdot f\left(n\cdot EX\right) e^{-i\,k\cdot E\,U\,n\,E\,X} \tag{2.3.10}$$

Sustituyendo esta última expresión en (2.3.7), teniendo en cuenta la definición del espaciado en el dominio frecuencial (2.3.8), se obtiene la transformada de Fourier:

$$F_p^{\frac{2p}{VX}}\left(u\right) = \frac{2p}{VX}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{n=\underline{n}}^{\overline{n}} v_{VX}\left(n\cdot EX - c\right)\cdot f\left(n\cdot EX\right) e^{-ik\frac{2p}{VX}n\cdot EX}\right) d\left(u - k\frac{2p}{VX}\right) \tag{2.3.11}$$

Esta última expresión permite determinar la transformada de Fourier de $f_{c,v_{VX}}^{EX}$, teniendo en cuenta (2.3.6), obteniéndose la transformada (2.3.1).

Puesto que la función f_p^{EX} tiene únicamente PE valores independientes, su transformada de Fourier $F_p^{\frac{2p}{VX}}$ también tendrá PE valores independientes, siendo el resto repeticiones cíclicas de éstos.

Así pues, la transformada de Fourier de $f_{c,v_{VX}}^{EX}$ vendrá determinada por repeticiones cíclicas dichos PE valores independientes de $F_p^{\frac{2p}{VX}}$. Esto equivale, formalmente, a la aplicación sobre ésta de una ventana cuadrada, dada por la expresión:

$$\mathbb{I}_{VU}\left(u\right) \equiv \begin{cases} 1 & 0 < u < VU \\ 0 & u \le 0 \vee VU \le u \end{cases} \tag{2.3.12}$$

De tal forma que los valores de la transformada $\left(F_{c,v_{VX}}^{EX}\right)_{u,\mathbb{I}_{VU}}^{\frac{2p}{VX}}$ se determinan multiplicando (2.3.11) por $\mathbb{I}_{VU}\left(u - u\right)$ obteniéndose, dada la acotación del soporte de la ventana:[4]

$$\left(F_{c,v_{VX}}^{EX}\right)_{u,\mathbb{I}_{VU}}^{\frac{2p}{VX}}\left(u\right) =$$
$$= \frac{2p}{VX}\sum_{k=\underline{k}}^{\overline{k}} \mathbb{I}_{VU}\left(k\frac{2p}{VX} - u\right)\left(\sum_{n=\underline{n}}^{\overline{n}} v_{VX}\left(n\cdot EX - c\right)\cdot f\left(n\cdot EX\right) e^{-ik\frac{2p}{VX}n\cdot EX}\right) d\left(u - k\frac{2p}{VX}\right) \tag{2.3.13}$$

[4] El subíndice $u, \mathbb{I}_{VU}$ en la transformada mantiene la consistencia de la notación, y permite observar que la limitación en los índices k es equivalente a acotar en el dominio frecuencial la transformada de Fourier de $f_{c,v_{VX}}^{EX}$, que ya es una función muestreada.

Obsérvese que la longitud de la ventana VU, con el objeto de garantizar que el sumatorio en k de (2.3.13) contenga PE términos, debe cumplir la condición:

$$(PE-1)\cdot EU < VU < (PE+1)\cdot EU \tag{2.3.14}$$

Sustituyendo en (2.3.13) el valor de la ventana $\mathbb{I}_{VU}$ dado por (2.3.12), se obtiene:

$$\begin{aligned}&\left(F^{EX}_{c,v_{VX}}\right)^{\frac{2p}{VX}}_{u,\mathbb{I}_{VU}}(u)=\\&=\frac{2p}{VX}\sum_{k=\underline{k}}^{\overline{k}}\left(\sum_{n=\underline{n}}^{\overline{n}}v_{VX}(n\cdot EX-c)\cdot f(n\cdot EX)\cdot e^{-ik\frac{2p}{VX}n\cdot EX}\right)\cdot d\left(u-k\frac{2p}{VX}\right)\end{aligned} \tag{2.3.15}$$

Representada por los valores (2.3.2).

En los casos que se tratan en este trabajo, siempre se elegirá $u=-\frac{EU}{2}$ y $VU=PE\cdot EU$, de tal forma que $\underline{k}=0$ y $\overline{k}=PE-1$.

Obsérvese que los valores de la transformada dados por (2.3.2) son $2p/VX$ veces los valores de la transformada de Fourier discreta que se determina computacionalmente, dada por (Brigham, 1974):

$$\begin{aligned}&\widetilde{F}^{\frac{2p}{VX}}_{u,\mathbb{I}_{VU}}\left(k\frac{2p}{VX}\right)\equiv\sum_{n=\underline{n}}^{\overline{n}}v_{VX}(n\cdot EX-c)\cdot f(n\cdot EX)\cdot e^{-ik\frac{2p}{VX}n\cdot EX}\\&\forall k\in\left\{\underline{k}\quad \underline{k}+1\quad\cdots\quad\overline{k}-1\quad\overline{k}\right\}\end{aligned} \tag{2.3.16}$$

Estos resultados se ejemplifican en las figuras 2–3–1 y 2–3–2:

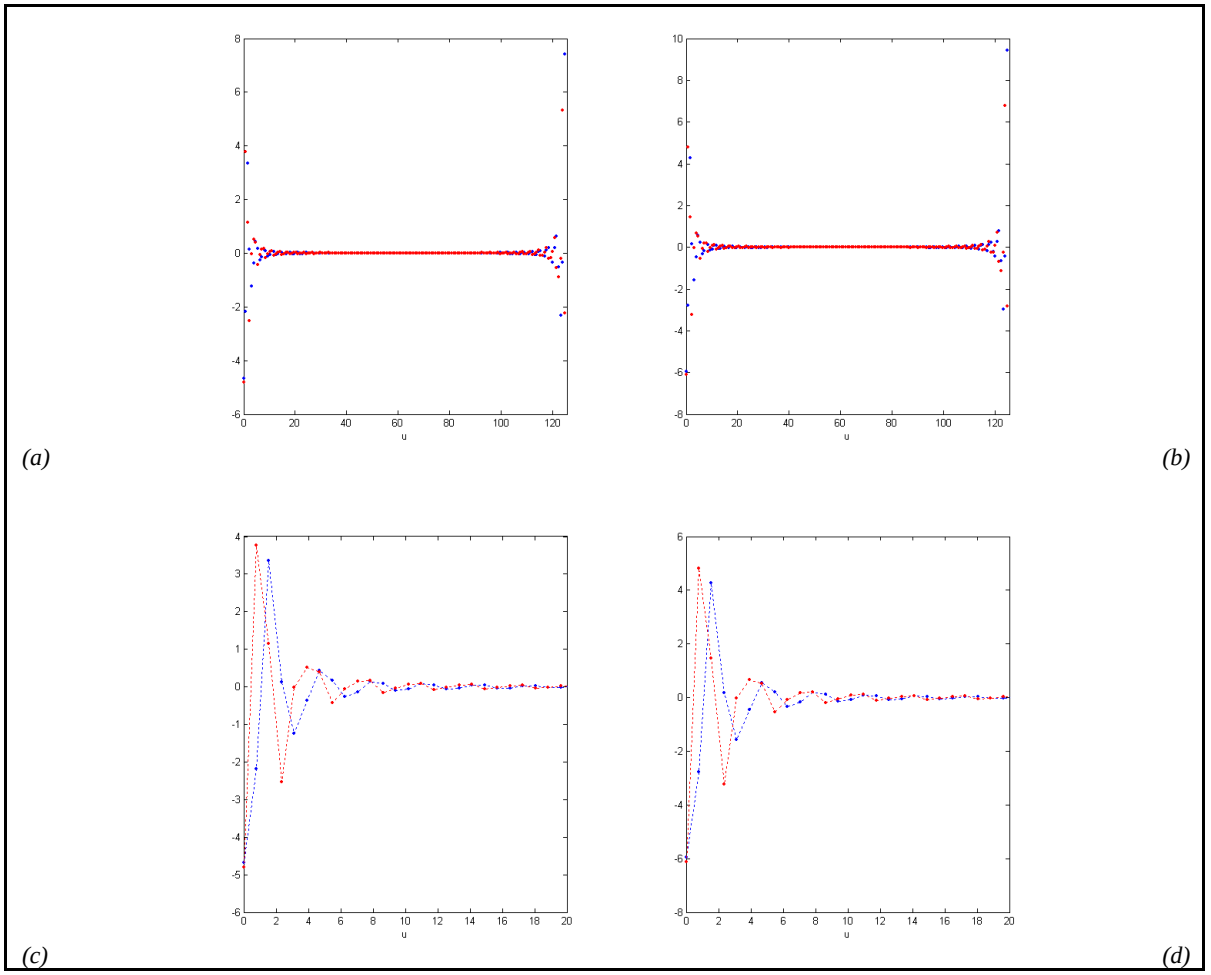


Figura 2–3-1: Transformada de Fourier directa de funciones muestreadas con soporte acotado, correspondiente al ejemplo I mostrado en §2.2:

(a) Transformada de Fourier $\left(F^{0,05}_{0,025;\,h_8}\right)^{p/4}_{p/8;\,\mathrm{I}_{40p}}$.

(b) Transformada de Fourier discreta $\widetilde{F}^{p/4}_{p/8;\,\mathrm{I}_{40p}}$.

(c), (d) Detalle de (a), (b) respectivamente. Las líneas punteadas se incluyen para facilitar la observación de las tendencias.

En todos los casos se representa en azul la parte real, en rojo la parte imaginaria.

Obsérvese que los valores en (a), (c) son $p/4$ *veces los valores en (b), (d) respectivamente.*

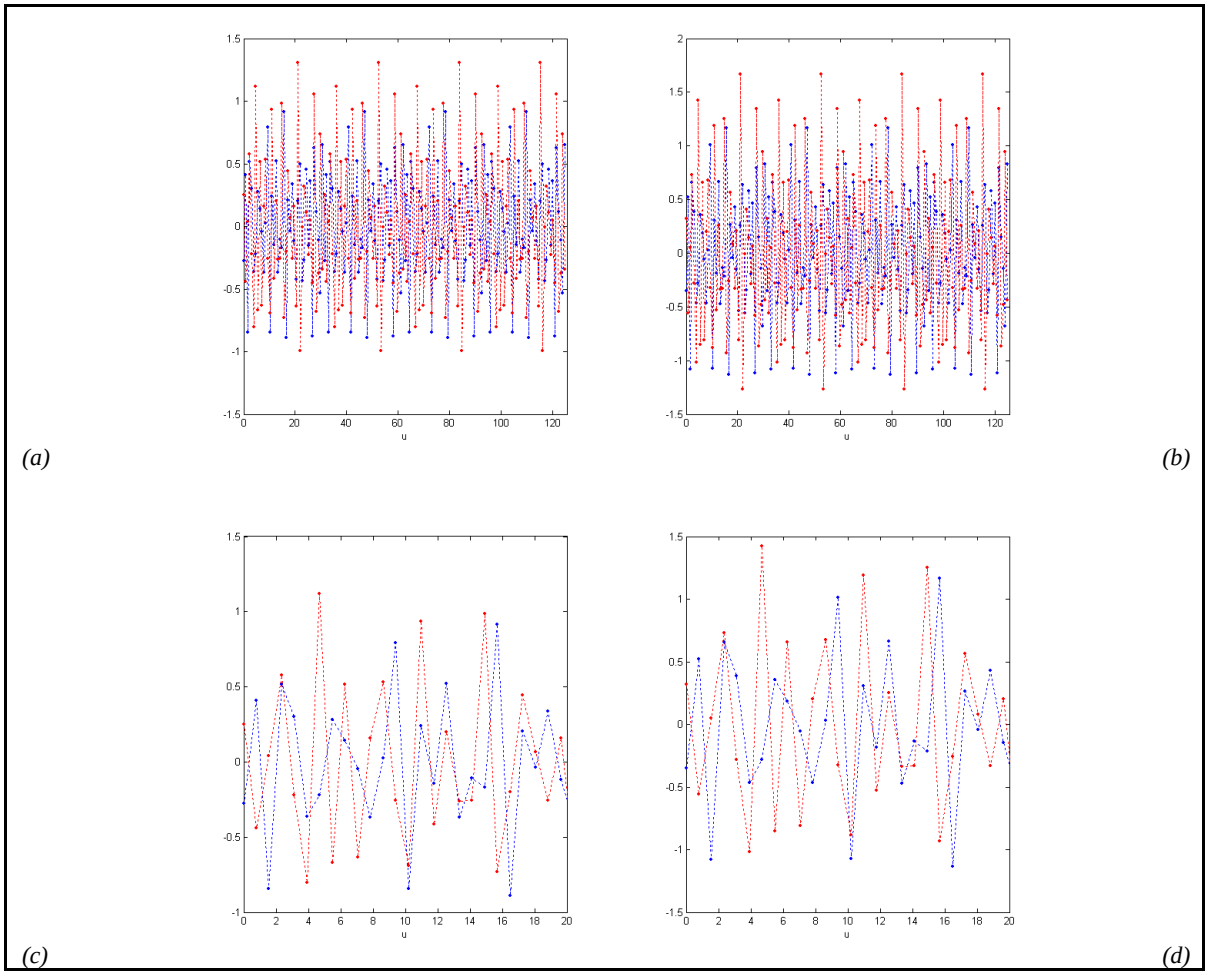


Figura 2–3-2: Transformada de Fourier directa de funciones muestreadas con soporte acotado, correspondiente al ejemplo II mostrado en §2.2:

(a) Transformada de Fourier $\left(G^{0,05}_{0,025;\,h_8}\right)^{p/4}_{p/8;\,\mathrm{I}_{40p}}$.

(b) Transformada de Fourier discreta $\widetilde{G}^{p/4}_{p/8;\,\mathrm{I}_{40p}}$.

(c), (d) Detalle de (a), (b) respectivamente.

En todos los casos se representa en azul la parte real, en rojo la parte imaginaria. Las líneas punteadas se incluyen para facilitar la observación de las tendencias.

Obsérvese que los valores en (a), (c) son $p/4$ *veces los valores en (b), (d) respectivamente.*

2.3.2. Transformada de Fourier inversa

? **PROPOSICIÓN (TRANSFORMADA DE FOURIER INVERSA DE UNA FUNCIÓN MUESTREADA CON SOPORTE ACOTADO).** Dada una función muestreada con soporte acotado $F_{u,V_{VU}}^{EU}$ definida en el dominio frecuencial, dada por una (2.3.20), se determina su transformada de Fourier inversa, y se representa por $\left(f_{u,V_{VU}}^{EU}\right)_{c,1_{VX}}^{EX}$, mediante la expresión:

$$\left(f_{u,V_{VU}}^{EU}\right)^{\frac{2p}{VU}}(x)=\frac{1}{VU}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=\underline{k}}^{\bar{k}}V_{VU}\left(k\cdot EU-u\right)\cdot F\left(k\cdot EU\right)\cdot e^{i\,k\cdot EU\cdot n\frac{2p}{VU}}\right)\cdot d\left(x-n\frac{2p}{VU}\right) \tag{2.3.17}$$

Representada por repeticiones cíclicas de los valores los valores:

$$\left(f_{u,V_{VU}}^{EU}\right)_{c,1_{VX}}^{\frac{2p}{VU}}\left(n\frac{2p}{VU}\right)=\frac{1}{VU}\sum_{k=\underline{k}}^{\bar{k}}V_{VU}\left(k\cdot EU-u\right)\cdot F\left(k\cdot EU\right)\cdot e^{i\,k\cdot EU\cdot n\frac{2p}{VU}}$$

$$\forall n\in\left\{\underline{n}\quad \underline{n}+1\quad\cdots\quad\bar{n}-1\quad\bar{n}\right\} \tag{2.3.18}$$

Donde el conjunto de índices $\left\{\underline{n}\quad \underline{n}+1\quad\cdots\quad\bar{n}-1\quad\bar{n}\right\}$ cumple la condición:

$$\mathrm{card}\left\{\underline{n}\quad \underline{n}+1\quad\cdots\quad\bar{n}-1\quad\bar{n}\right\}=PE \tag{2.3.19}$$

?

¦ **DEMOSTRACIÓN.** En este caso se considera una función muestreada con soporte acotado $F_{u,V_{VU}}^{EU}$, resultado de muestrear con periodo o espaciado EU, y aplicar una ventana V_{VU} sobre una función $F\left(u\right)$ definida en el dominio frecuencial, dada por una exp resión análoga a(2.2.9):

$$F_{u,V_{VU}}^{EU}\left(u\right)=\sum_{k=\underline{k}}^{\bar{k}}V_{VU}\left(k\cdot EU-u\right)\cdot F\left(k\cdot EU\right)\cdot d\left(u-k\cdot EU\right) \tag{2.3.20}$$

Representada por los valores:

$$F_{u,V_{VU}}^{EU}\left(k\cdot EU\right)=V_{VU}\left(k\cdot EU-u\right)\cdot F\left(k\cdot EU\right)$$

$$\forall k\in\left\{\underline{k}\quad \underline{k}+1\quad\cdots\quad\bar{k}-1\quad\bar{k}\right\} \tag{2.3.21}$$

Donde $\underline{k}=\left\lceil\frac{u}{EU}\right\rceil$ y $\bar{k}=\left\lfloor\frac{VU+u}{EU}\right\rfloor$. En este desarrollo se considera $u=-\frac{EU}{2}$ y VU múltiplo entero de EU de tal forma que $\underline{k}=0$, $\bar{k}=PE-1$. Nótese que los PE

valores se extienden desde $u=0$ hasta $u=(PE-1)\cdot EU$, siendo la longitud del eje muestreado:

$$LU \equiv (PE-1)\cdot EU \tag{2.3.22}$$

Y la longitud de la ventana:

$$VU \equiv LU + EU = PE\cdot EU \tag{2.3.23}$$

Para determinar la transformada de Fourier de la función $F_{u,V_{VU}}^{EU}$ dada en (2.3.20), se considera su extensión periódica:

$$\begin{aligned} F_p^{EU}(u) &\equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_{u,V_{VU}}^{EU}(u-k\cdot VU) = \\ &= \left(F_{u,V_{VU}}^{EU} * \Delta^{VU}\right)(u) \end{aligned} \tag{2.3.24}$$

Donde el símbolo $*$ representa la convolución de funciones definida en (2.3.5).

Dada esta expresión se cumple:

$$F_p^{EU}(u) = F_{u,V_{VU}}^{EU}(u), \qquad \forall u \in (u \quad VU+u) \tag{2.3.25}$$

Obsérvese que, puesto que la función $F_{u,V_{VU}}^{EU}$ dada por (2.3.20) viene representada por los PE valores dados por (2.3.21), la función F_p^{EU} contendrá únicamente PE valores independientes, siendo el resto repeticiones cíclicas de éstos.

La transformada de Fourier inversa de una función periódica es otra función periódica, que viene dada por la expresión:

$$f_p^{EX}(x) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \cdot d(x-n\cdot EX) \tag{2.3.26}$$

Donde se define el espaciado en el dominio natural:

$$EX \equiv \frac{2p}{VU} \tag{2.3.27}$$

Y los coeficientes f_n vienen dados por la expresión:

$$\begin{aligned} f_n &\equiv \frac{1}{VU}\int_u^{VU+u} du\, F_p^{EU}(u)\cdot e^{iunEX} = \\ &= \frac{1}{VU}\int_u^{VU+u} du\, F_{u,V_{VU}}^{EU}(u)\cdot e^{iun\cdot EX} \end{aligned} \tag{2.3.28}$$

Donde se ha tenido en cuenta (2.3.25) para escribir la última igualdad.

Estos coeficientes pueden ser determinados explícitamente, sustituyendo el valor de $F_{u,V_{VU}}^{EU}$ dado por (2.3.20) en la expresión anterior:

$$f_n = \frac{1}{VU}\int_u^{VU+u} du \left(\sum_{k=\underline{k}}^{\hat{k}} V_{VU}\left(k\cdot EU - u\right)\cdot F\left(k\cdot EU\right)\cdot d\left(u - k\cdot EU\right) \right)\cdot e^{iun\cdot EX} =$$

$$= \frac{1}{VU}\sum_{k=\underline{k}}^{\hat{k}} V_{VU}\left(k\cdot EU - u\right)\cdot F\left(k\cdot EU\right)\cdot \int_u^{VU+u} du\, d\left(u - k\cdot EU\right)\cdot e^{iun\cdot EX} = \qquad (2.3.29)$$

$$= \frac{1}{VU}\sum_{k=\underline{k}}^{\hat{k}} V_{VU}\left(k\cdot EU - u\right)\cdot F\left(k\cdot EU\right)\cdot e^{ik\cdot EUn\cdot EX}$$

Sustituyendo esta última expresión en (2.3.26), teniendo en cuenta la definición del espaciado en el dominio natural (2.3.27), se obtiene la transformada de Fourier:

$$f_p^{\frac{2p}{VU}}\left(x\right) = \frac{1}{VU}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=\underline{k}}^{\bar{k}} V_{VU}\left(k\cdot EU - u\right)\cdot F\left(k\cdot EU\right)\cdot e^{ik\cdot EUn\frac{2p}{VU}} \right)\cdot d\left(x - n\frac{2p}{VU} \right) \qquad (2.3.30)$$

Esta última expresión permite determinar la transformada de Fourier inversa de $F_{u,V_{VU}}^{EU}$, teniendo en cuenta (2.3.25), obteniéndose la transformada (2.3.17).

Puesto que la función F_p^{EU} tiene únicamente PE valores independientes, su transformada de Fourier inversa $f_p^{\frac{2p}{VU}}$ también tendrá PE valores independientes, siendo el resto repeticiones cíclicas de éstos.

Así pues, la transformada de Fourier inversa de $F_{u,V_{VU}}^{EU}$ vendrá determinada por repeticiones cíclicas de dichos PE valores independientes de $f_p^{\frac{2p}{VU}}$. Esto equivale, formalmente, a la aplicación sobre $\tilde{f}_p^{\frac{2p}{VU}}$ de una ventana cuadrada, dada por la expresión:

$$\mathbb{1}_{VX}\left(x\right) \equiv \begin{cases} 1 & 0 < x < VX \\ 0 & x \le 0 \vee VX \le x \end{cases} \qquad (2.3.31)$$

De tal forma que los valores de la transformada $\left(f_{u,V_{VU}}^{EU} \right)_{c,\mathbb{1}_{VX}}^{\frac{2p}{VU}}$ se determinan multiplicando (2.3.30) por $\mathbb{1}_{VX}\left(x - c\right)$ obteniéndose, dada la acotación del soporte de la ventana:[5]

$$\left(f_{u,V_{VU}}^{EU} \right)_{c,\mathbb{1}_{VX}}^{\frac{2p}{VU}}\left(x\right) =$$

$$= \frac{1}{VU}\sum_{n=\underline{n}}^{\bar{n}} \mathbb{1}_{VX}\left(n\frac{2p}{VU} - c \right)\left(\sum_{k=\underline{k}}^{\bar{k}} V_{VU}\left(k\cdot EU - u\right)\cdot F\left(k\cdot EU\right)\cdot e^{ik\cdot EUn\frac{2p}{VU}} \right)\cdot d\left(x - n\frac{2p}{VU} \right) \qquad (2.3.32)$$

Obsérvese que la longitud de la ventana VX debe cumplir la condición:

[5] El subíndice $c,\mathbb{1}_{VX}$ en la transformada mantiene la consistencia de la notación, y permite observar que la limitación en los índices n es equivalente a acotar en el dominio natural la transformada de Fourier inversa de $F_{u,V_{VU}}^{EU}$, que ya es una función muestreada.

$$\left(PE-1\right)\cdot EX < VX < \left(PE+1\right)\cdot EX \tag{2.3.33}$$

Con el objeto de garantizar que el sumatorio en n de (2.3.32) contenga PE términos.

Sustituyendo en (2.3.32) el valor de la ventana $\mathbb{1}_{VX}$ dado por (2.3.31), se obtiene:

$$\begin{aligned}&\left(f^{EU}_{u,V_{VU}}\right)^{\frac{2p}{VU}}_{c,\mathbb{1}_{VX}}(x)=\\&=\frac{1}{VU}\sum_{n=\underline{n}}^{\overline{n}}\left(\sum_{k=\underline{k}}^{\overline{k}}V_{VU}\left(k\cdot EU-u\right)\cdot F\left(k\cdot EU\right)\cdot e^{ik\cdot EU\cdot n\frac{2p}{VU}}\right)\cdot d\left(x-n\frac{2p}{VU}\right)\end{aligned} \tag{2.3.34}$$

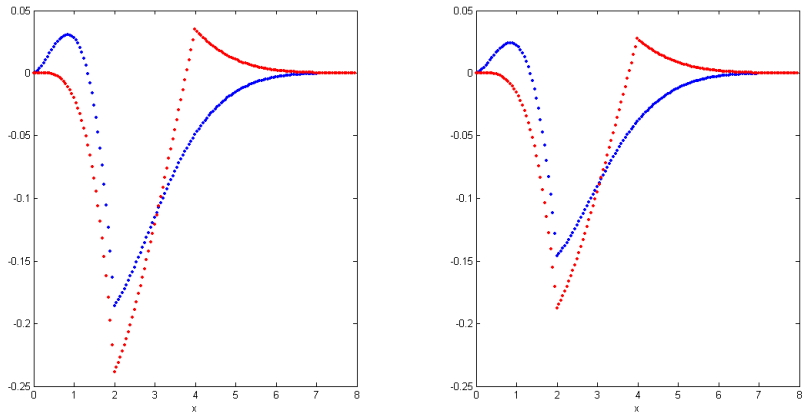
Representada por los valores (2.3.18).

En los casos que se tratan en este trabajo, siempre se elegirá $c=-\dfrac{EX}{2}$ y $VX=PE\cdot EX$, de tal forma que $\underline{n}=0$ y $\overline{n}=PE-1$.

Obsérvese que los valores de la transformada dados por (2.3.18) son $1/EU$ veces los valores de la transformada de Fourier inversa discreta que se determina computacionalmente, dada por (Brigham, 1974):

$$\begin{aligned}&\tilde{f}^{EX}_{c,\mathbb{1}_{VX}}\left(n\frac{2p}{VU}\right)=\frac{1}{PE}\sum_{k=\underline{k}}^{\overline{k}}V_{VU}\left(k\cdot EU-u\right)\cdot F\left(k\cdot EU\right)\cdot e^{ik\cdot EU\cdot n\frac{2p}{VU}}\\&\forall n\in\left\{\underline{n}\quad \underline{n}+1\quad\cdots\quad\overline{n}-1\quad\overline{n}\right\}\end{aligned} \tag{2.3.35}$$

Estos resultados se ejemplifican en las figuras 2–3–3 y 2–3–4:



(a) (b)

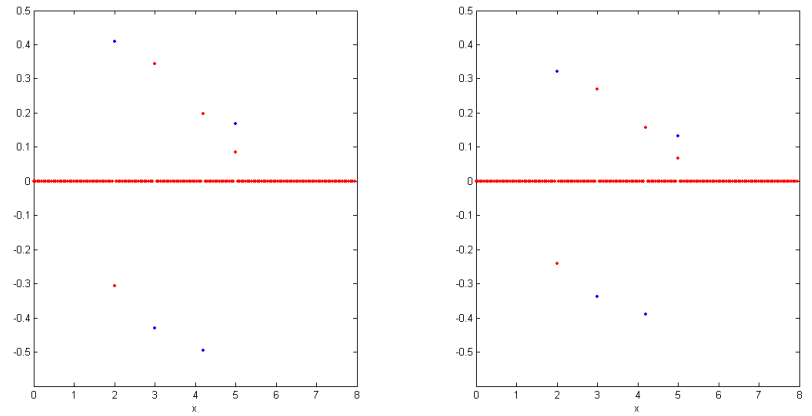
Figura 2–3-3: Transformada de Fourier inversa de funciones muestreadas con soporte acotado, correspondiente al ejemplo I mostrado en §2.2 y §2.3.1:

(a) Transformada de Fourier $\left(\left(f^{0,05}_{0,025;\,h_8}\right)^{p/4}_{p/8;\,\mathrm{I}_{40p}}\right)^{0,05}_{0,025;\,\mathrm{I}_8}$.

(b) Transformada de Fourier discreta $\tilde{f}^{\,0,05}_{0,025;\,\mathrm{I}_8}$ *de la función* $\left(F^{0,05}_{0,025;\,h_8}\right)^{p/4}_{p/8;\,\mathrm{I}_{40p}}$.

En todos los casos se representa en azul la parte real, en rojo la parte imaginaria.

Obsérvese que los valores en (a) son $4/p$ *veces los valores en (b). (Cf. Figura 2–3–5 (d)).*



(a) (b)

Figura 2–3-4: Transformada de Fourier inversa de funciones muestreadas con soporte acotado, correspondiente al ejemplo II mostrado en §2.2 y §2.3.1:

(a) Transformada de Fourier $\left(\left(g^{0,05}_{0,025;\,h_8}\right)^{p/4}_{p/8;\,\mathrm{I}_{40p}}\right)^{0,05}_{0,025;\,\mathrm{I}_8}$.

(b) Transformada de Fourier discreta $\tilde{g}^{\,0,05}_{0,025;\,\mathrm{I}_8}$ *de la función* $\left(G^{0,05}_{0,025;\,h_8}\right)^{p/4}_{p/8;\,\mathrm{I}_{40p}}$.

En todos los casos se representa en azul la parte real, en rojo la parte imaginaria.

Obsérvese que los valores en (a) son $4/p$ *veces los valores en (b). (Cf. Figura 2–2–6 (d)).*

2.3.3. Relaciones entre las magnitudes de los dominios natural y frecuencial

En esta Subsección se compilan las relaciones entre las magnitudes fundamentales que describen las funciones en los dominios natural y frecuencial. En la Tabla 2–4–1 puede observarse la simetría entre el espaciado y la longitud de la ventana en ambos dominios, dada la especial relación de conjugación entre éstos.

Tabla 2–3-1: Relaciones entre las magnitudes fundamentales en los dominios natural y frecuencial. En todos los casos PE *indica el número de puntos en el eje.*

Dominio natural				Dominio frecuencial
$EX \equiv \frac{2p}{VU} = \frac{2p}{PE \cdot EU}$	(2.3.27)	Espaciado	(2.3.8)	$EU \equiv \frac{2p}{VX} = \frac{2p}{PE \cdot EX}$
$LX \equiv (PE - 1) \cdot EX$	(2.2.13)	Longitud de eje muestreado	(2.3.22)	$LU \equiv (PE - 1) \cdot EU$
$VX \equiv PE \cdot EX = \frac{2p}{EU}$	(2.2.14)	Longitud de la ventana	(2.3.23)	$VU \equiv PE \cdot EU = \frac{2p}{EX}$

2.4. Interpolación en las transformadas de Fourier

Como se ha mencionado anteriormente, la interpolación en la transformada de Fourier es un paso necesario en el proceso del algoritmo expuesto en el Capítulo 1, ya que al aplicar éste se obtiene un espectro filtrado definido en puntos no equiespaciados. Debido a que el cálculo numérico de la transformada de Fourier inversa requiere que el espectro se defina en puntos equiespaciados, será preciso interpolar adecuadamente este nuevo espectro.

Esta cuestión, en el contexto más amplio de las transformaciones integrales, es tratada ampliamente y en primer lugar por Whittaker (1915 y 1927 entre otras, culminación con la obra de 1935) en términos de funciones cardinales.[6]

En este trabajo se considera la interpolación de las transformadas de Fourier teniendo en cuenta el Teorema del Muestreo de Shannon para la transformada inversa:

? **TEOREMA DEL MUESTREO. (SHANNON).** Dada una función $F(u)$ nula fuera del intervalo $(-U, U)$, es posible determinar unívocamente su transformada de Fourier inversa $f(x)$ mediante el conocimiento de los valores $f_n \equiv f\left(n\frac{p}{U}\right)$, mediante la expresión:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \frac{\operatorname{sen}(Ut - np)}{Ut - np} \tag{2.4.1}$$

?

La demostración de este Teorema puede encontrarse en el artículo de Shannon, (1949).[7]

Este teorema, que considera la aplicación como ventana de un pulso rectangular, aquí se generaliza para funciones muestreadas de soporte acotado mediante la aplicación de una ventana cualquiera.

El desarrollo de las demostraciones es, en ambos casos, paralela al desarrollo que realiza Papoulis (1962) para la transformada inversa en la §3–5 de su obra.

[6] Puede consultarse un “estado del arte” en el artículo de McNamee et al. (1971).
[7] Puede consultarse un “estado del arte” en el artículo de Unser (2000).

2.4.1. Interpolación en la transformada de Fourier directa

El objetivo de esta Sección es, dada una función $\left(F^{EX}_{c,v_{VX}}\right)^{EU}_{u,1_{VU}}$ en la forma (2.3.1), definir una nueva función $\left(F^{EX}_{c,v_{VX}}\right)^{EU'}_{u',1_{VU'}}$ que interpola a la primera en PE valores en el dominio frecuencial, equiespaciados una distancia EU' y contenidos en el intervalo $\left(u', VU' + u'\right)$.

Para ello, en primer lugar se expondrá una generalización del Teorema del Muestreo para la transformada directa, mediante el cual es posible determinar la transformada de Fourier de una función muestreada y con soporte acotado mediante la aplicación de una ventana cualquiera.

A continuación, se determinará explícitamente la transformada en los anteriormente citados PE valores en el dominio frecuencial, aplicando un desarrollo análogo al expuesto en la §2.2.3.

2.4.1.1. Generalización del Teorema del Muestreo para la transformada directa

? **TEOREMA. (GENERALIZACIÓN DEL TEOREMA DEL MUESTREO PARA LA TRANSFORMADA DIRECTA).** Dada una función muestreada con soporte acotado $f^{EX}_{c,v_{VX}}$ definida en el dominio natural, dada por (2.2.9), su transformada de Fourier puede ser determinada unívocamente mediante el conocimiento de los PE valores:

$$\left(F^{EX}_{c,1_{VX}}\right)^{\frac{2p}{VX}}_{u,1_{VU}}\left(k\frac{2p}{VX}\right)=\frac{2p}{VX}\sum_{n=\underline{n}}^{\overline{n}}1_{VX}\left(n\cdot EX-c\right)\cdot f\left(n\cdot EX\right)\cdot e^{-ik\frac{2p}{VX}n\cdot EX} \tag{2.4.2}$$

$$\forall k\in\left\{\underline{k}\quad \underline{k}+1\quad \cdots\quad \overline{k}-1\quad \overline{k}\right\}$$

Y las funciones:

$$\left(\hat{V}^{q\ EX}_{c,1_{VX}}\right)\left(u\mid c,VX\right)=\frac{2p}{VX}\sum_{n=\underline{n}}^{\overline{n}}v_{VX}\left(n\cdot EX-c\right)\cdot e^{-i\left(u-q\frac{2p}{VX}\right)n\cdot EX} \tag{2.4.3}$$

$$\forall q\in\mathbb{Z}$$

Mediante la expresión:

$$\left(F^{EX}_{c,v_{VX}}\right)(u)=\frac{EX}{2p}\sum_{q=-\infty}^{\infty}\left(F^{EX}_{c,1_{VX}}\right)^{\frac{2p}{VX}}_{u,1_{VU}}\left(q\frac{2p}{VX}\right)\left(\hat{V}^{q\,EX}_{c,1_{VX}}\right)(u\mid c,VX) \tag{2.4.4}$$

?

¦ **DEMOSTRACIÓN.** La obtención de la expresión (2.4.4) requiere separar, al tomar la transformada de Fourier de la función $f^{EX}_{c,v_{VX}}$ dada por (2.2.9), los efectos del muestreo y la ventana que acota el soporte, v_{VX}. Para ello se descompone esta ventana en la forma:

$$v_{VX}(x)=1_{VX}(x)\cdot v_{VX}(x)\cdot 1_{VX}(x) \tag{2.4.5}$$

Obsérvese que la ventana 1_{VX}, definida en (2.3.31), tiene la propiedad de ser el elemento neutro en el producto de ventanas de longitud VX en el dominio natural.

Así pues, la función la función $f^{EX}_{c,v_{VX}}$ puede rescribirse en la forma:

$$f^{EX}_{c,v_{VX}}(x)=\sum_{n=\underline{n}}^{\overline{n}}1_{VX}(n\cdot EX-c)\cdot v_{VX}(n\cdot EX-c)\cdot f^{EX}_{c,1_{VX}}(n\cdot EX)\cdot d(x-n\cdot EX) \tag{2.4.6}$$

Donde ha sido definida la nueva función $f^{EX}_{c,1_{VX}}$:

$$f^{EX}_{c,1_{VX}}(x)\equiv\sum_{m=\underline{n}}^{\overline{n}}1_{VX}(m\cdot EX-c)\cdot f(m\cdot EX)\cdot d(x-m\cdot EX) \tag{2.4.7}$$

Obsérvese que el efecto de la ventana permanece en la función $f^{EX}_{c,v_{VX}}$ dada por (2.4.6), mientras que el efecto del muestreo en ésta se encuentra incluido en la función $f^{EX}_{c,1_{VX}}$, como puede apreciarse en su definición (2.4.7).

La función $f^{EX}_{c,1_{VX}}$ es, por su definición, una función muestreada y de soporte acotado. Su transformada de Fourier puede determinarse mediante (2.3.2), que en este caso se rescribe, teniendo en cuenta el valor de la ventana 1_{VX} dado por (2.3.31), en la forma expresada en (2.4.2).

Por otra parte, es posible expandir la función $f^{EX}_{c,1_{VX}}$ en una serie de Fourier en el intervalo $(c, VX+c)$ mediante (2.1.8), que en este caso se rescribe, teniendo en cuenta las relaciones expuestas en la Tabla 2–4–1, en la forma:

$$f^{EX}_{c,1_{VX}}(x)=\sum_{q=-\infty}^{\infty}f_q\cdot e^{iq\frac{2p}{VX}x}, \qquad \forall x\in(c \quad VX+c) \tag{2.4.8}$$

Los coeficientes f_q vienen dados por (2.1.10), que en este caso se rescribe, teniendo en cuenta las relaciones expuestas en la Tabla 2–4–1, en la forma:

$$f_q = \frac{1}{PE}\sum_{n=\underline{n}}^{\overline{n}} f_{c,1_{VX}}^{EX}\left(n\cdot EX\right)\cdot e^{-iq\frac{2p}{VX}n\cdot EX} \tag{2.4.9}$$

Sustituyendo en esta expresión el valor de $f_{c,1_{VX}}^{EX}$ dado en (2.4.7), ésta se rescribe en la forma:

$$f_q = \frac{1}{PE}\sum_{n=\underline{n}}^{\overline{n}} 1_{VX}\left(n\cdot EX - c\right)\cdot f\left(n\cdot EX\right)\cdot e^{-iq\frac{2p}{VX}n\cdot EX} \tag{2.4.10}$$

Comparando (2.4.2) y (2.4.10), teniendo en cuenta las relaciones expuestas en la Tabla 2-4-1, se concluye que:

$$f_q = \frac{EX}{2p}\left(F_{c,1_{VX}}^{EX}\right)_{u,1_{VU}}^{\frac{2p}{VX}}\left(q\frac{2p}{VX}\right)$$

$$\forall q \in \left\{\underline{k} \quad \underline{k}+1 \quad \cdots \quad \overline{k}-1 \quad \overline{k}\right\} \tag{2.4.11}$$

De tal forma que, sustituyendo (2.4.11) en (2.4.8), la suma:

$$f_p\left(x\right) \equiv \frac{EX}{2p}\sum_{q=-\infty}^{\infty}\left(F_{c,1_{VX}}^{EX}\right)_{u,1_{VU}}^{\frac{2p}{VX}}\left(q\frac{2p}{VX}\right)\cdot e^{iq\frac{2p}{VX}x} \tag{2.4.12}$$

Representa una repetición periódica de $f_{c,1_{VX}}^{EX}$ a lo largo del dominio natural, y coincide en valor con ésta en el intervalo $\left(c, VX + c\right)$.

Así pues, es posible expresar la función $f_{c,v_{VX}}^{EX}$ dada por (2.4.6), teniendo en cuenta esta consideración y sustituyendo el valor de f_p dado por (2.4.12), en la forma:

$$f_{c,v_{VX}}^{EX}\left(x\right) =$$

$$= \frac{EX}{2p}\sum_{q=-\infty}^{\infty}\left(F_{c,1_{VX}}^{EX}\right)_{u,1_{VU}}^{\frac{2p}{VX}}\left(q\frac{2p}{VX}\right)\cdot$$

$$\cdot\sum_{n=\underline{n}}^{\overline{n}} 1_{VX}\left(n\cdot EX - c\right)\cdot v_{VX}\left(n\cdot EX\right)\cdot e^{iq\frac{2p}{VX}n\cdot EX}\cdot d\left(x - n\cdot EX\right) \tag{2.4.13}$$

$$\forall x \in \left(c \quad VX + c\right)$$

Si se define, para cada valor del índice q, la nueva ventana desplazada dada por la función:

$$\overset{q}{\hat{v}}\left(x \mid c, VX\right) \equiv v_{VX}\left(x - c\right)\cdot e^{iq\frac{2p}{VX}x} \tag{2.4.14}$$

Esta última expresión puede rescribirse en la forma:

$$f^{EX}_{c,v_{VX}}(x) =$$
$$= \frac{EX}{2p}\sum_{q=-\infty}^{\infty}\left(F^{EX}_{c,1_{VX}}\right)^{\frac{2p}{VX}}_{u,1_{VU}}\left(q\frac{2p}{VX}\right)\cdot\sum_{n=\underline{n}}^{\overline{n}}1_{VX}\left(n\cdot EX - c\right)\cdot\overset{q}{\hat{v}}\left(n\cdot EX \mid c,VX\right)\cdot d\left(x - n\cdot EX\right)$$

$$\forall x \in \left(c \quad VX + c\right)$$

(2.4.15)

La función $f^{EX}_{c,v_{VX}}$ dada por (2.4.15) es suma (en q) de funciones muestreadas de soporte acotado, a cada una de las cuales le es aplicable idénticamente el desarrollo expuesto en §2.3.1. La transformada de Fourier de cada elemento en esta expresión vendrá dada pues, comparando (2.4.15) con (2.2.9), por una expresión análoga a (2.3.1), que en este caso se rescribe en la forma:

$$\left(\overset{q}{\hat{V}}{}^{EX}_{c,1_{VX}}\right)\left(u \mid c,VX\right) \equiv$$
$$\equiv TF\left[\sum_{n=\underline{n}}^{\overline{n}}1_{VX}\left(n\cdot EX - c\right)\cdot\overset{q}{\hat{v}}\left(n\cdot EX \mid c,VX\right)\cdot d\left(x - n\cdot EX\right)\right]\left(u\right) = \tag{2.4.16}$$
$$= \frac{2p}{VX}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{n=\underline{n}}^{\overline{n}}1_{VX}\left(n\cdot EX - c\right)\cdot\overset{q}{\hat{v}}\left(n\cdot EX \mid c,VX\right)\cdot e^{-ik\frac{2p}{VX}n\cdot EX}\right)\cdot d\left(u - k\frac{2p}{VX}\right)$$

Es posible rescribir esta expresión, teniendo en cuenta el valor de la ventana 1_{VX} dado por (2.3.31) y sustituyendo la función $\overset{q}{\hat{v}}$ por su valor dado por (2.4.14), obteniéndose la expresión (2.4.3).

Teniendo en cuenta estas consideraciones, la transformada de Fourier de (2.4.15) vendrá dada por (2.4.4).

Obsérvese que los valores $\left(F^{EX}_{c,1_{VX}}\right)^{\frac{2p}{VX}}_{u,1_{VU}}$ dados por (2.4.2) son, como se mencionó en §2.3.1, $2p/VX$ veces los coeficientes de la serie de Fourier de $f^{EX}_{c,1_{VX}}$ dada por (2.3.16), con la ventana 1_{VX}.

La extensión del índice del sumatorio en (2.4.4) para todo $q \in \mathbb{Z}$ hace referencia a la periodicidad de esta transformada de Fourier, tal como se discutió en §2.3.1. Esta extensión infinita del índice no es operativa computacionalmente, por lo que en lugar de (2.4.4) se emplea la expresión acotada:

$$\left(F^{*EX}_{c,v_{VX}}\right)\left(u\right) = \frac{EX}{2p}\sum_{q=\underline{k}}^{\overline{k}}\left(F^{EX}_{c,1_{VX}}\right)^{\frac{2p}{VX}}_{u,1_{VU}}\left(q\frac{2p}{VX}\right)\cdot\left(\overset{q}{\hat{V}}{}^{EX}_{c,1_{VX}}\right)\left(u \mid c,VX\right) \tag{2.4.17}$$

Donde el índice q se extiende únicamente a los PE valores independientes que se calculan de la transformada $\left(F_{c,1_{VX}}^{EX}\right)_{u,1_{VU}}^{\frac{2p}{VX}}$.

Es importante señalar que no será posible expresar las funciones $\left(\hat{V}_{c,1_{VX}}^{q\ EX}\right)$ dadas por (2.4.3) como transformadas de Fourier de ninguna otra función en forma genérica, pues se evaluarán en puntos $u = k \cdot EU'$ tales que el nuevo espaciado en el dominio frecuencial EU' no será conjugado del espaciado en el dominio natural EX , y no se cumplirán las relaciones expuestas en la Tabla 2–4–1.

Obsérvese que, en el caso particular en que la ventana inicial v_{VX} fuera un pulso cuadrado 1_{VX} , la expresión (2.4.5) se rescribiría en forma trivial:

$$1_{VX}(x) = 1_{VX}(x) \cdot 1_{VX}(x) \cdot 1_{VX}(x) \tag{2.4.18}$$

Y el resultado expuesto en (2.4.4) se reduciría a la fórmula de interpolación a la que conduce el Teorema del Muestreo tradicional, equivalente a (2.4.1), donde la transformada de Fourier de la ventana sería un miembro de la familia de los senos cardinales.

Estos resultados se ejemplifican en las figuras 2–4–1 y 2–4–2:

Figura 2–4-1: Interpolación en la transformada de Fourier directa (I), correspondiente al ejemplo I mostrado en §2.2:

(a), (b) Valores de $\left(F^{*0,05}_{0,025;\,1_8}\right)^{p/4}_{p/8;\,1_{40p}}$ *y detalle. Las líneas punteadas se incluyen para facilitar la observación de las tendencias.*

(c–l) Transformadas de las ventanas desplazadas $\left(\hat{h}^{q\,0,05}_{0,025;\,1_8}\right)(u\,|\,0,025;8)$ *para algunos valores de* q.

(m) Detalle de la transformada de la ventana desplazada con $q = 64$.

(n), (ñ) Transformada de Fourier $\left(F^{*0,05}_{0,025;\,h_8}\right)^{p/4}_{p/8;\,1_{40p}}$ *(puntos) y transformada de Fourier para interpolar* $\left(F^{*0,05}_{0,025;\,h_8}\right)(u)$ *(líneas continuas), y detalle.*

En todos los casos se representa en azul la parte real, en rojo la parte imaginaria.

Figura 2–4-2: Interpolación en la transformada de Fourier directa (I), correspondiente al ejemplo II mostrado en §2.2:

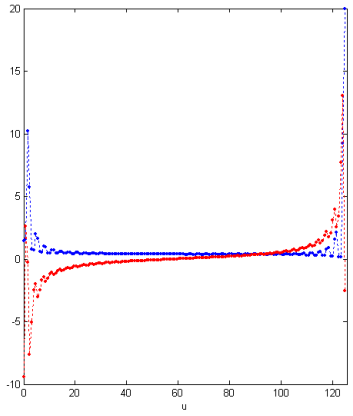
(a), (b) Valores de $\left(G^{*0,05}_{0,025;\,1_8}\right)^{p/4}_{p/8;\,1_{40p}}$ *y detalle. Las líneas punteadas se incluyen para facilitar la observación de las tendencias.*

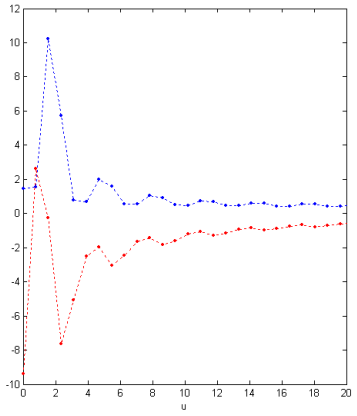
(c–l) Transformadas de las ventanas desplazadas $\left(\hat{h}^{q\,0,05}_{0,025;\,1_8}\right)(u\,|\,0,025;8)$ *para algunos valores de* q.

(m) Detalle de la transformada de la ventana desplazada con $q = 64$.

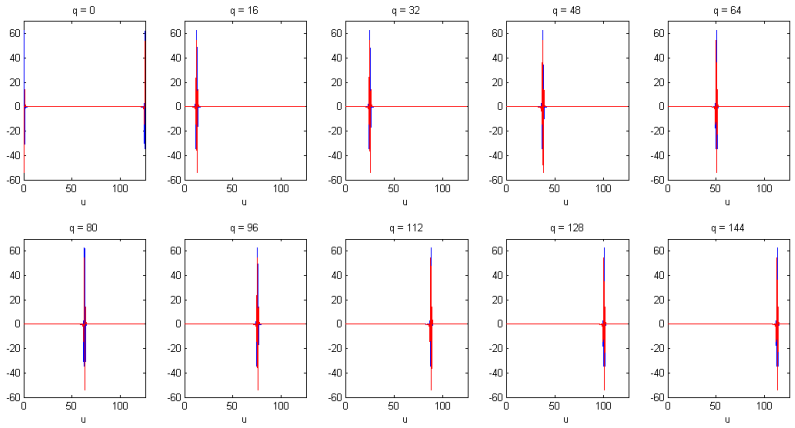
(n), (ñ) Transformada de Fourier $\left(G^{*0,05}_{0,025;\,h_8}\right)^{p/4}_{p/8;\,1_{40p}}$ *(puntos) y transformada de Fourier para interpolar* $\left(G^{*0,05}_{0,025;\,h_8}\right)(u)$ *(líneas continuas), y detalle.*

En todos los casos se representa en azul la parte real, en rojo la parte imaginaria.

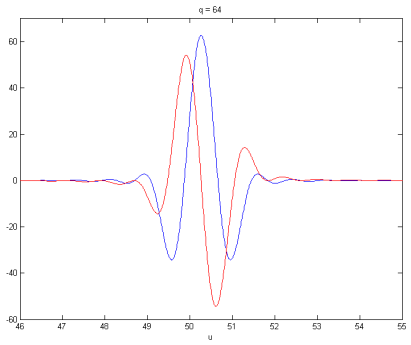




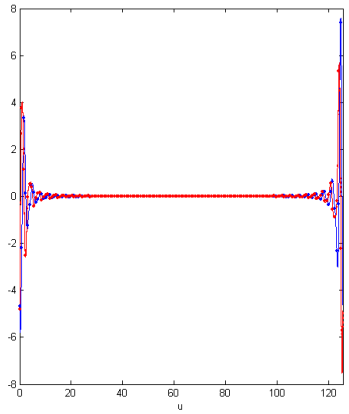
(a) *(b)*

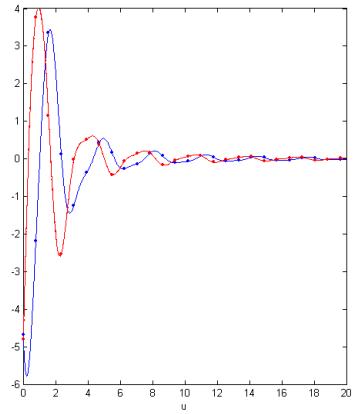


(c–l)

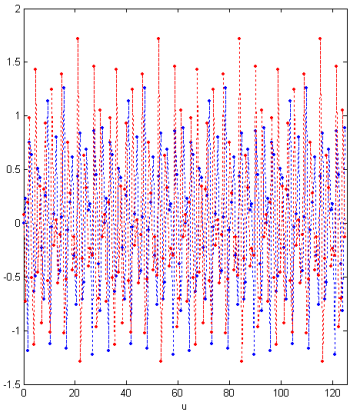


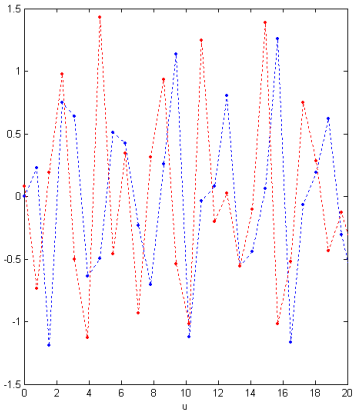
(m)



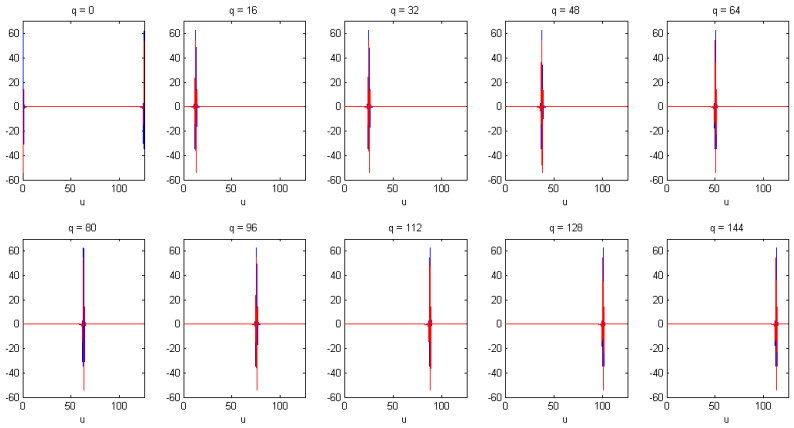


(n) *(ñ)*

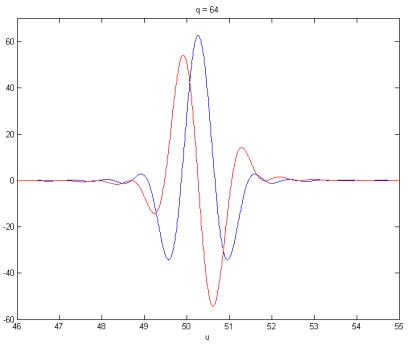




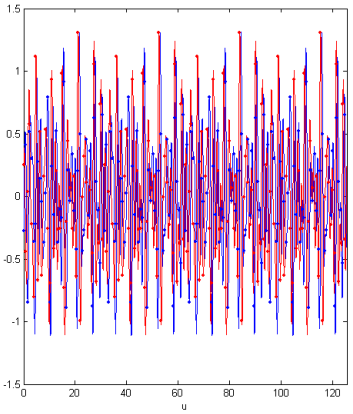
(a) *(b)*

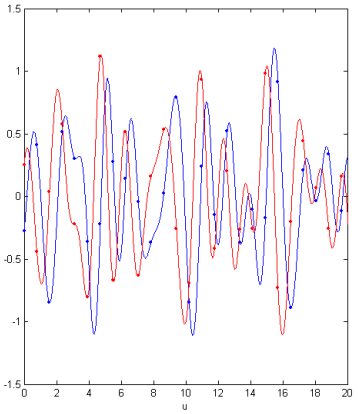


(c–l)



(m)





(n) *(ñ)*

2.4.1.2. Interpolación en la transformada directa

? **DEFINICIÓN (TRANSFORMADA DIRECTA INTERPOLADA).** Dada una función muestreada con soporte acotado $f^{EX}_{c,v_{VX}}$ definida en el dominio natural, dada por (2.2.9), se define la nueva función $\left(F^{EX}_{c,v_{VX}}\right)^{EU'}_{u',\mathrm{I}_{VU'}}$ resultado de la interpolación en la transformada de Fourier $\left(F^{EX}_{c,v_{VX}}\right)^{EU}_{u,\mathrm{I}_{VU}}$ mediante la expresión:

$$\left(F^{EX}_{c,v_{VX}}\right)^{EU'}_{u',\mathrm{I}_{VU'}}(u) \equiv \mathbb{I}_{VU'}(u)\cdot\left(F^{EX}_{c,v_{VX}}\right)(u)\cdot\Delta^{EU'}(u) \tag{2.4.19}$$

Esta expresión se rescribe, sustituyendo el valor de $\mathbb{I}_{VU'}$ dado por (2.3.12), el valor de $\left(F^{EX}_{c,v_{VX}}\right)(u)$ dado por (2.4.4) y el valor de $\Delta^{EU'}(u)$ dado por una expresión análoga a(2.2.1), en la forma:

$$\left(F^{EX}_{c,v_{VX}}\right)^{EU'}_{u',\mathrm{I}_{VU'}}(u) =$$
$$= \frac{EX}{2p}\sum_{k=\underline{k}}^{\overline{k}}\left(\sum_{q=-\infty}^{\infty}\left(F^{EX}_{c,\mathrm{I}_{VX}}\right)^{\frac{2p}{VX}}\left(q\frac{2p}{VX}\right)\cdot\left(\hat{V}^{q\ EX}_{c,\mathrm{I}_{VX}}\right)^{EU'}_{u',\mathrm{I}_{VU'}}(k\cdot EU' \mid c, VX)\right)\cdot d\left(u-k\cdot EU'\right) \tag{2.4.20}$$

De tal forma que la función $\left(F^{EX}_{c,v_{VX}}\right)^{EU'}_{u',\mathrm{I}_{VU'}}$ viene representada por los valores:

$$\left(F^{EX}_{c,v_{VX}}\right)^{EU'}_{u',\mathrm{I}_{VU'}}(k\cdot EU') = \frac{EX}{2p}\sum_{q=-\infty}^{\infty}\left(F^{EX}_{c,\mathrm{I}_{VX}}\right)^{\frac{2p}{VX}}\left(q\frac{2p}{VX}\right)\cdot\left(\hat{V}^{q\ EX}_{c,\mathrm{I}_{VX}}\right)^{EU'}_{u',\mathrm{I}_{VU'}}(k\cdot EU' \mid c, VX)$$

$$\forall k \in \left\{\underline{k} \quad \underline{k}+1 \quad \cdots \quad \overline{k}-1 \quad \overline{k}\right\} \tag{2.4.21}$$

Donde el conjunto de índices $\left\{\underline{k} \quad \underline{k}+1 \quad \cdots \quad \overline{k}-1 \quad \overline{k}\right\}$ cumple la condición:

$$k\cdot EU' \in \left(u' \quad VU'+u'\right), \qquad \forall k \in \left\{\underline{k} \quad \underline{k}+1 \quad \cdots \quad \overline{k}-1 \quad \overline{k}\right\} \tag{2.4.22}$$

?

Atendiendo a la consideración efectuada en el Epígrafe anterior acerca de la extensión del índice del sumatorio para todo $q \in \mathbb{Z}$, en lugar de (2.4.21) se emplea la expresión acotada:

$$\left(F^{*EX}_{c,v_{VX}}\right)^{EU'}_{u',1_{VU'}}\left(k\cdot EU'\right)=\frac{EX}{2p}\sum_{q=\underline{k}}^{\overline{k}}\left(F^{EX}_{c,1_{VX}}\right)^{\frac{2p}{VX}}_{u,1_{VU}}\left(q\frac{2p}{VX}\right)\left(\hat{V}^{q\ EX}_{c,1_{VX}}\right)^{EU'}_{u',1_{VU'}}\left(k\cdot EU'\,|\,c,VX\right)$$

$$\forall k\in\left\{\underline{k}\quad \underline{k}+1\quad\cdots\quad\overline{k}-1\quad\overline{k}\right\}$$

(2.4.23)

Donde el conjunto de índices $\left\{\underline{k}\quad \underline{k}+1\quad\cdots\quad\overline{k}-1\quad\overline{k}\right\}$ cumple la condición (2.4.22).

En los casos en que se está interesado en la interpolación de PE valores en la región del dominio frecuencial más próxima al origen, desde $u=0$ hasta $u=\left(PE-1\right)\cdot EU'$, se elegirá $u'=-\frac{EU'}{2}$. En los casos en los que se está interesado en la interpolación de PE valores en la región del dominio frecuencial más alejada del origen, desde $u=\left(PE-1\right)\left(EU-EU'\right)$ hasta $u=\left(PE-1\right)\cdot EU$, se elegirá $u'=\left(PE-1\right)\left(EU-EU'\right)-\frac{EU'}{2}$. En ambos casos se elegirá $VU'=PE\cdot EU'$, de tal forma que $LU'=\left(PE-1\right)\cdot EU'$, $\underline{k}=0$ y $\overline{k}=PE-1$.

Es importante señalar que, como es de esperar, la función $\left(F^{EX}_{c,1_{VX}}\right)\left(u\right)$ dada por (2.4.4) toma los valores $\left(F^{EX}_{c,v_{VX}}\right)^{EU}_{u,1_{VU}}\left(k\cdot EU\right)$ en los puntos $u=k\cdot EU$, dados por la transformada de Fourier expresada en (2.3.2).

¦ **DEMOSTRACIÓN.** Para comprobar esta afirmación, se evalúa (2.4.21) en los puntos de la forma $u=k\cdot EU$, sustituyéndose explícitamente los valores $\left(F^{EX}_{c,1_{VX}}\right)^{\frac{2p}{VX}}_{u,1_{VU}}$ dados por (2.4.2) y los valores $\left(\hat{V}^{q\ EX}_{c,1_{VX}}\right)$ dados por (2.4.3), teniendo en cuenta las relaciones expuestas en la Tabla 2–4–1:

$$\left(F^{EX}_{c,v_{VX}}\right)^{EU}_{u,1_{VU}}\left(k\cdot EU\right)=$$
$$=\frac{2p}{VX}\frac{1}{PE}\sum_{n=\underline{n}}^{\overline{n}}v_{VX}\left(n\cdot EX-c\right)\cdot e^{-ik\cdot EU\,n\,EX}\cdot$$
$$\cdot\sum_{q=-\infty}^{\infty}\sum_{m=\underline{n}}^{\overline{n}}1_{VX}\left(m\cdot EX-c\right)\cdot f\left(m\cdot EX\right)\cdot e^{-i\,q\cdot EU\cdot m\cdot EX}\cdot e^{i\,q\cdot EU\cdot n\,EX}\qquad(2.4.24)$$

$$\forall k\in\left\{\underline{k}\quad \underline{k}+1\quad\cdots\quad\overline{k}-1\quad\overline{k}\right\}$$

Es posible rescribir esta expresión, sustituyendo la ventana 1_{VX} por su valor dado en (2.3.31), en la forma:

$$\left(F_{c,v_{VX}}^{EX}\right)_{u,1_{VU}}^{EU}\left(k\cdot EU\right)=$$
$$=\frac{2p}{VX}\frac{1}{PE}\sum_{n=\underline{n}}^{\overline{n}}v_{VX}\left(n\cdot EX-c\right)\cdot e^{-ik\cdot EU\cdot n\cdot EX}\cdot\sum_{q=-\infty}^{\infty}\sum_{m=\underline{n}}^{\overline{n}}f\left(m\cdot EX\right)\cdot e^{-iq\cdot EU\cdot m\cdot EX}\cdot e^{iq\cdot EU\cdot n\cdot EX}$$

$$\forall k\in\left\{\underline{k}\quad\underline{k}+1\quad\cdots\quad\overline{k}-1\quad\overline{k}\right\}$$

(2.4.25)

Es posible rescribir la discretización del Teorema Integral de Fourier (2.1.18), teniendo en cuenta las relaciones expuestas en la Tabla 2–4–1, en la forma:

$$g\left(n\cdot EX\right)=\frac{1}{PE}\sum_{q=-\infty}^{\infty}\sum_{m=\underline{n}}^{\overline{n}}g\left(m\cdot EX\right)\cdot e^{-iq\cdot EU\cdot m\cdot EX}\cdot e^{iq\cdot EU\cdot n\cdot EX}\tag{2.4.26}$$

Así pues, tomando $g\left(m\cdot EX\right)=1_{VX}\left(m\cdot EX-c\right)\cdot f\left(m\cdot EX\right)$ en (2.4.24), aplicando la expresión anterior se obtiene, teniendo en cuenta las relaciones expuestas en la Tabla 2–4–1:

$$\left(F_{c,v_{VX}}^{EX}\right)_{u,1_{VU}}^{\frac{2p}{VX}}\left(k\frac{2p}{VX}\right)=\frac{2p}{VX}\sum_{n=\underline{n}}^{\overline{n}}v_{VX}\left(n\cdot EX-c\right)\cdot f\left(n\cdot EX\right)\cdot e^{-ik\frac{2p}{VX}n\cdot EX}$$

(2.4.27)

$$\forall k\in\left\{\underline{k}\quad\underline{k}+1\quad\cdots\quad\overline{k}-1\quad\overline{k}\right\}$$

Obsérvese que esta expresión conduce a los mismos valores que la transformada de Fourier $\left(F_{c,v_{VX}}^{EX}\right)_{u,1_{VU}}^{\frac{2p}{VX}}$ dada por (2.3.2), como se quería comprobar.

¦

Estos resultados se ejemplifican en las figuras 2–4–3 y 2–4–4:

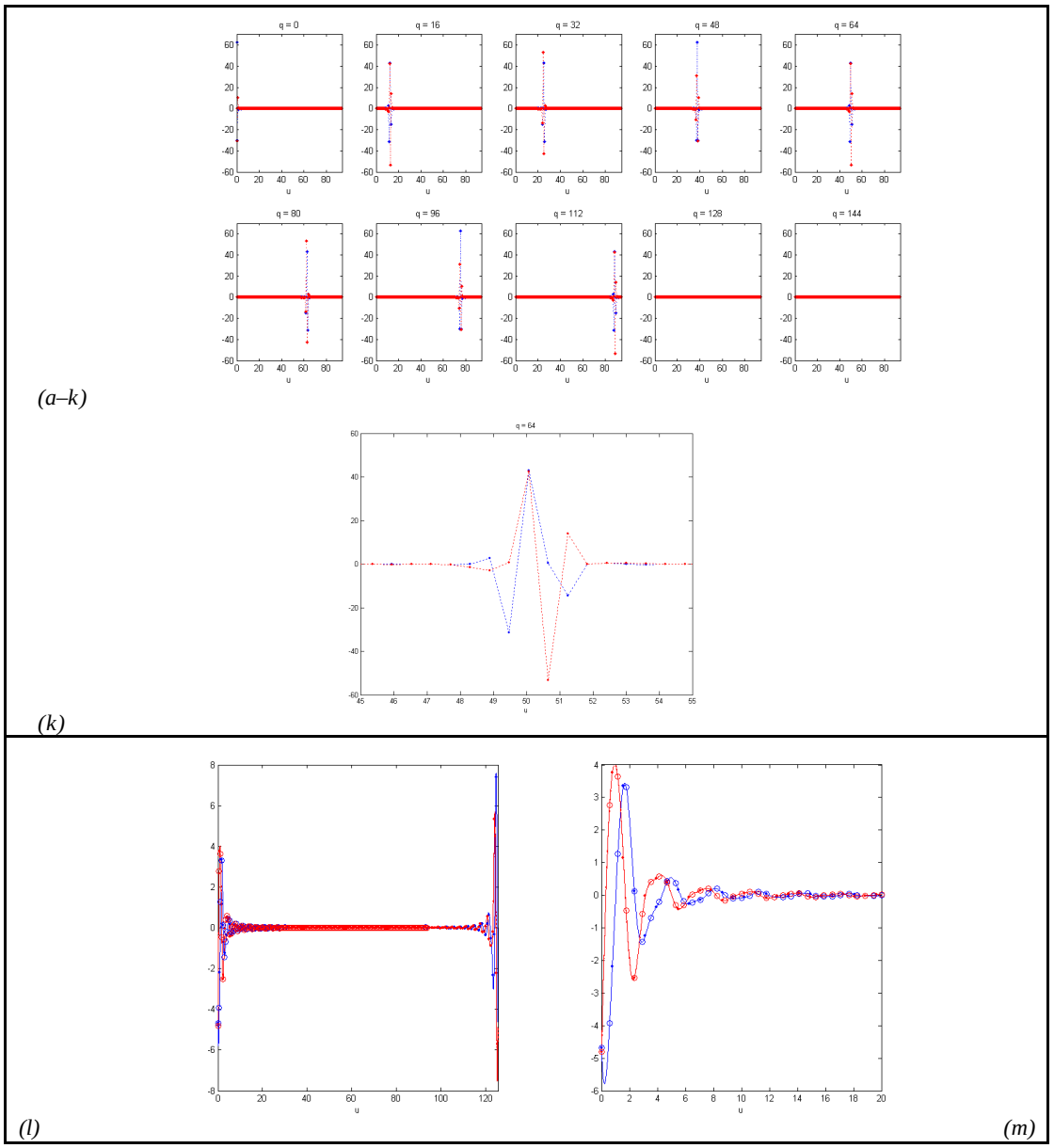


Figura 2–4-3: Interpolación en la transformada de Fourier directa (y II), correspondiente al ejemplo I mostrado en §2.2:

(a–j) Transformadas de las ventanas desplazadas $\left(\hat{h}^{q\,0,05}_{0,025;\,I_8}\right)\left(k\frac{3p}{16}|0,025;8\right)$ *para algunos valores de* q.

(k) Detalle de la transformada de la ventana desplazada con $q=64$.

(l), (m) Transformada de Fourier $\left(F^{*0,05}_{0,025;\,h_8}\right)^{p/4}_{p/8;\,I_{40p}}$ *(puntos), transformada para interpolar* $\left(F^{*0,05}_{0,025;\,h_8}\right)(u)$ *y transformada interpolada* $\left(F^{*0,05}_{0,025;\,h_8}\right)^{\frac{3}{4}p/4}_{\frac{3}{4}p/8;\,I_{\frac{3}{4}40p}}$ *(círculos), y detalle.*

En todos los casos se representa en azul la parte real, en rojo la parte imaginaria. Las líneas punteadas se incluyen para facilitar la observación de las tendencias.

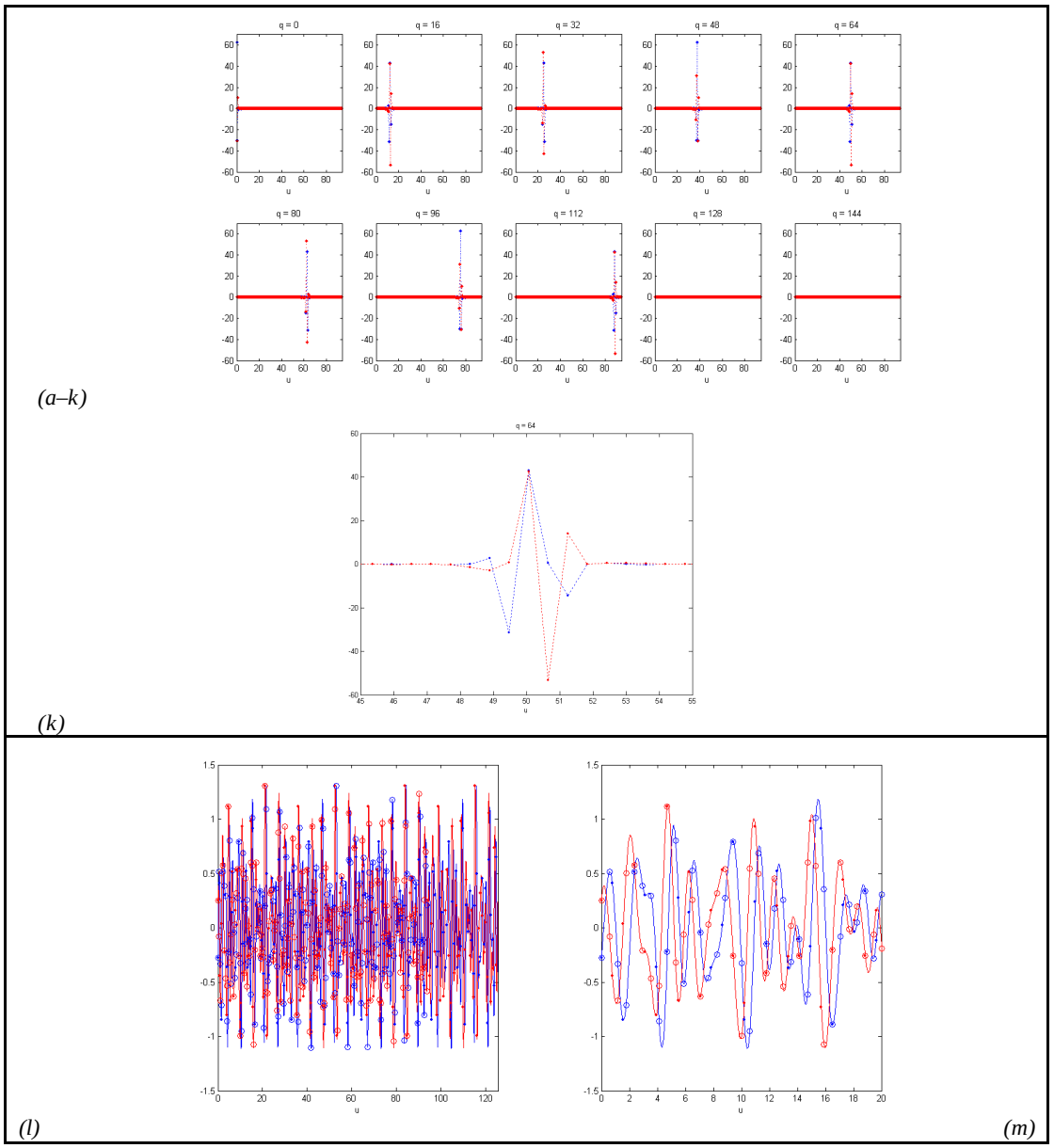


Figura 2–4-4: Interpolación en la transformada de Fourier directa (y II), correspondiente al ejemplo II mostrado en §2.2:

(a–j) Transformadas de las ventanas desplazadas $\left(\hat{h}^{q\,0,05}_{0,025;\,I_8}\right)\left(k\frac{3p}{16}|0,025;8\right)$ *para algunos valores de* q.

(k) Detalle de la transformada de la ventana desplazada con $q=64$.

(l), (m) Transformada de Fourier $\left(F^{*0,05}_{0,025;\,h_8}\right)^{p/4}_{p/8;\,I_{40p}}$ *(puntos), transformada para interpolar* $\left(F^{*0,05}_{0,025;\,h_8}\right)(u)$ *y transformada interpolada* $\left(F^{*0,05}_{0,025;\,h_8}\right)^{\frac{3}{4}p/4}_{\frac{3}{4}p/8;\,I_{\frac{3}{4}40p}}$ *(círculos), y detalle.*

En todos los casos se representa en azul la parte real, en rojo la parte imaginaria. Las líneas punteadas se incluyen para facilitar la observación de las tendencias.

2.4.2. Interpolación en la transformada de Fourier inversa

El objetivo de esta Sección es, dada una función $\left(f_{u,V_{VU}}^{EU} \right)_{c,1_{VX}}^{EX}$ en la forma (2.3.17), definir una nueva función $\left(f_{u,V_{VU}}^{EU} \right)_{c',1_{VX'}}^{EX'}$ que interpola a la primera en PE valores en el dominio frecuencial, equiespaciados una distancia EX' y contenidos en el intervalo $\left(c', VX' + c' \right)$.

El procedimiento a seguir es análogo al expuesto en § 2.4.1. En primer lugar se expondrá una generalización del Teorema del Muestreo para la transformada inversa, mediante el cual es posible determinar la transformada de Fourier de una función muestreada y con soporte acotado mediante la aplicación de una ventana cualquiera.

A continuación, se determinará explícitamente la transformada en los anteriormente citados PE valores en el dominio natural, aplicando un desarrollo análogo al expuesto en § 2.2.3.

2.4.2.1. Generalización del Teorema del Muestreo para la transformada inversa

? **TEOREMA. (GENERALIZACIÓN DEL TEOREMA DEL MUESTREO PARA LA TRANSFORMADA INVERSA).** Dada una función muestreada con soporte acotado $F_{u,V_{VU}}^{EU}$ definida en el dominio frecuencial, dada por (2.3.20), su transformada de Fourier inversa puede ser determinada unívocamente mediante el conocimiento de los PE valores:

$$\left(f_{u,1_{VU}}^{EU} \right)_{c,1_{VX}}^{\frac{2p}{VU}} \left(n\frac{2p}{VU} \right) = \frac{1}{VU} \sum_{k=\underline{k}}^{\overline{k}} 1_{VU}\left(k \cdot EU - u \right) \cdot F\left(k \cdot EU \right) \cdot e^{i \cdot k \cdot EU \cdot n \frac{2p}{VU}}$$

(2.4.28)

$$\forall n \in \left\{ \underline{n} \quad \underline{n}+1 \quad \cdots \quad \overline{n}-1 \quad \overline{n} \right\}$$

Y las funciones:

$$\left(\hat{v}_{u,1_{VU}}^{m\,EU} \right)\left(x \mid u, VU \right) = \frac{1}{VU} \sum_{k=\underline{k}}^{\overline{k}} V_{VU}\left(k \cdot EU - u \right) \cdot e^{i \cdot k \cdot EU \left(x - m\frac{2p}{VU} \right)}$$

(2.4.29)

$$\forall m \in \mathbb{Z}$$

Mediante la expresión:

$$\left(f_{u,V_{VU}}^{EU}\right)(x) = EU\cdot\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(f_{u,\mathbb{I}_{VU}}^{EU}\right)_{c,\mathbb{I}_{VX}}^{\frac{2p}{VU}}\left(m\frac{2p}{VU}\right)\cdot\left(\hat{v}_{u,\mathbb{I}_{VU}}^{m^{EU}}\right)(x\,|\,u,VU) \tag{2.4.30}$$

?

¦ **DEMOSTRACIÓN.** La obtención de la expresión (2.4.30) requiere separar, al tomar la transformada de Fourier de la función $F_{u,V_{VU}}^{EU}$ dada por (2.3.20), los efectos del muestreo y la ventana que acota el soporte V_{VU}. Para ello se descompone esta ventana en la forma:

$$V_{VU}(x) = \mathbb{I}_{VU}(u)\cdot V_{VU}(x)\cdot\mathbb{I}_{VU}(u) \tag{2.4.31}$$

Obsérvese que la ventana $\mathbb{I}_{VU}$, definida en (2.3.12), tiene la propiedad de ser el elemento neutro en el producto de ventanas de longitud VU en el dominio frecuencial.

Así pues, la función la función $F_{u,V_{VU}}^{EU}$ puede rescribirse en la forma:

$$F_{u,V_{VU}}^{EU}(u) = \sum_{k=\underline{k}}^{\bar{k}}\mathbb{I}_{VU}(k\cdot EU-u)\cdot V_{VU}(k\cdot EU-u)\cdot F_{u,\mathbb{I}_{VU}}^{EU}(k\cdot EU)\cdot d(u-k\cdot EU) \tag{2.4.32}$$

Donde ha sido definida la nueva función $F_{u,\mathbb{I}_{VU}}^{EU}$:

$$F_{u,\mathbb{I}_{VU}}^{EU}(u) \equiv \sum_{q=\underline{k}}^{\bar{k}}\mathbb{I}_{VU}(q\cdot EU-u)\cdot F(q\cdot EU)\cdot d(u-q\cdot EU) \tag{2.4.33}$$

Obsérvese que el efecto de la ventana permanece en la función $F_{u,V_{VU}}^{EU}$ dada por (2.4.32), mientras que el efecto del muestreo en ésta se encuentra incluido en la función $F_{u,\mathbb{I}_{VU}}^{EU}$, como puede apreciarse en su definición (2.4.33).

La función $F_{u,\mathbb{I}_{VU}}^{EU}$ es, por su definición, una función muestreada y de soporte acotado. Su transformada de Fourier inversa puede determinarse mediante (2.3.18), que en este caso se rescribe, teniendo en cuenta el valor de la ventana $\mathbb{I}_{VU}$ dado por (2.3.12), en la forma expresada en (2.4.28).

Por otra parte, es posible expandir la función $F_{u,\mathbb{I}_{VU}}^{EU}$ en una serie de Fourier en el intervalo $(u, VU+u)$ mediante (2.1.14), que en este caso se rescribe, teniendo en cuenta las relaciones expuestas en la Tabla 2–4–1, en la forma:

$$F_{u,\mathbb{I}_{VU}}^{EU}(u) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\Phi_m\cdot e^{-ium\frac{2p}{VU}}, \qquad \forall u\in(u \quad VU+u) \tag{2.4.34}$$

Los coeficientes Φ_m vienen dados por (2.1.16), que en este caso se rescribe, teniendo en cuenta las relaciones expuestas en la Tabla 2–4–1, en la forma:

$$\Phi_m = \frac{1}{PE}\sum_{k=\underline{k}}^{\overline{k}} F_{u,\mathrm{I}_{VU}}^{EU}\left(k\cdot EU\right)\cdot e^{i\,k\cdot E\,U\cdot m\frac{2p}{VU}} \tag{2.4.35}$$

Sustituyendo en esta expresión el valor de $F_{u,\mathrm{I}_{VU}}^{EU}$ dado por (2.4.33), ésta se rescribe en la forma:

$$\Phi_m = \frac{1}{PE}\sum_{k=\underline{k}}^{\overline{k}} \mathbb{I}_{VU}\left(k\cdot EU-u\right)\cdot F\left(k\cdot EU\right)\cdot e^{i\,k\cdot E\,U\cdot m\frac{2p}{VU}} \tag{2.4.36}$$

Comparando (2.4.28) y (2.4.36), teniendo en cuenta las relaciones expuestas en la Tabla 2-4–1, se concluye que:

$$\Phi_m = EU\cdot\left(f_{u,\mathrm{I}_{VU}}^{EU}\right)_{c,\mathrm{I}_{VX}}^{\frac{2p}{VU}}\left(m\frac{2p}{VU}\right)$$

$$\forall m\in\left\{\underline{n}\quad \underline{n}+1\quad\cdots\quad \overline{n}-1\quad \overline{n}\right\} \tag{2.4.37}$$

De tal forma que, sustituyendo (2.4.37) en (2.4.34), la suma:

$$F_p\left(u\right) = EU\cdot\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(f_{u,\mathrm{I}_{VU}}^{EU}\right)_{c,\mathrm{I}_{VX}}^{\frac{2p}{VU}}\left(m\frac{2p}{VU}\right)\cdot e^{-ium\frac{2p}{VU}} \tag{2.4.38}$$

Representa una repetición periódica de $F_{u,\mathrm{I}_{VU}}^{EU}$ a lo largo del dominio natural, y coincide en valor con ésta en el intervalo $\left(u, VU+u\right)$.

Así pues, es posible expresar la función $F_{u,V_{VU}}^{EU}$ dada por (2.4.32), teniendo en cuenta esta consideración y sustituyendo el valor de F_p dado por (2.4.38), en la forma:

$$F_{u,V_{VU}}^{EU}\left(u\right) =$$

$$= EU\cdot\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(f_{u,\mathrm{I}_{VU}}^{EU}\right)_{c,\mathrm{I}_{VX}}^{\frac{2p}{VU}}\left(m\frac{2p}{VU}\right)\cdot$$

$$\cdot\sum_{k=\underline{k}}^{\overline{k}}\mathbb{I}_{VU}\left(k\cdot EU-u\right)\cdot V_{VU}\left(k\cdot EU-u\right)\cdot e^{-i\,k\cdot E\,U\cdot m\frac{2p}{VU}}\cdot d\left(u-k\cdot EU\right) \tag{2.4.39}$$

$$\forall u\in\left(u\quad VU+u\right)$$

Si se define, para cada valor del índice m, la nueva ventana desplazada dada por la función:

$$\overset{m}{\hat{V}}\left(u\,|\,u,VU\right)\equiv V_{VU}\left(u-u\right)\cdot e^{-ium\frac{2p}{VU}} \tag{2.4.40}$$

Esta última expresión puede rescribirse en la forma:

$$F^{EU}_{u,V_{VU}}(u) =$$
$$= EU \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(f^{EU}_{u,\mathbb{I}_{VU}} \right)^{\frac{2p}{VU}}_{c,\mathbb{I}_{VX}} \left(m\frac{2p}{VU} \right) \cdot \sum_{k=\underline{k}}^{\bar{k}} \mathbb{I}_{VU}\left(k \cdot EU - u\right) \cdot \overset{m}{\hat{V}}\left(k \cdot EU \,|\, u, VU\right) \cdot d\left(u - k \cdot EU\right)$$

$$\forall u \in \left(u \quad VU + u\right)$$

(2.4.41)

La función $F^{EU}_{u,V_{VU}}$ dada por (2.4.41) es suma (en m) de funciones muestreadas de soporte acotado, a cada una de las cuales le es aplicable idénticamente el desarrollo expuesto en §2.3.2. La transformada de Fourier inversa de cada elemento en esta expresión vendrá dada pues, comparando (2.4.41) con (2.2.9), por una expresión análoga a (2.3.17), que en este caso se rescribe en la forma:

$$\left(\overset{m}{\hat{v}}{}^{EU}_{u,\mathbb{I}_{VU}} \right)\left(x \,|\, u, VU\right) \equiv$$
$$\equiv TF^{-1}\left[\sum_{k=\underline{k}}^{\bar{k}} \mathbb{I}_{VU}\left(k \cdot EU - u\right) \cdot \overset{m}{\hat{V}}\left(k \cdot EU \,|\, u, VU\right) \cdot d\left(u - k \cdot EU\right) \right]\left(x\right) =$$
$$= \frac{1}{VU} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{n=\underline{n}}^{\bar{n}} \mathbb{I}_{VU}\left(k \cdot EU - u\right) \cdot \overset{m}{\hat{V}}\left(k \cdot EU \,|\, u, VU\right) \cdot e^{ik \cdot EU \cdot n \frac{2p}{VU}} \right) \cdot d\left(x - n\frac{2p}{VU} \right)$$

(2.4.42)

Es posible rescribir esta expresión, teniendo en cuenta el valor de la ventana $\mathbb{I}_{VU}$ dado por (2.3.12) y sustituyendo la función $\overset{m}{\hat{V}}$ por su valor dado por (2.4.40), obteniéndose la expresión (2.4.29).

Teniendo en cuenta estas consideraciones, la transformada de Fourier de (2.4.41) vendrá dada por (2.4.30).

¦

Obsérvese que los valores $\left(f^{EU}_{u,\mathbb{I}_{VU}} \right)^{\frac{2p}{VU}}_{c,\mathbb{I}_{VX}}$ dados por (2.4.28) son, como se mencionó en §2.3.2, $1/EU$ veces los coeficientes de la serie de Fourier de $F^{EU}_{u,\mathbb{I}_{VU}}$ dada por (2.3.35), con la ventana $\mathbb{I}_{VU}$.

La extensión del índice del sumatorio en (2.4.30) para todo $m \in \mathbb{Z}$ hace referencia a la periodicidad de esta transformada de Fourier inversa, tal como se discutió en §2.3.2. Esta extensión infinita del índice no es operativa computacionalmente, por lo que en lugar de (2.4.30) se emplea la expresión acotada:

$$\left(f^{*EU}_{u,V_{VU}} \right)\left(x\right) = EU \cdot \sum_{m=\underline{n}}^{\bar{n}} \left(f^{EU}_{u,\mathbb{I}_{VU}} \right)^{\frac{2p}{VU}}_{c,\mathbb{I}_{VX}} \left(m\frac{2p}{VU} \right) \cdot \left(\overset{m}{\hat{v}}{}^{EU}_{u,\mathbb{I}_{VU}} \right)\left(x \,|\, u, VU\right) \qquad (2.4.43)$$

Donde el índice m se extiende únicamente a los PE valores independientes que se calculan de la transformada $\left(f_{u,1_{VU}}^{EU} \right)_{c,1_{VX}}^{\frac{2p}{VU}}$.

Es importante señalar que no será posible expresar las funciones $\left(\hat{v}_{u,1_{VU}}^{m^{EU}} \right)$ dadas por (2.4.29) como transformadas de Fourier inversas de ninguna otra función en forma genérica, pues se evaluarán en puntos $x = nEX'$ tales que el nuevo espaciado en el dominio natural EX' no será conjugado del espaciado en el dominio frecuencial EU, y no se cumplirán las relaciones expuestas en la Tabla 2–4–1.

Obsérvese que, en el caso particular en que la ventana inicial V_{VU} fuera un pulso cuadrado 1_{VU}, (2.4.31) se rescribiría en forma trivial:

$$1_{VU}(u) = 1_{VU}(u) \cdot 1_{VU}(u) \cdot 1_{VU}(u) \tag{2.4.44}$$

Y el resultado expuesto en (2.4.30) se reduciría a la fórmula de interpolación a la que conduce el Teorema de Muestreo tradicional, equivalente a (2.4.1), donde la transformada de Fourier inversa de la ventana sería un miembro de la familia de los senos cardinales.

Estos resultados se ejemplifican en las figuras 2–4–5 y 2–4–6:

Figura 2–4-5: Interpolación en la transformada de Fourier inversa (I), correspondiente al ejemplo I mostrado en §2.2 y §2.3.1:

(a) Valores de $\left(\left(f^{*0,05}_{0,025;\,h_8}\right)^{p/4}_{p/8;\,\mathrm{I}_{40p}}\right)^{0,05}_{0,025;\,\mathrm{I}_8}$. *(Cf. Figura 2–3–3 (c)).*

(b–k) Transformadas de las ventanas desplazadas $\left(\hat{\mathbb{1}}^{m\,p/4}_{p/8;\,\mathrm{I}_{40p}}\right)(x\,|\,p/8,40p)$ *para algunos valores de* m.

(l) Detalle de la transformada de la ventana desplazada con $m=64$.

(m), (n) Transformada de Fourier $\left(\left(f^{*0,05}_{0,025;\,h_8}\right)^{p/4}_{p/8;\,\mathrm{I}_{40p}}\right)^{0,05}_{0,025;\,\mathrm{I}_8}$ *(puntos) y transformada de Fourier inversa para interpolar* $\left(\left(f^{*0,05}_{0,025;\,h_8}\right)^{p/4}_{p/8;\,\mathrm{I}_{40p}}\right)(x)$ *(líneas), y detalle.*

En todos los casos se representa en azul la parte real, en rojo la parte imaginaria.

Figura 2–4-6: Interpolación en la transformada de Fourier inversa (I), correspondiente al ejemplo II mostrado en §2.2 y §2.3.1:

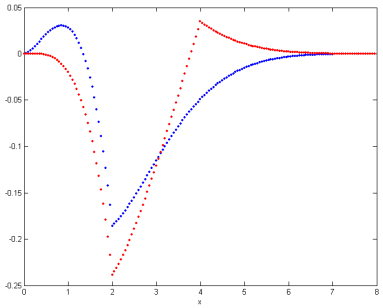
(a) Valores de $\left(\left(g^{*0,05}_{0,025;\,h_8}\right)^{p/4}_{p/8;\,\mathrm{I}_{40p}}\right)^{0,05}_{0,025;\,\mathrm{I}_8}$. *(Cf. Figura 2–3–3 (c)).*

(b–k) Transformadas de las ventanas desplazadas $\left(\hat{\mathbb{1}}^{m\,p/4}_{p/8;\,\mathrm{I}_{40p}}\right)(x\,|\,p/8,40p)$ *para algunos valores de* m.

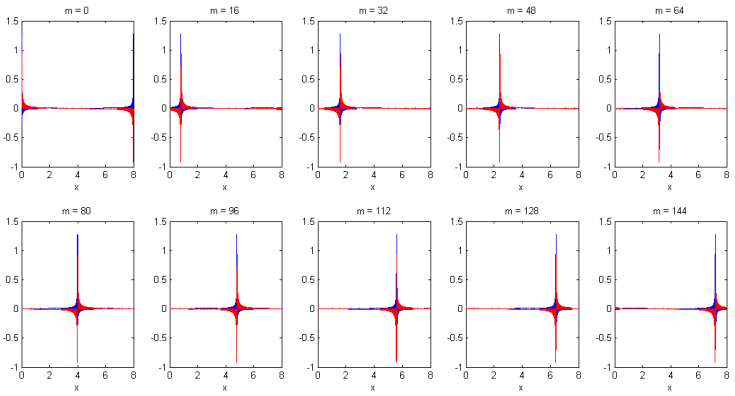
(l) Detalle de la transformada de la ventana desplazada con $m=64$.

(m), (n) Transformada de Fourier $\left(\left(g^{*0,05}_{0,025;\,h_8}\right)^{p/4}_{p/8;\,\mathrm{I}_{40p}}\right)^{0,05}_{0,025;\,\mathrm{I}_8}$ *(puntos) y transformada de Fourier inversa para interpolar* $\left(\left(g^{*0,05}_{0,025;\,h_8}\right)^{p/4}_{p/8;\,\mathrm{I}_{40p}}\right)(x)$ *(líneas), y detalle.*

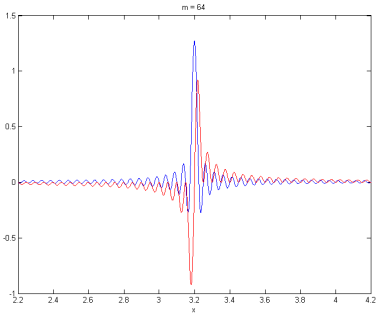
En todos los casos se representa en azul la parte real, en rojo la parte imaginaria.



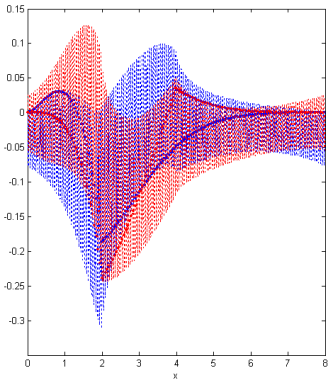
(a)



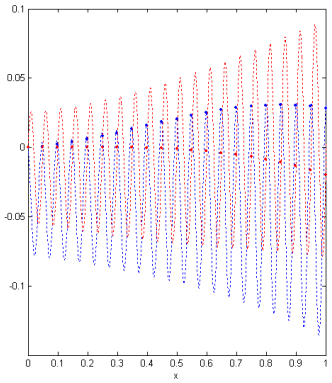
(c–l)



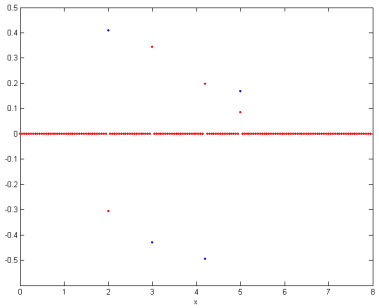
(m)



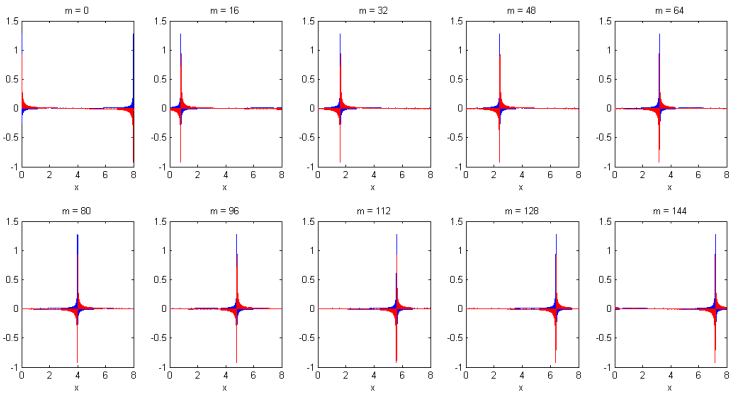
(n)



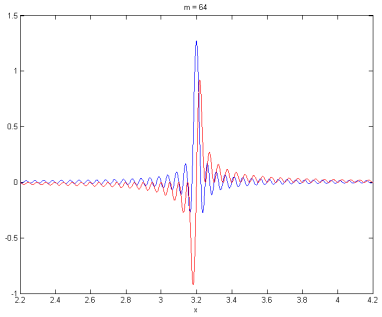
(ñ)



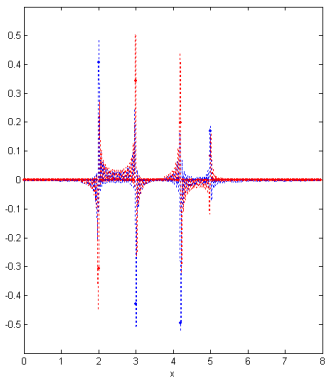
(a)



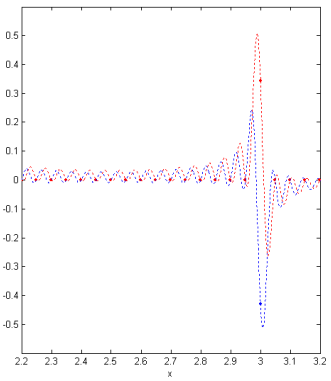
(c–l)



(m)



(n)



(ñ)

2.4.2.2. Interpolación en la transformada inversa

? **DEFINICIÓN (TRANSFORMADA INVERSA INTERPOLADA).** Dada una función muestreada con soporte acotado $F_{u,V_{VU}}^{EU}$ definida en el dominio frecuencial, dada por (2.3.20), se define la nueva función $\left(f_{u,V_{VU}}^{EU}\right)_{c',1_{VX'}}^{EX'}$ resultado de la interpolación en la transformada de Fourier $\left(f_{u,V_{VU}}^{EU}\right)_{c,1_{VX}}^{EX}$ mediante la expresión:

$$\left(f_{u,V_{VU}}^{EU}\right)_{c',1_{VX'}}^{EX'}(x) \equiv \mathbb{1}_{VX'}(x-c')\cdot\left(f_{u,V_{VU}}^{EU}\right)(x)\cdot\Delta^{EX'}(x) \tag{2.4.45}$$

Esta expresión se rescribe, sustituyendo el valor de $\mathbb{1}_{VX'}$ dado por (2.3.31), el valor de $\left(f_{u,V_{VU}}^{EU}\right)(x)$ dado por (2.4.30) y el valor de $\Delta^{EU'}(u)$ dado por una expresión análoga a (2.2.1), en la forma:

$$\left(f_{u,V_{VU}}^{EU}\right)_{c',1_{VX'}}^{EX'}(x) =$$
$$= EU\cdot\sum_{n=\underline{n}}^{\overline{n}}\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(f_{u,1_{VU}}^{EU}\right)^{\frac{2p}{VU}}\left(m\frac{2p}{VU}\right)\cdot\left(\hat{v}_{u,1_{VU}}^{m^{EU}}\right)_{c',1_{VX'}}^{EX'}(n\cdot EX'|u,VU)\right)\cdot d(x-n\cdot EX') \tag{2.4.46}$$

De tal forma que la función $\left(f_{u,V_{VU}}^{EU}\right)_{c',1_{VX'}}^{EX'}$ viene representada por los valores:

$$\left(f_{u,V_{VU}}^{EU}\right)_{c',1_{VX'}}^{EX'}(n\cdot EX') = EU\cdot\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(f_{u,1_{VU}}^{EU}\right)^{\frac{2p}{VU}}\left(m\frac{2p}{VU}\right)\cdot\left(\hat{v}_{u,1_{VU}}^{m^{EU}}\right)_{c',1_{VX'}}^{EX'}(n\cdot EX'|u,VU)$$

$$\forall n\in\{\underline{n}\quad \underline{n}+1\quad\cdots\quad\overline{n}-1\quad\overline{n}\} \tag{2.4.47}$$

Donde el conjunto de índices $\{\underline{n}\quad \underline{n}+1\quad\cdots\quad\overline{n}-1\quad\overline{n}\}$ cumple la condición:

$$n\cdot EX'\in(c'\quad VX'+c'),\qquad \forall n\in\{\underline{n}\quad \underline{n}+1\quad\cdots\quad\overline{n}-1\quad\overline{n}\} \tag{2.4.48}$$

?

Atendiendo a la consideración efectuada en el Epígrafe anterior acerca de la extensión del índice del sumatorio para todo $m\in\mathbb{Z}$, en lugar de (2.4.47) se emplea la expresión acotada:

$$\left(f^{*EU}_{u,V_{VU}}\right)^{EX'}_{c',1_{VX'}}\left(n\cdot EX'\right)=EU\cdot\sum_{m=\underline{n}}^{\overline{n}}\left(f^{EU}_{u,1_{VU}}\right)^{\frac{2p}{VU}}_{c,1_{VX}}\left(m\frac{2p}{VU}\right)\cdot\left(\hat{v}^{m\,EU}_{u,1_{VU}}\right)^{EX'}_{c',1_{VX'}}\left(n\cdot EX'\,|\,u,VU\right)$$

$$\forall n\in\left\{\underline{n}\quad\underline{n}+1\quad\cdots\quad\overline{n}-1\quad\overline{n}\right\}$$

(2.4.49)

Donde el conjunto de índices $\left\{\underline{n}\quad\underline{n}+1\quad\cdots\quad\overline{n}-1\quad\overline{n}\right\}$ cumple la condición (2.4.48).

En los casos que se está interesado en la interpolación de PE valores en la región del dominio espacial más próxima al origen, desde $x=0$ hasta $x=\left(PE-1\right)\cdot EX'$, se elegirá $c'=-\frac{EX'}{2}$. En los casos en que se está interesado en la interpolación de PE valores en la región del dominio espacial más alejada del origen, desde $x=\left(PE-1\right)\left(EX-EX'\right)$ hasta $x=\left(PE-1\right)\cdot EX$, se elegirá $c'=\left(PE-1\right)\left(EX-EX'\right)-\frac{EX'}{2}$. En ambos casos se elegirá $VX'=PE\cdot EX'$, de tal forma que $LX'=\left(PE-1\right)\cdot EX'$, $\underline{n}=0$ y $\overline{n}=PE-1$.

Es importante señalar que, como es de esperar, la función $\left(f^{EU}_{u,V_{VU}}\right)\left(x\right)$ dada por (2.4.30) toma los valores $\left(f^{EU}_{u,V_{VU}}\right)^{EX}_{c,1_{VX}}\left(n\cdot EX\right)$ en los puntos $x=n\cdot EX$, dados por la transformada de Fourier expresada en (2.3.18).

DEMOSTRACIÓN. Para comprobar esta afirmación, se evalúa (2.4.47) en los puntos de la forma $x=n\cdot EX$, sustituyéndose explícitamente los valores $\left(f^{EU}_{u,1_{VU}}\right)^{\frac{2p}{VU}}_{c,1_{VX}}$ dados por (2.4.28) y los valores $\left(\hat{v}^{m\,EU}_{u,1_{VU}}\right)$ dados por (2.4.29), teniendo en cuenta las relaciones expuestas en la Tabla 2–4–1:

$$\left(f^{EU}_{u,V_{VU}}\right)^{EX}_{c,1_{VX}}\left(n\cdot EX\right)=$$
$$=\frac{1}{VU}\frac{1}{PE}\sum_{k=\underline{k}}^{\overline{k}}\mathbb{I}_{VU}\left(k\cdot EU-u\right)\cdot F\left(k\cdot EU\right)\cdot$$
$$\cdot\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{q=\underline{k}}^{\overline{k}}V_{VU}\left(q\cdot EU-u\right)e^{i\,q\,EU\cdot n\cdot EX}\;e^{ik\cdot EU\cdot m\cdot EX}\;e^{-i\,q\,EU\cdot m\cdot EX}\tag{2.4.50}$$

$$\forall n\in\left\{\underline{n}\quad\underline{n}+1\quad\cdots\quad\overline{n}-1\quad\overline{n}\right\}$$

Es posible rescribir esta expresión, sustituyendo la ventana $\mathbb{I}_{VU}$ por su valor dado en (2.3.12), en la forma:

$$\left(f_{u,V_{VU}}^{EU} \right)_{c,1_{VX}}^{EX} (nEX) =$$
$$= \frac{1}{VU} \frac{1}{PE} \sum_{k=\underline{k}}^{\bar{k}} F(k \cdot EU) \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{q=\underline{k}}^{\bar{k}} V_{VU}(q \cdot EU - u) \cdot e^{iq \cdot EU \cdot nEX} \cdot e^{ik \cdot EU \cdot mEX} \cdot e^{-iq \cdot EU \cdot mEX}$$

$$\forall n \in \{\underline{n} \quad \underline{n}+1 \quad \cdots \quad \bar{n}-1 \quad \bar{n}\} \tag{2.4.51}$$

Es posible rescribir la discretización del Teorema Integral de Fourier (2.1.20), teniendo en cuenta las relaciones expuestas en la Tabla 2–4–1, en la forma:

$$G(k \cdot EU) = \frac{1}{PE} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{q=\underline{k}}^{\bar{k}} G(q \cdot EU) \cdot e^{iq \cdot EU \cdot mEX} \cdot e^{-ik \cdot EU \cdot mEX} \tag{2.4.52}$$

Así pues, tomando $G(q \cdot EU) = V_{VU}(q \cdot EU - u) \cdot e^{iq \cdot EU \cdot nEX}$ en (2.4.50), aplicando la expresión anterior se obtiene, teniendo en cuenta las relaciones expuestas en la Tabla 2–4–1:

$$\left(f_{u,V_{VU}}^{EU} \right)_{c,1_{VX}}^{\frac{2p}{VU}} \left(n \frac{2p}{VU} \right) = \frac{1}{VU} \sum_{k=\underline{k}}^{\bar{k}} V_{VU}(k \cdot EU - u) \cdot F(k \cdot EU) \cdot e^{ik \cdot EU \cdot n \frac{2p}{VU}} \tag{2.4.53}$$

$$\forall n \in \{\underline{n} \quad \underline{n}+1 \quad \cdots \quad \bar{n}-1 \quad \bar{n}\}$$

Obsérvese que esta expresión conduce a los mismos valores que la transformada de Fourier $\left(f_{u,V_{VU}}^{EU} \right)_{c,1_{VX}}^{EX}$ dada por (2.3.18), como se quería comprobar.

¦

Estos resultados se ejemplifican en las figuras 2–4–7 y 2–4–8:

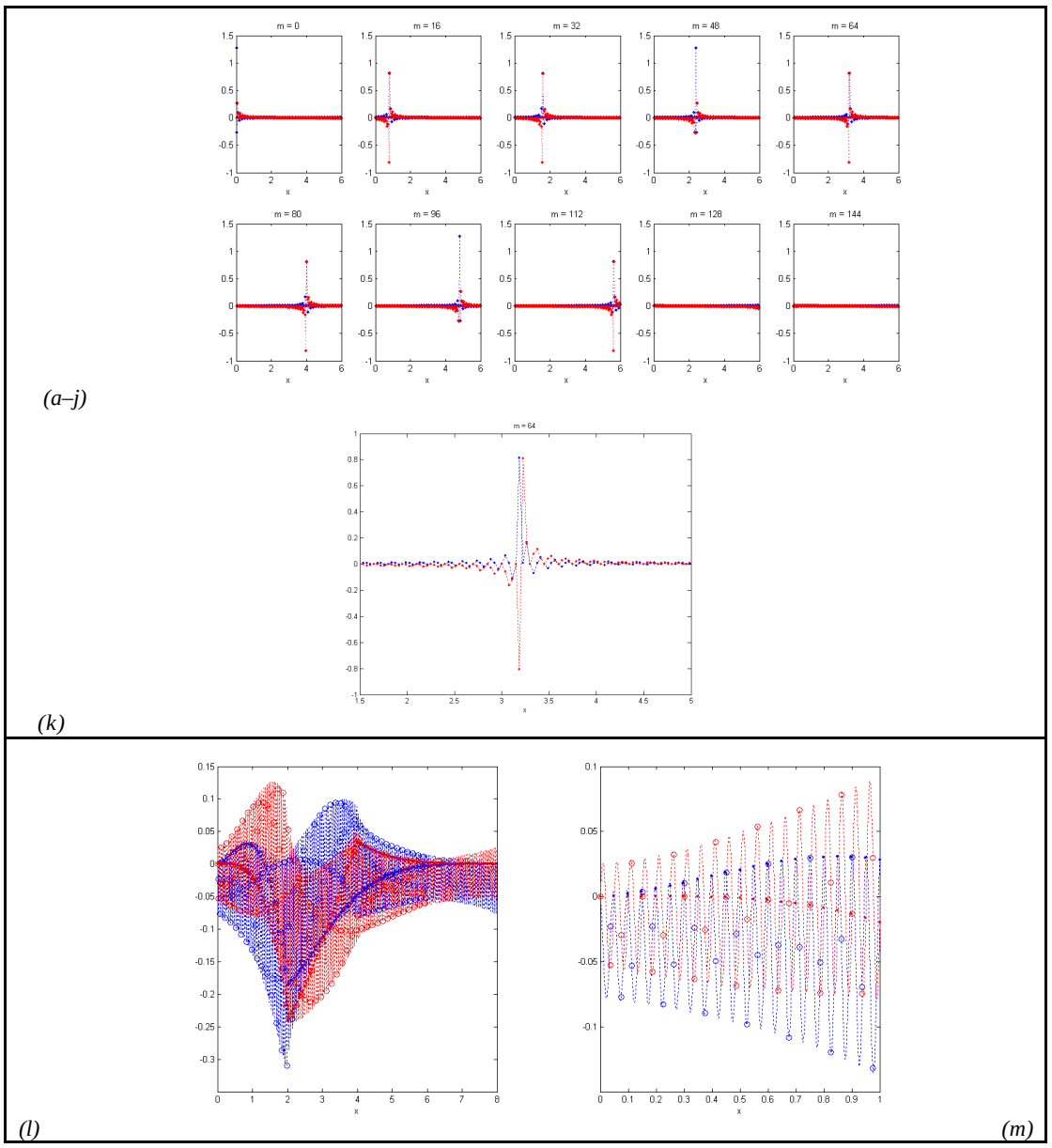


Figura 2–4-7: Interpolación en la transformada de Fourier inversa (y II), correspondiente al ejemplo I mostrado en §2.2 y §2.3.1:

(a–j) Transformadas de las ventanas desplazadas $\left(\overset{m_{p/4}}{\hat{\mathbb{1}}}_{p/8;\,\mathrm{I}_{40p}}\right)\left(n\frac{3}{80}\,|\,p/8,40p\right)$ *para algunos valores de* m.

(k) Detalle de la transformada de la ventana desplazada con $m=64$.

(l), (m) Transformada de Fourier inversa $\left(\left(f^{*0,05}_{0,025;\,h_8}\right)^{p/4}_{p/8;\,\mathrm{I}_{40p}}\right)^{0,05}_{0,025;\,\mathrm{I}_8}$ *(puntos), transformada para interpolar* $\left(\left(f^{*0,05}_{0,025;\,h_8}\right)^{p/4}_{p/8;\,\mathrm{I}_{40p}}\right)(x)$ *(líneas) y transformada interpolada* $\left(\left(f^{*0,05}_{0,025;\,h_8}\right)^{p/4}_{p/8;\,\mathrm{I}_{40p}}\right)^{\frac{3}{4}0,05}_{\frac{3}{4}0,025;\,\mathrm{I}_{\frac{3}{4}8}}$*, y detalle.*

En todos los casos se representa en azul la parte real, en rojo la parte imaginaria. Las líneas punteadas se incluyen para facilitar la observación de las tendencias.

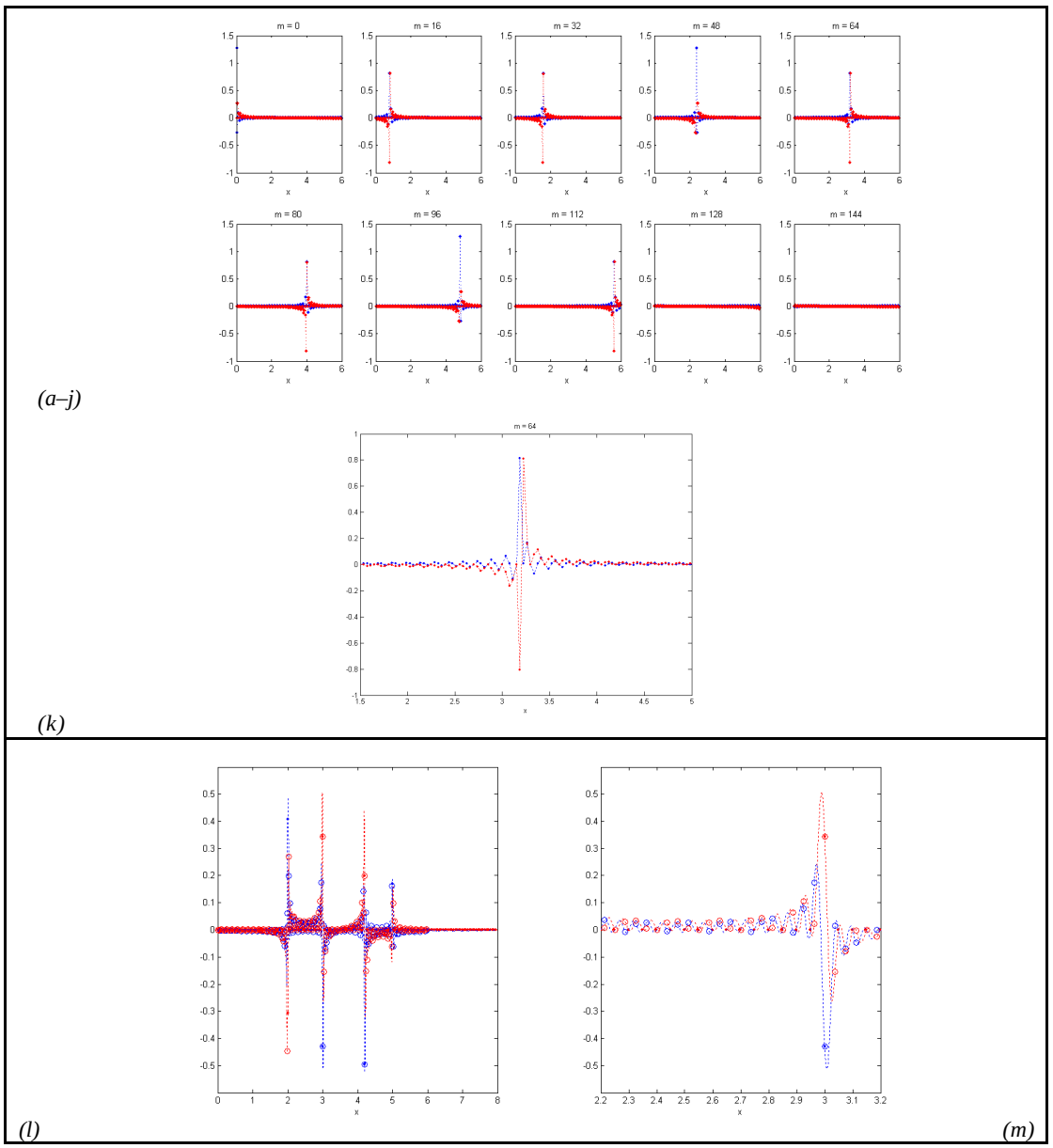


Figura 2–4-8: Interpolación en la transformada de Fourier inversa (y II), correspondiente al ejemplo II mostrado en §2.2 y §2.3.1:

(a–j) Transformadas de las ventanas desplazadas $\left(\hat{\mathbb{1}}^{m\,p/4}_{p/8;\,\mathrm{I}_{40p}}\right)\left(n\frac{3}{80}\,|\,p/8,40p\right)$ *para algunos valores de* m.

(k) Detalle de la transformada de la ventana desplazada con $m=64$.

(l), (m) Transformada de Fourier inversa $\left(\left(g^{*0,05}_{0,025;\,h_8}\right)^{p/4}_{p/8;\,\mathrm{I}_{40p}}\right)^{0,05}_{0,025;\,\mathrm{I}_8}$ *(puntos), transformada para interpolar* $\left(\left(g^{*0,05}_{0,025;\,h_8}\right)^{p/4}_{p/8;\,\mathrm{I}_{40p}}\right)(x)$ *(líneas) y transformada interpolada* $\left(\left(g^{*0,05}_{0,025;\,h_8}\right)^{p/4}_{p/8;\,\mathrm{I}_{40p}}\right)^{\frac{3}{4}0,05}_{\frac{3}{4}0,025;\,\mathrm{I}_{\frac{3}{4}8}}$*, y detalle.*

En todos los casos se representa en azul la parte real, en rojo la parte imaginaria. Las líneas punteadas se incluyen para facilitar la observación de las tendencias.

2.5. Relaciones entre las transformadas directa e inversa y la función original

En los casos que se tratan en este trabajo, se emplean funciones muestreadas con soporte acotado representadas por los valores $f^{EX}_{c,v_{VX}}$ dados en (2.2.10), y se calcula su transformada de Fourier, representada por los valores $\left(F^{EX}_{c,v_{VX}}\right)^{EU}_{u,1_{VU}}$ dados en (2.3.2), tal como se expuso en §2.3.1.

Para recuperar nuevamente la función original tomando la transformada de Fourier inversa de su transformada directa, se ha de tener en cuenta el resultado expuesto en §2.3.2 según el cual, dada una función muestreada de soporte acotado en el dominio frecuencial representada por los valores $F^{EU}_{u,V_{VU}}$ dados en (2.3.21), se calcula su transformada de Fourier inversa, representada por los valores $\left(f^{EU}_{u,V_{VU}}\right)^{EX}_{c,1_{VX}}$ dados en (2.3.18).

En la primera Subsección, con el objeto de comprobar la consistencia de los resultados obtenidos en §2.3.1 y §2.3.2, se calcula la transformada inversa de la transformada directa de $f^{EX}_{c,v_{VX}}$ dada en (2.3.1), representada por los valores $\left(\left(f^{EX}_{c,v_{VX}}\right)^{EU}\right)^{EX}_{c,1_{VX}}$, debiendo darse la igualdad:

$$\left(\left(f^{EX}_{c,v_{VX}}\right)^{EU}\right)^{EX}_{c,1_{VX}}(n\cdot EX) = f^{EX}_{c,v_{VX}}(n\cdot EX)$$

$$\forall n \in \{\underline{n} \quad \underline{n}+1 \quad \cdots \quad \overline{n}-1 \quad \overline{n}\} \tag{2.5.1}$$

Así mismo, se pretende hallar una relación entre la función original $f(x)$ y los valores $\left(\left(f^{EX}_{c,v_{VX}}\right)^{EU}\right)^{EX}_{c,1_{VX}}$.

En la siguiente Subsección, con el objeto de comprobar la consistencia de los resultados obtenidos en §2.4.1, se estudia el resultado de considerar la transformada inversa de la transformada interpolada $\left(F^{EX}_{c,v_{VX}}\right)^{EU'}$ dada por la evaluación de (2.4.4) en los puntos de la forma $u = k\cdot EU'$ con k entero, representada por los valores $\left(\left(f^{EX}_{c,v_{VX}}\right)^{EU'}\right)^{EX'}_{c',1_{VX'}}$, determinados mediante una expresión análoga a (2.3.18), debiendo darse una igualdad análoga a (2.5.1).

Así mismo, se pretende hallar una relación entre la función original $f(x)$ y los valores de la transformada inversa de la transformada interpolada. Obsérvese que, dado que la interpolación modifica el espaciado y la longitud de la ventana en el dominio frecuencial, la transformada

inversa estará representada por valores en puntos $x = n\text{Ł}X'$ no coincidentes con los puntos $x = n\text{Ł}X$ donde se define la función original muestreada con soporte acotado.

En la última Subsección, con el objeto de comprobar la consistencia de los resultados obtenidos en §2.4.2, se estudia el resultado de considerar la interpolación de la transformada inversa de la transformada interpolada $\left(f_{c,v_{VX}}^{EX} \right)_{u',1_{VU'}}^{EU'}$ dada por (2.4.23), representada por los valores $\left(\left(f_{c,v_{VX}}^{EX} \right)_{u',1_{VU'}}^{EU'} \right)_{c,1_{VX}}^{EX}$, determinados mediante (2.4.47), debiendo darse una igualdad análoga a (2.5.1).

Así mismo, se pretende hallar una relación entre la función original $f(x)$ y los valores de la transformada inversa de la transformada interpolada. Obsérvese que esta nueva interpolación en el dominio natural permite obtener los valores de la transformada inversa en los puntos originales $x = n\text{Ł}X$ donde se define la función original muestreada con soporte acotado.

2.5.1. Relación entre la transformada inversa de la transformada directa y la función original

? **PROPOSICIÓN (RELACIÓN ENTRE LA TRANSFORMADA INVERSA DE LA TRANSFORMADA DIRECTA Y LA FUNCIÓN ORIGINAL).** La relación entre una función muestreada soporte acotado representada por los valores $f_{c,v_{VX}}^{EX}$ dados en (2.2.10), y la transformada inversa de su transformada directa $\left(F_{c,v_{VX}}^{EX} \right)^{\frac{2p}{VX}}$ dada en (2.3.1), representada por los valores $\left(\left(f_{c,v_{VX}}^{EX} \right)^{EU} \right)_{c,1_{VX}}^{EX}$, viene dada por la expresión:

$$f_{c,v_{VX}}^{EX}(n\text{Ł}X) = \left(\left(f_{c,v_{VX}}^{EX} \right)^{EU} \right)_{c,1_{VX}}^{EX}(n\cdot EX)$$

$$\forall n \in \{\underline{n} \quad \underline{n}+1 \quad \cdots \quad \overline{n}-1 \quad \overline{n}\} \tag{2.5.1}$$

La relación entre la función original muestreada representada por los valores f^{EX} dados en (2.2.4), y la transformada inversa de su transformada directa, viene dada por la expresión:

$$f^{EX}(n\cdot EX) = \left(\left(f_{c,v_{VX}}^{EX} \right)^{EU} \right)_{c,1_{VX}}^{EX}(n\text{Ł}X) \Big/ v_{VX}(m\text{Ł}X - c)$$

$$\forall n \in \{\underline{n} \quad \underline{n}+1 \quad \cdots \quad \overline{n}-1 \quad \overline{n}\} \tag{2.5.2}$$

?

¦ **DEMOSTRACIÓN.** La transformada inversa de la función $\left(F_{c,v_{VX}}^{EX}\right)^{\frac{2p}{VX}}$ dada por (2.3.1) y representada por la repetición cíclica los valores dados por:

$$\left(F_{c,v_{VX}}^{EX}\right)^{\frac{2p}{VX}}\left(k\frac{2p}{VX}\right)=\frac{2p}{VX}\sum_{n=\underline{n}}^{\overline{n}}v_{VX}\left(n\cdot EX-c\right)\cdot f\left(n\cdot EX\right)\cdot e^{-ik\frac{2p}{VX}n\cdot EX} \tag{2.5.3}$$

$$\forall k\in\mathbb{Z}$$

Se determina mediante (2.3.17), y está representada por la repetición cíclica de los valores expuestos en (2.3.18), que en este caso se rescribe, comparando (2.3.21) con (2.5.3), teniendo en cuenta las relaciones expuestas en la Tabla 2–4–1, en la forma:

$$\left(\left(f_{c,v_{VX}}^{EX}\right)^{EU}\right)_{c,1_{VX}}^{EX}\left(n\cdot EX\right)=$$

$$=\frac{1}{PE}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{m=\underline{n}}^{\overline{n}}v_{VX}\left(m\cdot EX-c\right)\cdot f\left(m\cdot EX\right)\cdot e^{-ik\cdot EU\cdot m\cdot EX}\cdot e^{ik\cdot EU\cdot n\cdot EX} \tag{2.5.4}$$

$$\forall n\in\left\{\underline{n}\quad \underline{n}+1\quad\cdots\quad\overline{n}-1\quad\overline{n}\right\}$$

Obsérvese que la ausencia de ventana en el dominio frecuencial en (2.3.2), indicada en el hecho de que el índice k puede tomar todos los valores enteros, no permite acotar la extensión del sumatorio correspondiente en (2.5.4).

Es posible rescribir la discretización del Teorema Integral de Fourier (2.1.18), teniendo en cuenta las relaciones expuestas en la Tabla 2–4–1, en la forma:

$$g\left(n\cdot EX\right)=\frac{1}{PE}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{m=\underline{n}}^{\overline{n}}g\left(m\cdot EX\right)\cdot e^{-ik\cdot EU\cdot m\cdot EX}\cdot e^{ik\cdot EU\cdot n\cdot EX} \tag{2.5.5}$$

Así pues, tomando $g\left(m\cdot EX\right)=v_{VX}\left(m\cdot EX-c\right)\cdot f\left(m\cdot EX\right)$ en (2.5.3), aplicando la expresión anterior y comparando el resultado con los valores de la función muestreada con soporte acotado $f_{c,v_{VX}}^{EX}$ dados en (2.2.10), se obtiene (2.5.1).

Obsérvese que los valores de la transformada inversa son $v_{VX}\left(n\cdot EX-c\right)$ veces los valores de la función original muestreada f^{EX} en los mismos puntos. Teniendo en cuenta que, para los valores de n expuestos en (2.5.1), la ventana es no nula por su propia definición(2.2.5), es posible recuperar los valores de la función original muestreada dividiendo (2.5.1) entre los valores de la ventana, obteniéndose (2.5.2).

¦

Es importante señalar que los valores de la transformada inversa $\left(\left(f_{c,v_{VX}}^{EX}\right)^{EU}\right)_{c,1_{VX}}^{EX}$ no tienen por qué coincidir con los valores $\left(\left(f_{c,v_{VX}}^{EX}\right)_{u,1_{VU}}^{EU}\right)_{c,1_{VX}}^{EX}$ que se determinarían calculando la

transformada inversa de los valores $\left(F_{c,v_{VX}}^{EX}\right)_{u,1_{VU}}^{EU}$ expuestos en (2.3.2). La acotación en el dominio frecuencial podría conducir a que no se diera una igualdad del tipo (2.5.1).

Este resultado se ejemplifica en las figuras 2–5–1 y 2–5–2:

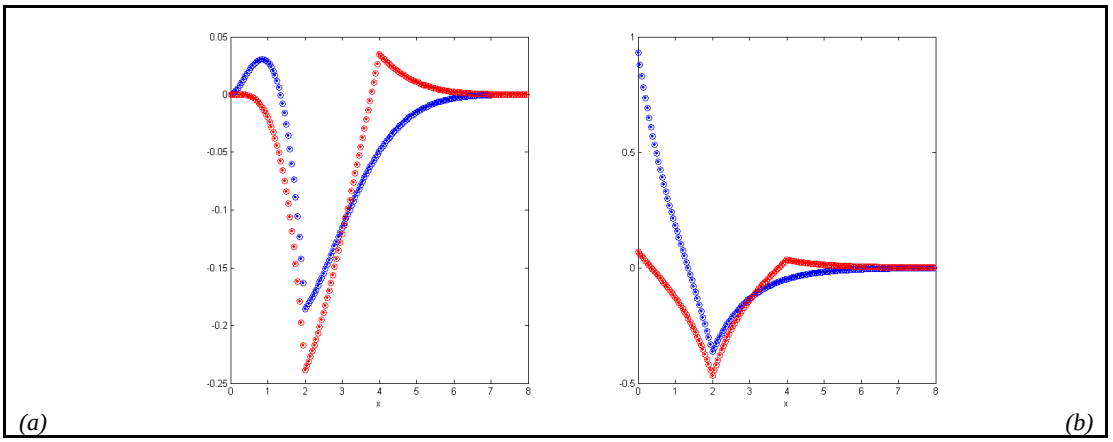


Figura 2–5-1: Relación entre la transformada inversa de la transformada directa y la función original, correspondiente al ejemplo I mostrado en §2.2:

(a) Valores de la función muestreada con soporte acotado $f^{0,05}_{0,025;\,h_8}$ *(puntos) y valores de la transformada inversa* $\left(\left(f^{*0,05}_{0,025;\,h_8}\right)^{p/4}_{p/8;\,\mathrm{I}_{40p}}\right)^{0,05}_{0,025;\,\mathrm{I}_8}$ *(círculos) en el intervalo* $(-0,025;7,975)$.

(b) Valores de la función muestreada $f^{0,05}(n\cdot 0,05)$ *(puntos) y valores de la transformada inversa corregida* $\left(\left(f^{*0,05}_{0,025;\,h_8}\right)^{p/4}_{p/8;\,\mathrm{I}_{40p}}\right)^{0,05}_{0,025;\,\mathrm{I}_8}(n\cdot 0,05)\Big/h_8(n\cdot 0,05+0,025)$ *(círculos), contenidos en el intervalo* $(-0,025;7,975)$.

En todos los casos se muestra en azul la parte real, en rojo la parte imaginaria.

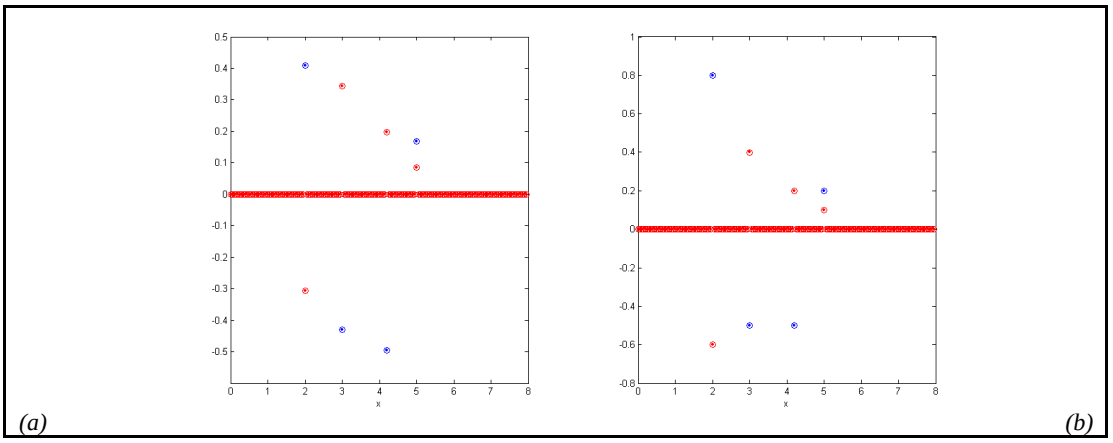


Figura 2–5-2: Relación entre la transformada inversa de la transformada directa y la función original, correspondiente al ejemplo II mostrado en §2.2:

(a) Valores de la función muestreada con soporte acotado $g^{0,05}_{0,025;\,h_8}$ *(puntos) y valores de la transformada inversa* $\left(\left(g^{*0,05}_{0,025;\,h_8}\right)^{p/4}_{p/8;\,\mathrm{I}_{40p}}\right)^{0,05}_{0,025;\,\mathrm{I}_8}$ *(círculos) en el intervalo* $(-0,025;7,975)$.

(b) Valores de la función muestreada $g^{0,05}(n\cdot 0,05)$ *(puntos) y valores de la transformada inversa corregida* $\left(\left(g^{*0,05}_{0,025;\,h_8}\right)^{p/4}_{p/8;\,\mathrm{I}_{40p}}\right)^{0,05}_{0,025;\,\mathrm{I}_8}(n\cdot 0,05)\Big/h_8(n\cdot 0,05+0,025)$ *(círculos), contenidos en el intervalo* $(-0,025;7,975)$.

En todos los casos se muestra en azul la parte real, en rojo la parte imaginaria.

2.5.2. Relación entre la transformada inversa de la transformada directa interpolada y la función original

? **PROPOSICIÓN (RELACIÓN ENTRE LA TRANSFORMADA INVERSA DE LA TRANSFO RMADA DIRECTA Y LA FUNCIÓN ORIGINAL).** La relación entre una función muestreada soporte acotado representada por los valores $f_{c,v_{VX}}^{EX}$ dados en (2.2.10), y la transformada inversa de su transformada directa interpolada $\left(F_{c,v_{VX}}^{EX}\right)^{EU'}$ dada por la evaluación de (2.4.4) en los puntos de la forma $u = k \cdot EU'$ con k entero, representada por los valores $\left(\left(f_{c,v_{VX}}^{EX}\right)^{EU'}\right)_{c',1_{VX'}}^{EX'}$, viene dada por la expresión:

$$f_{c,v_{VX}}^{EX'}(n \cdot EX') = \left(\frac{VX}{VX'}\right)^2 \left(\left(f_{c,v_{VX}}^{EX}\right)^{EU'}\right)_{c',1_{VX'}}^{EX'}(n \cdot EX')$$

$$\forall n \in \{\underline{n} \quad \underline{n}+1 \quad \cdots \quad \overline{n}-1 \quad \overline{n}\} \tag{2.5.6}$$

La relación entre la función original muestreada representada por los valores $f^{EX'}$ dados en (2.2.4), y la transformada inversa de su transformada directa, viene dada por la expresión:

$$f^{EX'}(n \cdot EX') = \left(\frac{VX}{VX'}\right)^2 \left(\left(f_{c,v_{VX}}^{EX}\right)^{EU'}\right)_{c',1_{VX'}}^{EX'}(n \cdot EX') \Big/ v_{VX}(n \cdot EX' - c)$$

$$\forall n \in \{\underline{n} \quad \underline{n}+1 \quad \cdots \quad \overline{n}-1 \quad \overline{n}\} \quad : \quad n \cdot EX' \in (c \quad VX + c) \tag{2.5.7}$$

?

¦ **DEMOSTRACIÓN.** La transformada inversa de la función $\left(F_{c,v_{VX}}^{EX}\right)^{EU'}$ representada por los valores dados por una expresión análoga a (2.4.4):

$$\left(F_{c,v_{VX}}^{EX}\right)^{EU'}(k \cdot EU') = \frac{EX}{2p} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \left(F_{c,1_{VX}}^{EX}\right)^{\frac{2p}{VX}}\left(q\frac{2p}{VX}\right) \cdot \left(\hat{V}_{c,1_{VX}}^{q\,EX}\right)^{EU'}(k \cdot EU' \mid c, VX)$$

$$\forall k \in \mathbb{Z} \tag{2.5.8}$$

Se determina por (2.3.17), y está representada por los valores expuestos en (2.3.18), que en este caso se rescribe, comparando (2.4.23) con (2.3.21), teniendo en cuenta las relaciones expuestas en la Tabla 2–4–1, en la forma:

$$\left(\left(f_{c,v_{VX}}^{EX}\right)^{EU'}\right)_{c',1_{VX'}}^{EX'}(n\cdot EX') =$$

$$= \frac{1}{VU'}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{EX}{2p}\sum_{q=-\infty}^{\infty}\left(F_{c,1_{VX}}^{EX}\right)^{\frac{2p}{VX}}\left(q\frac{2p}{VX}\right)\left(\hat{V}_{c,1_{VX}}^{q\,EX}\right)^{EU'}(k\cdot EU' \mid c, VX)\right)\cdot e^{ik\cdot EU'n\cdot EX'}$$

$$\forall n \in \{\underline{n} \quad \underline{n}+1 \quad \cdots \quad \overline{n}-1 \quad \overline{n}\}$$

(2.5.9)

Obsérvese que la ausencia de ventana en el dominio frecuencial en (2.4.23), indicada en el hecho de que el índice k puede tomar todos los valores enteros, no permite acotar la extensión del sumatorio correspondiente en (2.5.9).

Las relaciones expuestas en la Tabla 2–4–1 entre las magnitudes EX, EU, VX y VU serán las mismas existentes entre las magnitudes EX', EU', VX' y VU', pues son también provenientes de dominios conjugados.

Es posible rescribir la expresión anterior, sustituyendo $\left(F_{c,1_{VX}}^{EX}\right)_{u,1_{VU}}^{EU}$ por sus valores dados por (2.4.2) y las funciones $\left(\hat{V}_{c,1_{VX}}^{q\,EX}\right)$ por sus valores dados por (2.4.3), teniendo en cuenta las relaciones expuestas en la Tabla 2–4–1, en la forma:

$$\left(\left(f_{c,v_{VX}}^{EX}\right)^{EU'}\right)_{c',1_{VX'}}^{EX'}(n\cdot EX') =$$

$$= \frac{VX'}{VX}\frac{1}{(PE)^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{m=\underline{n}}^{\overline{n}} v_{VX}(m\cdot EX - c)\cdot e^{-ik\cdot EU'm\cdot EX}\cdot e^{ik\cdot EU'n\cdot EX'}\cdot$$

$$\cdot\sum_{q=-\infty}^{\infty}\sum_{r=\underline{n}}^{\overline{n}} \mathbb{1}_{VX}(r\cdot EX - c)\cdot f(r\cdot EX)\cdot e^{-iq\cdot EU\cdot r\cdot EX}\cdot e^{iq\cdot EU\,m\,EX} \tag{2.5.10}$$

$$\forall n \in \{\underline{n} \quad \underline{n}+1 \quad \cdots \quad \overline{n}-1 \quad \overline{n}\}$$

Sustituyendo en la expresión anterior la ventana $\mathbb{1}_{VX}$ por su valor dado por (2.3.31), ésta se rescribe en la forma:

$$\left(\left(f_{c,v_{VX}}^{EX}\right)^{EU'}\right)_{c',1_{VX'}}^{EX'}(n\cdot EX') =$$

$$= \frac{VX'}{VX}\frac{1}{(PE)^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{m=\underline{n}}^{\overline{n}} v_{VX}(m\cdot EX - c)\cdot e^{-ik\cdot EU'm\cdot EX}\cdot e^{ik\cdot EU'n\cdot EX'}\cdot$$

$$\cdot\sum_{q=-\infty}^{\infty}\sum_{r=\underline{n}}^{\overline{n}} f(r\cdot EX)\cdot e^{-iq\cdot EU\cdot r\cdot EX}\cdot e^{iq\cdot EU\cdot m\cdot EX} \tag{2.5.11}$$

$$\forall n \in \{\underline{n} \quad \underline{n}+1 \quad \cdots \quad \overline{n}-1 \quad \overline{n}\}$$

Es posible rescribir la discretización del Teorema Integral de Fourier (2.1.18), teniendo en cuenta las relaciones expuestas en la Tabla 2–4–1, en la forma:

$$g\left(m\cdot EX\right)=\frac{1}{PE}\sum_{q=-\infty}^{\infty}\sum_{r=\underline{n}}^{\overline{n}}g\left(r\cdot EX\right)\cdot e^{-iq\cdot EU\cdot r\cdot EX}\cdot e^{iq\cdot EU\cdot m\cdot EX} \tag{2.5.12}$$

Así pues, tomando $g\left(r\cdot EX\right)=f\left(r\cdot EX\right)$ en (2.5.10), aplicando la expresión anterior se obtiene:

$$\left(\left(f_{c,v_{VX}}^{EX}\right)^{EU'}\right)_{c',1_{VX'}}^{EX'}\left(n\cdot EX'\right)=$$
$$=\frac{VX'}{VX}\frac{1}{PE}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{m=\underline{n}}^{\overline{n}}v_{VX}\left(m\cdot EX-c\right)\cdot f\left(m\cdot EX\right)\cdot e^{-ik\cdot EU'\cdot m\cdot EX}\cdot e^{ik\cdot EU'\cdot n\cdot EX'} \tag{2.5.13}$$

$$\forall n\in\left\{\underline{n}\quad \underline{n}+1\quad \cdots\quad \overline{n}-1\quad \overline{n}\right\}$$

Es posible rescribir la discretización del Teorema Integral de Fourier, teniendo en cuenta las relaciones expuestas en la Tabla 2–4–1, en la forma:

$$g\left(n\cdot EX'\right)=\frac{VX}{VX'}\frac{1}{PE}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{m=\underline{n}}^{\overline{n}}g\left(m\cdot EX\right)\cdot e^{-ik\cdot EU'\cdot m\cdot EX}\cdot e^{ik\cdot EU'\cdot n\cdot EX'} \tag{2.5.14}$$

Así pues, tomando $g\left(m\cdot EX\right)=v_{VX}\left(m\cdot EX-c\right)\cdot f\left(m\cdot EX\right)$ en (2.5.13), aplicando la expresión anterior y comparando el resultado con los valores de la función muestreada con soporte acotado $f_{c,v_{VX}}^{EX'}$ dados por una expresión análoga a (2.2.10), se obtiene (2.5.6).

Obsérvese que los valores de la transformada inversa son $\left(VX'/VX\right)^2 v_{VX}\left(n\cdot EX'-c\right)$ veces los valores de la función original muestreada $f^{EX'}$ en los mismos puntos. Teniendo en cuenta que, para los valores de n expuestos en (2.5.7), la ventana es no nula por su propia definición (2.2.5), es posible recuperar los valores de la función original muestreada en el intervalo $\left(c,VX+c\right)$ dividiendo (2.5.6) entre los valores de la ventana, obteniéndose (2.5.7).

Es importante señalar que los valores de la transformada inversa $\left(\left(f_{c,v_{VX}}^{EX}\right)^{EU'}\right)_{c',1_{VX'}}^{EX'}$ no tienen por qué coincidir con los valores $\left(\left(f^{*EX}_{c,v_{VX}}\right)_{u',1_{VU'}}^{EU'}\right)_{c',1_{VX'}}^{EX'}$ que se determinarían calculando la transformada inversa de los valores $\left(f^{*EX}_{c,v_{VX}}\right)_{u',1_{VU'}}^{EU'}$ expuestos en (2.4.23). La acotación en el dominio frecuencial podría conducir a que no se diera una igualdad del tipo (2.5.6).

Este resultado se ejemplifica en las figuras 2–5–3 y 2–5–4:

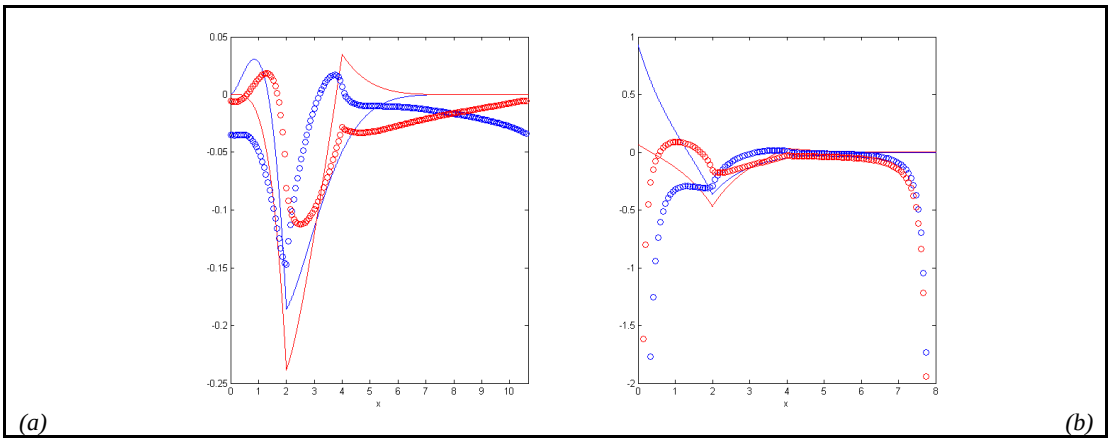


Figura 2–5-3: Relación entre la transformada inversa de la transformada directa interpolada y la función original, correspondiente al ejemplo I mostrado en §2.4.1.2:

(a) Función con soporte acotado $f_{0,025;\,h_8}(x)$ *(líneas) y valores de la transformada inversa*

$$\left(\frac{8}{32/3}\right)^2 \left(\left(f^{*0,05}_{0,025;\,h_8} \right)^{\frac{3}{4}p/4}_{\frac{3}{4}p/8;\,\mathrm{I}_{\frac{3}{4}40p}} \right)^{2/30}_{1/30;\,\mathrm{I}_{3/3}}$$

(círculos) en el intervalo $(-1/30, 319/30)$.

(b) Función $f(x)$ *(líneas) y valores de la transformada inversa corregida*

$$\left(\frac{8}{32/3}\right)^2 \left(\left(f^{*0,05}_{0,025;\,h_8} \right)^{\frac{3}{4}p/4}_{\frac{3}{4}p/8;\,\mathrm{I}_{\frac{3}{4}40p}} \right)^{2/30}_{1/30;\,\mathrm{I}_{3/3}} \left(n\frac{2}{30}\right) \Big/ h_8\left(n\frac{2}{30}+0,025\right)$$

(círculos), contenidos en el intervalo $(-0,025; 7,975)$.

En todos los casos se muestra en azul la parte real, en rojo la parte imaginaria.

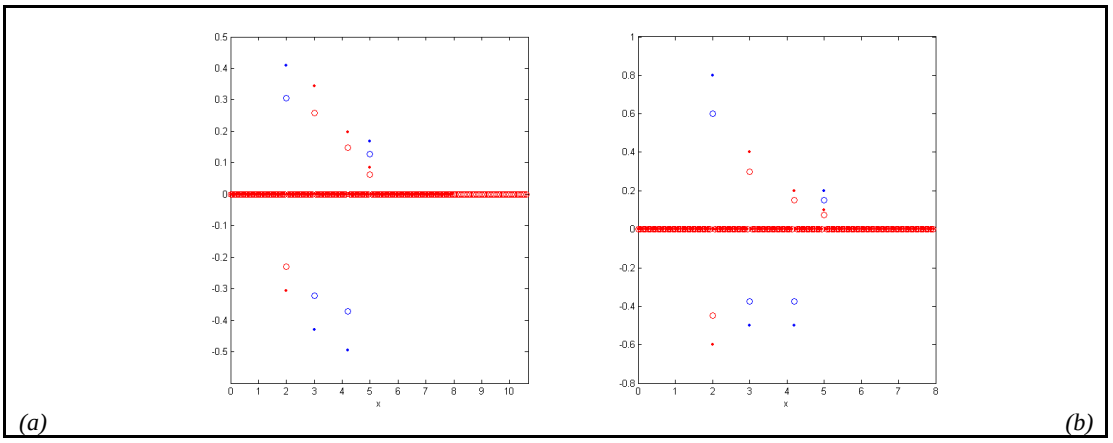


Figura 2–5-4: Relación entre la transformada inversa de la transformada directa interpolada y la función original, correspondiente al ejemplo II mostrado en §2.4.1.2 (I):

(a) Valores de la función muestreada con soporte acotado $g^{0,05}_{0,025;h_8}$ *(puntos) y valores de la transformada inversa* $\left(\frac{8}{32/3}\right)^2 \left(\left(g^{*0,05}_{0,025;h_8}\right)^{\frac{3}{4}p/4}_{\frac{3}{4}p/8;\ \mathrm{I}_{\frac{3}{4}40p}}\right)^{2/30}_{1/30;\ \mathrm{I}_{3/3}}$ *(círculos) en el intervalo* $(-1/30, 319/30)$.

(b) Valores de la función muestreada $g^{0,05}$ *(puntos) y valores de la transformada inversa corregida* $\left(\frac{8}{32/3}\right)^2 \left(\left(g^{*0,05}_{0,025;h_8}\right)^{\frac{3}{4}p/4}_{\frac{3}{4}p/8;\ \mathrm{I}_{\frac{3}{4}40p}}\right)^{2/30}_{1/30;\ \mathrm{I}_{3/3}} \left(n\frac{2}{30}\right) \Big/ h_8\left(n\frac{2}{30}+0,025\right)$ *(círculos), contenidos en el intervalo* $(-0,025;7,975)$.

En todos los casos se muestra en azul la parte real, en rojo la parte imaginaria.

En las figuras 2–5–3 (a) y 2–5–4 (a) se aprecian fuertes discrepancias entre los valores de las funciones de soporte acotado y las transformadas inversas. Estas discrepancias pueden ser debidas, como ya se adelantó, a la acotación introducida en el dominio frecuencial, así como al hecho de que las discretizaciones del Teorema Integral de Fourier expuestas en (2.1.18) y (2.1.20) no dejan de ser aproximaciones de las integrales expuestas en (2.1.7) y (2.1.11).

Estas diferencias a su vez se traducen en una fuerte discrepancia entre los valores de las funciones originales y las transformadas inversas corregidas, como se aprecia en las figuras 2-5-3 (b) y 2–5–4 (b).

En importante señalar que este efecto se produce independientemente de la ventana que se emplee para acotar la función en (2.2.6) ó (2.2.8). La elección de la ventana tiene una importancia capital en el estudio de funciones en el dominio frecuencial (en el caso que se trata en este trabajo, en la forma de efectuarse la interpolación en el dominio frecuencial), pero pierde su importancia en los casos en que se efectúan transformaciones del dominio natural al frecuencial y se retorna del frecuencial al natural.

En el caso de funciones constituidas por suma de impulsos es posible determinar, en forma empírica, una expresión equivalente a (2.5.6) que permite relacionar idénticamente la función muestreada de soporte acotado con la transformada inversa de su transformada interpolada, en la forma:

$$f_{c,v_{VX}}^{EX'}\left(n\cdot EX'\right) \simeq \left(\frac{VX}{VX'}\right)\cdot\left(\left(f_{c,v_{VX}}^{*EX}\right)_{u',1_{VU'}}^{EU'}\right)_{c',1_{VX'}}^{EX'}\left(n\cdot EX'\right)$$

(2.5.15)

$$\forall n \in \left\{\underline{n} \quad \underline{n}+1 \quad \cdots \quad \overline{n}-1 \quad \overline{n}\right\}$$

De tal forma que, atendiendo a las consideraciones anteriormente efectuadas, es posible relacionar idénticamente la función original muestreada y dicha transformada inversa mediante una expresión equivalente a (2.5.7), en la forma:

$$f^{EX'}\left(n\cdot EX'\right) \simeq \left(\frac{VX}{VX'}\right)\cdot\left(\left(f_{c,v_{VX}}^{*EX}\right)_{u',1_{VU'}}^{EU'}\right)_{c',1_{VX'}}^{EX'}\left(n\cdot EX'\right) \Big/ v_{VX}\left(n\cdot EX' - c\right)$$

(2.5.16)

$$\forall n \in \left\{\underline{n} \quad \underline{n}+1 \quad \cdots \quad \overline{n}-1 \quad \overline{n}\right\} \quad : \quad n\cdot EX' \in \left(c \quad VX + c\right)$$

Este resultado se ejemplifica en la Figura 2–5–5:

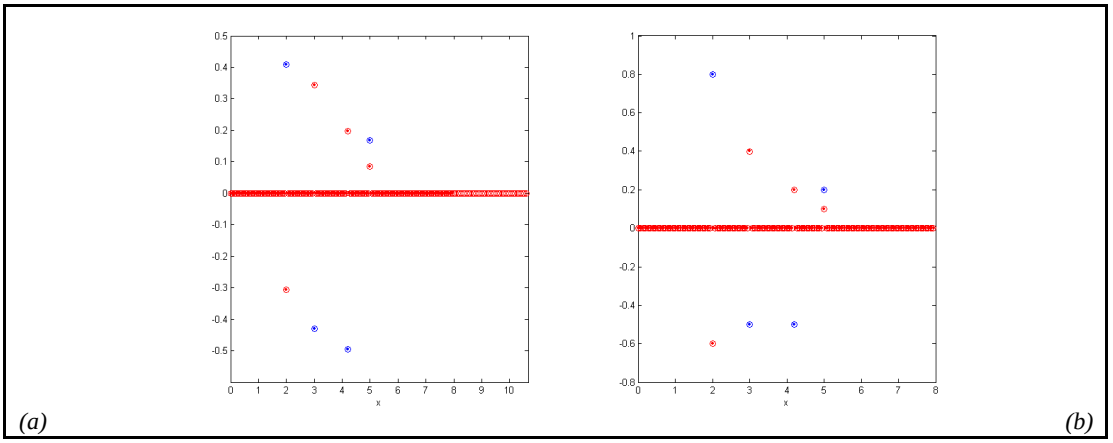


Figura 2–5-5: Relación entre la transformada inversa de la transformada directa interpolada y la función original, correspondiente al ejemplo II mostrado en §2.4.1.2 (y II):

(a) Valores de la función muestreada con soporte acotado $g^{0,05}_{0,025;h_8}$ *(puntos) y valores de la transformada inversa* $\left(\frac{8}{32/3}\right)\left(\left(g^{*0,05}_{0,025;h_8}\right)^{\frac{3}{4}p/4}_{\frac{3}{4}p/8;\, I_{\frac{3}{4}40p}}\right)^{2/30}_{-1/30;\, I_{319/3}}$ *(círculos) en el intervalo* $\left(-1/30, 319/30\right)$.

(b) Valores de la función muestreada $g^{0,05}$ *(puntos) y valores de la transformada inversa corregida* $\left(\frac{8}{32/3}\right)\left(\left(g^{*0,05}_{0,025;h_8}\right)^{\frac{3}{4}p/4}_{\frac{3}{4}p/8;\, I_{\frac{3}{4}40p}}\right)^{2/30}_{-1/30;\, I_{319/3}}\left(n\frac{2}{30}\right)\Big/h_8\left(n\frac{2}{30}+0,025\right)$ *(círculos), contenidos en el intervalo* $\left(-0,025;7,975\right)$.

En todos los casos se muestra en azul la parte real, en rojo la parte imaginaria.

2.5.3. Relación entre la interpolación de la transformada inversa de la transformada directa interpolada y la función original

? **PROPOSICIÓN (RELACIÓN ENTRE LA TRANSFORMADA INVERSA DE LA TRANSFORMADA DIRECTA Y LA FUNCIÓN ORIGINAL).** La relación entre una función muestreada soporte acotado representada por los valores $f^{EX}_{c,v_{VX}}$ dados en (2.2.10), y la interpolación de la transformada inversa de su transformada directa interpolada $\left(F^{EX}_{c,v_{VX}}\right)^{EU'}$ dada por la evaluación de (2.4.4) en los puntos de la forma $u = k \cdot EU'$ con k entero, representada por los valores $\left(\left(f^{EX}_{c,v_{VX}}\right)^{EU'}\right)^{EX}_{c,1_{VX}}$, viene dada por la expresión:

$$f^{EX}_{c,v_{VX}}(n \cdot EX) = \left(\frac{VX}{VX'}\right)^2 \left(\left(f^{EX}_{c,v_{VX}}\right)^{EU'}\right)^{EX}_{c,1_{VX}}(n \cdot EX)$$

$$\forall n \in \{\underline{n} \quad \underline{n}+1 \quad \cdots \quad \overline{n}-1 \quad \overline{n}\} \tag{2.5.17}$$

La relación entre la función original muestreada representada por los valores f^{EX} dados en (2.2.4), y la transformada inversa de su transformada directa, viene dada por la expresión:

$$f^{EX}(n \cdot EX) = \left(\frac{VX}{VX'}\right)^2 \left(\left(f^{EX}_{c,v_{VX}}\right)^{EU'}\right)^{EX}_{c,1_{VX}}(n \cdot EX) \Big/ v_{VX}(n \cdot EX - c)$$

$$\forall n \in \{\underline{n} \quad \underline{n}+1 \quad \cdots \quad \overline{n}-1 \quad \overline{n}\} \tag{2.5.18}$$

?

¦ **DEMOSTRACIÓN.** La transformada de Fourier interpolada de la función $f^{EX}_{c,v_{VX}}$ está representada por los valores:

$$\left(F^{EX}_{c,v_{VX}}\right)^{EU'}(k \cdot EU') = \frac{EX}{2p} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \left(F^{EX}_{c,1_{VX}}\right)^{\frac{2p}{VX}}\left(q\frac{2p}{VX}\right) \left(\hat{V}^{q\,EX}_{c,1_{VX}}\right)^{EU'}(k \cdot EU' \mid c, VX)$$

$$\forall k \in \mathbb{Z} \tag{2.5.8}$$

La interpolación en su transformada de Fourier inversa vendrá dada por (2.4.47), que en este caso se rescribe, teniendo en cuenta las relaciones expuestas en la Tabla 2–4–1, en la forma:

$$\left(\left(f_{c,v_{VX}}^{EX}\right)^{EU'}\right)_{c,1_{VX}}^{EX}(n\cdot EX)=$$

$$=EU'\cdot\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(\left(f_{c,v_{VX}}^{EX}\right)^{EU'}\right)^{EX'}(m\cdot EX')\cdot\left(\hat{\mathbb{1}}^{mEU'}\right)_{c,1_{VX}}^{EX}(n\cdot EX\,|\,u',VU') \tag{2.5.19}$$

$$\forall n\in\{\underline{n}\quad \underline{n}+1\quad\cdots\quad \overline{n}-1\quad \overline{n}\}$$

Donde los valores $\left(\left(f_{c,v_{VX}}^{EX}\right)^{EU'}\right)^{EX'}$ vienen dados por una expresión análoga a (2.4.28), que en este caso se rescribe, teniendo en cuenta las relaciones expuestas en la Tabla 2–4–1, en la forma:

$$\left(\left(f_{c,v_{VX}}^{EX}\right)^{EU'}\right)^{EX'}(n\cdot EX')=\frac{1}{VU'}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(F_{c,v_{VX}}^{EX}\right)^{EU'}(k\cdot EU')\cdot e^{ik\cdot EU'n\cdot EX'}$$

$$\forall n\in\mathbb{Z} \tag{2.5.20}$$

Así mismo, los valores $\left(\hat{\mathbb{1}}^{mEU'}\right)$ vienen dados por una expresión análoga a (2.4.29), que en este caso se rescribe, teniendo en cuenta las relaciones expuestas en la Tabla 2–4–1, en la forma:

$$\left(\hat{\mathbb{1}}^{mEU'}\right)(x\,|\,u',VU')=\frac{1}{VU'}\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{ik\cdot EU'(x-mEX')}$$

$$\forall m\in\mathbb{Z} \tag{2.5.21}$$

La expresión (2.5.19) se rescribe, sustituyendo los valores $\left(\left(f_{c,v_{VX}}^{EX}\right)^{EU'}\right)^{EX'}$ dados por (2.5.20) y los valores $\left(\hat{\mathbb{1}}^{mEU'}\right)$ dados por (2.5.21), teniendo en cuenta las relaciones expuestas en la Tabla 2–4–1, en la forma:

$$\left(\left(f_{c,v_{VX}}^{EX}\right)^{EU'}\right)_{c,1_{VX}}^{EX}(n\cdot EX)=$$

$$=\frac{1}{VU'}\frac{1}{PE}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(F_{c,v_{VX}}^{EX}\right)^{EU'}(k\cdot EU')\cdot\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{q=-\infty}^{\infty}e^{ik\cdot EU'm\cdot EX'}\cdot e^{-iq\cdot EU'm\cdot EX'}\cdot e^{iq\cdot EU'n\cdot EX}$$

$$\forall n\in\{\underline{n}\quad \underline{n}+1\quad\cdots\quad \overline{n}-1\quad \overline{n}\} \tag{2.5.22}$$

Es posible rescribir la discretización del Teorema Integral de Fourier (2.1.18), teniendo en cuenta las relaciones expuestas en la Tabla 2–4–1, en la forma:

$$g\left(n\cdot EX\right)\underset{\underline{n}\to-\infty}{\overset{\overline{n}\to\infty}{=}}\frac{1}{PE}\sum_{q=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}g\left(m\cdot EX'\right)\cdot e^{-iq\cdot EU'm\cdot EX'}\cdot e^{iq\cdot EU'n\cdot EX} \tag{2.5.23}$$

Así pues, tomando $g\left(m\cdot EX'\right)=e^{ik\cdot EU'm\cdot EX'}$ en (2.5.22), aplicando la expresión anterior se obtiene:

$$\left(\left(f_{c,v_{VX}}^{EX}\right)^{EU'}\right)_{c,1_{VX}}^{EX}\left(n\cdot EX\right)=\frac{1}{VU'}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(F_{c,v_{VX}}^{EX}\right)^{EU'}\left(k\cdot EU'\right)\cdot e^{ik\cdot EU'n\cdot EX}$$

$$\forall n\in\left\{\underline{n}\quad \underline{n}+1\quad\cdots\quad\overline{n}-1\quad\overline{n}\right\} \tag{2.5.24}$$

Es posible rescribir la expresión anterior, sustituyendo el valor de $\left(F_{c,v_{VX}}^{EX}\right)^{EU'}$ dado por una expresión análoga a (2.4.21), teniendo en cuenta las relaciones expuestas en la Tabla 2–4–1, en la forma:

$$\left(\left(f_{c,v_{VX}}^{EX}\right)^{EU'}\right)_{c,1_{VX}}^{EX}\left(n\cdot EX\right)=$$

$$=\frac{EX}{2p}\frac{1}{VU'}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{q=-\infty}^{\infty}\left(F_{c,1_{VX}}^{EX}\right)^{EU}\left(q\cdot EU\right)\cdot\left(\overset{q}{\hat{V}}{}_{c,1_{VX}}^{EX}\right)^{EU'}\left(k\cdot EU'\,|\,c,VX\right)\cdot e^{ik\cdot EU'n\cdot EX}$$

$$\forall n\in\left\{\underline{n}\quad \underline{n}+1\quad\cdots\quad\overline{n}-1\quad\overline{n}\right\} \tag{2.5.25}$$

Es posible rescribir la expresión anterior, sustituyendo $\left(F_{c,1_{VX}}^{EX}\right)^{EU}$ por sus valores dados por una expresión análoga a (2.4.2) y las funciones $\left(\overset{q}{\hat{V}}{}_{c,1_{VX}}^{EX}\right)$ por sus valores dados por (2.4.3), teniendo en cuenta las relaciones expuestas en la Tabla 2–4–1, en la forma:

$$\left(\left(f_{c,v_{VX}}^{EX}\right)^{EU'}\right)_{c,1_{VX}}^{EX}\left(n\cdot EX\right)=$$

$$=\frac{VX'}{VX}\frac{1}{\left(PE\right)^{2}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{r=\underline{n}}^{\overline{n}}v_{VX}\left(r\cdot EX-c\right)\cdot e^{-ik\cdot EU'r\cdot EX}\cdot e^{ik\cdot EU'n\cdot EX}\cdot$$

$$\cdot\sum_{q=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}f\left(m\cdot EX\right)\cdot e^{-iq\cdot EU\cdot mEX}\cdot e^{iq\cdot EU\cdot rEX} \tag{2.5.26}$$

$$\forall n\in\left\{\underline{n}\quad \underline{n}+1\quad\cdots\quad\overline{n}-1\quad\overline{n}\right\}$$

Es posible rescribir la discretización del Teorema Integral de Fourier (2.1.18), teniendo en cuenta las relaciones expuestas en la Tabla 2–4–1, en la forma:

$$g\left(r\cdot EX\right)\underset{\underline{n}\to-\infty}{\overset{\overline{n}\to\infty}{=}}\frac{1}{PE}\sum_{q=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}g\left(m\cdot EX\right)\cdot e^{-iqEU\cdot mEX}\cdot e^{iqEU\cdot rEX} \tag{2.5.27}$$

Así pues, tomando $g\left(m\cdot EX\right)=f\left(m\cdot EX\right)$ en (2.5.26), aplicando la expresión anterior se obtiene:

$$\left(\left(f_{c,v_{VX}}^{EX}\right)^{EU'}\right)_{c,1_{VX}}^{EX}\left(n\cdot EX\right)=$$
$$=\frac{VX'}{VX}\frac{1}{PE}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{r=\underline{n}}^{\overline{n}}v_{VX}\left(r\cdot EX-c\right)\cdot f\left(r\cdot EX\right)\cdot e^{-ikEU'r\cdot EX}\cdot e^{ikEU'n\cdot EX} \tag{2.5.28}$$

$$\forall n\in\left\{\underline{n}\quad \underline{n}+1\quad\cdots\quad\overline{n}-1\quad\overline{n}\right\}$$

Es posible rescribir la discretización del Teorema Integral de Fourier (2.1.18), teniendo en cuenta las relaciones expuestas en la Tabla 2–4–1, en la forma:

$$g\left(n\cdot EX\right)=\frac{VX}{VX'}\frac{1}{PE}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{r=\underline{n}}^{\overline{n}}g\left(r\cdot EX\right)\cdot e^{-ik\cdot EU'r\cdot EX}\cdot e^{ikEU'n\cdot EX} \tag{2.5.29}$$

Así pues, tomando $g\left(r\cdot EX\right)=v_{VX}\left(r\cdot EX-c\right)\cdot f\left(r\cdot EX\right)$ en (2.5.28), aplicando la expresión anterior y comparando el resultado con los valores de la función muestreada con soporte acotado $f_{c,v_{VX}}^{EX}$ dados en (2.2.10), se obtiene (2.5.17).

Obsérvese que los valores de la transformada inversa son $\left(VX'/VX\right)^2 v_{VX'}\left(n\cdot EX'-c'\right)$ veces los valores de la función original muestreada $f^{EX'}$ en los mismos puntos. Teniendo en cuenta que, para los valores de n expuestos en (2.5.6), la ventana es no nula por su propia definición (2.2.5), es posible recuperar los valores de la función original muestreada dividiendo (2.5.17) entre los valores de la ventana, obteniéndose (2.5.18).

Es importante señalar que los valores de la transformada inversa $\left(\left(f_{c,v_{VX}}^{EX}\right)^{EU'}\right)_{c,1_{VX}}^{EX}$ no tienen por qué coincidir con los valores $\left(\left(f_{c,v_{VX}}^{*EX}\right)_{u',1_{VU}}^{EU'}\right)_{c,1_{VX}}^{EX}$ que se determinarían calculando la interpolación en la transformada inversa de los valores $\left(f_{c,v_{VX}}^{*EX}\right)_{u',1_{VU'}}^{EU'}$ expuestos en (2.4.23). La acotación en el dominio frecuencial podría conducir a que no se diera una igualdad del tipo (2.5.17).

Este resultado se ejemplifica en las figuras 2–5–6 y 2–5–7:

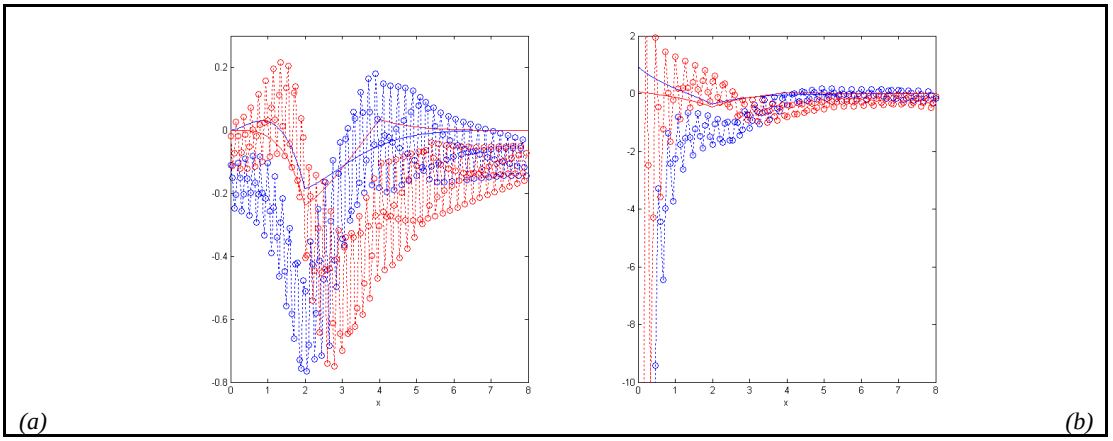


Figura 2–5-6: Relación entre la transformada inversa de la transformada directa interpolada y la función original, correspondiente al ejemplo I mostrado en §2.4.1.2:

(a) Función con soporte acotado $f_{0,025;\,h_8}(x)$ *(líneas) y valores de la transformada inversa*

$$\left(\frac{8}{32/3}\right)^2 \left(\left(f^{*0,05}_{0,025;\,h_8} \right)^{\frac{3}{4}p/4}_{\frac{3}{4}p/8;\,\mathrm{I}_{\frac{3}{4}40p}} \right)^{0,05}_{0,025;\,\mathrm{I}_8}$$

(círculos) en el intervalo $(-0,025;7,975)$.

(b) Función $f(x)$ *(líneas) y valores de la transformada inversa corregida*

$$\left(\frac{8}{32/3}\right)^2 \left(\left(f^{*0,05}_{0,025;\,h_8} \right)^{\frac{3}{4}p/4}_{\frac{3}{4}p/8;\,\mathrm{I}_{\frac{3}{4}40p}} \right)^{0,05}_{0,025;\,\mathrm{I}_8} (n\cdot 0,05) \Big/ h_8(n\cdot 0,05+0,025)$$

(círculos), contenidos en el intervalo $(-0,025;7,975)$.

En todos los casos se muestra en azul la parte real, en rojo la parte imaginaria.

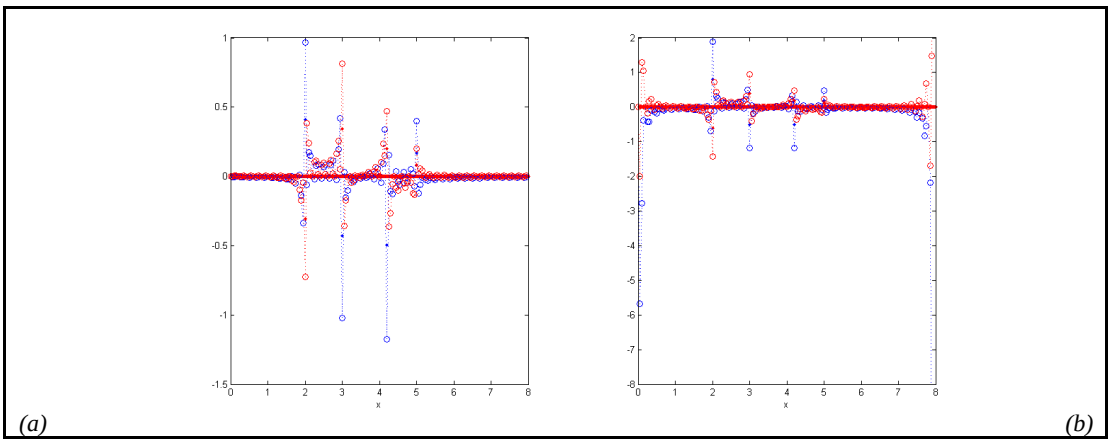


Figura 2–5-7: Relación entre la transformada inversa de la transformada directa interpolada y la función original, correspondiente al ejemplo II mostrado en §2.4.1.2 (I):

(a) Valores de la función muestreada con soporte acotado $g^{0,05}_{0,025;\,h_8}$ *(puntos) y valores de la transformada inversa* $\left(\frac{8}{32/3}\right)^2 \left(\left(g^{*0,05}_{0,025;\,h_8} \right)^{\frac{3}{4}p/4}_{\frac{3}{4}p/8;\,\mathrm{I}_{\frac{3}{4}40p}} \right)^{0,05}_{0,025;\,\mathrm{I}_8}$ *(círculos) en el intervalo* $(-0,025;7,975)$.

(b) Valores de la función muestreada $g^{0,05}$ *(puntos) y valores de la transformada inversa corregida* $\left(\frac{8}{32/3}\right)^2 \left(\left(g^{*0,05}_{0,025;\,h_8} \right)^{\frac{3}{4}p/4}_{\frac{3}{4}p/8;\,\mathrm{I}_{\frac{3}{4}40p}} \right)^{0,05}_{0,025;\,\mathrm{I}_8} (n\cdot 0,05) \Big/ h_8(n\cdot 0,05+0,025)$ *(círculos), contenidos en el intervalo* $(-0,025;7,975)$.

En todos los casos se muestra en azul la parte real, en rojo la parte imaginaria.

Análogamente a lo expuesto en la Subsección anterior, en las figuras 2–5–6 (a) y 2–5–7 (a) se aprecian fuertes discrepancias entre los valores de las funciones de soporte acotado y las transformadas inversas. Estas discrepancias pueden ser debidas, como ya se adelantó, a la acotación introducida en el dominio frecuencial, así como al hecho de que las discretizaciones del Teorema Integral de Fourier expuestas en (2.1.18) y (2.1.20) no dejan de ser aproximaciones de las integrales expuestas en (2.1.7) y (2.1.11).

Estas diferencias a su vez se traducen en una fuerte discrepancia entre los valores de las funciones originales y las transformadas inversas corregidas, como se aprecia en las figuras 2-5-6 (b) y 2–5–7 (b).

En importante señalar que este efecto se produce, análogamente a lo indicado en la Subsección anterior, independientemente de la ventana que se emplee para acotar la función en (2.2.6) ó (2.2.8).

En el caso de funciones constituidas por suma de impulsos es nuevamente posible determinar, en forma empírica, una expresión equivalente a (2.5.17) que permite relacionar idénticamente la función muestreada de soporte acotado con la transformada inversa de su transformada interpolada, en la forma:

$$f^{EX}_{c,1_{VX}}\left(n\cdot EX\right) \simeq \left(\frac{VX}{VX'}\right)\cdot\left(\left(f^{*EX}_{c,1_{VX}}\right)^{EU'}_{u',1_{VU'}}\right)^{EX}_{c,1_{VX}}\left(n\cdot EX\right)$$

$$\forall n \in \left\{\underline{n} \quad \underline{n}+1 \quad \cdots \quad \overline{n}-1 \quad \overline{n}\right\} \tag{2.5.30}$$

De tal forma que, atendiendo a las consideraciones anteriormente efectuadas, es posible relacionar idénticamente la función original muestreada y dicha transformada inversa mediante una expresión equivalente a (2.5.18), en la forma:

$$f^{EX}\left(n\cdot EX\right) \simeq \left(\frac{VX}{VX'}\right)\cdot\left(\left(f^{*EX}_{c,1_{VX}}\right)^{EU'}_{u',1_{VU'}}\right)^{EX}_{c,1_{VX}}\left(n\cdot EX\right) \Big/ v_{VX}\left(n\cdot EX - c\right)$$

$$\forall n \in \left\{\underline{n} \quad \underline{n}+1 \quad \cdots \quad \overline{n}-1 \quad \overline{n}\right\} \tag{2.5.31}$$

Este resultado se ejemplifica en la Figura 2–5–8.

En la Figura 2-5–8 (b) pueden apreciarse fuertes divergencias entre la función original muestreada y la transformada inversa corregida en los extremos del intervalo. Esto es debido a que se divide entre los valores de la ventana que, en este caso, correspondiente a la ventana de Hanning dada por (2.2.7), tienden a cero en dichos extremos. Este efecto podría evitarse mediante la utilización de otra ventana en el dominio natural, como por ejemplo el pulso cuadrado dado por (2.3.31).

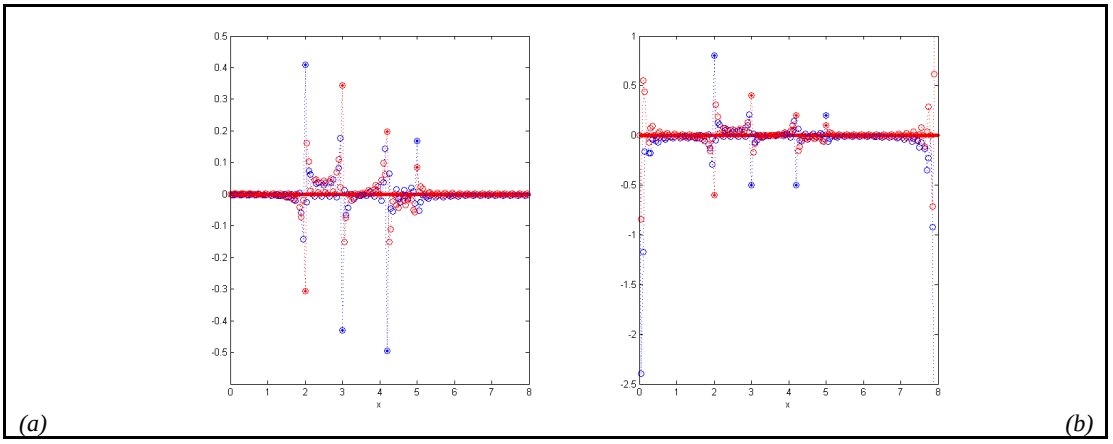


Figura 2–5-8: Relación entre la transformada inversa de la transformada directa interpolada y la función original, correspondiente al ejemplo II mostrado en §2.4.1.2 (y II):

(a) Valores de la función muestreada con soporte acotado $g^{0,05}_{0,025;\,h_8}$ *(puntos) y valores de la transformada inversa* $\left(\frac{32/3}{8}\right)\left(\left(g^{*0,05}_{0,025;\,h_8}\right)^{\frac{3}{4}p/4}_{\frac{3}{4}p/8;\,\mathrm{I}_{\frac{3}{4}40p}}\right)^{0,05}_{0,025;\,\mathrm{I}_8}$ *(círculos) en el intervalo* $(-0,025;7,975)$.

(b) Valores de la función muestreada $g^{0,05}$ *(puntos) y valores de la transformada inversa corregida* $\left(\frac{32/3}{8}\right)\left(\left(g^{*0,05}_{0,025;\,h_8}\right)^{\frac{3}{4}p/4}_{\frac{3}{4}p/8;\,\mathrm{I}_{\frac{3}{4}40p}}\right)^{0,05}_{0,025;\,\mathrm{I}_8}(n\cdot 0,05)\Big/h_8(n\cdot 0,05+0,025)$ *(círculos), contenidos en el intervalo* $(-0,025;7,975)$.

En todos los casos se muestra en azul la parte real, en rojo la parte imaginaria.

2.6. Recapitulación

En esta Sección se exponen, a modo de compilación, los resultados principales expuestos en el presente Capítulo para el estudio de las transformadas de Fourier, directa e inversa, de funciones muestreadas con soporte acotado.

2.6.1. Transformadas de Fourier directa e inversa

- En este trabajo se tratan funciones constituidas por suma de impulsos, con soporte acotado por aplicación de la ventana cuadrada dada por (2.3.31). Dada una función $f_{c,1_{VX}}^{EX}$ con las citadas características, representada por los valores dados por una expresión análoga a (2.2.10):

$$f_{c,1_{VX}}^{EX}\left(n\cdot EX\right)=f\left(n\cdot EX\right)$$

$$\forall n\in\left\{0\quad 1\quad\cdots\quad PE-2\quad PE-1\right\} \tag{2.6.1}$$

Se determina su transformada de Fourier mediante una expresión análoga a (2.3.2):

$$\left(F_{c,1_{VX}}^{EX}\right)_{u,1_{VU}}^{EU}\left(k\cdot EU\right)=EU\cdot\widetilde{F}_{u,1_{VU}}^{EU}\left(k\cdot EU\right)$$

$$\forall k\in\left\{0\quad 1\quad\cdots\quad PE-2\quad PE-1\right\} \tag{2.6.2}$$

Donde $\widetilde{F}_{u,1_{VU}}^{EU}$ representa la transformada de Fourier discreta que se determina computacionalmente, dada por una expresión análoga a (2.3.16):

$$\widetilde{F}_{u,1_{VU}}^{EU}\left(k\cdot EU\right)=\sum_{n=0}^{PE-1}f\left(n\cdot EX\right)\cdot e^{-ik\cdot EU\,n\,EX}$$

$$\forall k\in\left\{0\quad 1\quad\cdots\quad PE-2\quad PE-1\right\} \tag{2.6.3}$$

- Dada una función $F_{u,1_{VU}}^{EU}$ con las citadas características, representada por los valores dados por una expresión análoga a (2.3.21):

$$F_{u,1_{VU}}^{EU}\left(k\cdot EU\right)=F\left(k\cdot EU\right)$$

$$\forall k\in\left\{0\quad 1\quad\cdots\quad PE-2\quad PE-1\right\} \tag{2.6.4}$$

Se determina su transformada de Fourier inversa mediante una expresión análoga a (2.3.18):

$$\left(f_{u,1_{VU}}^{EU}\right)_{c,1_{VX}}^{EX}\left(n\cdot EX\right)=\frac{1}{EU}\tilde{f}_{c,1_{VX}}^{EX}\left(n\cdot EX\right)$$

$$\forall n\in\left\{0\quad 1\quad\cdots\quad PE-2\quad PE-1\right\} \tag{2.6.5}$$

Donde $\tilde{f}_{c,1_{VX}}^{EX}$ representa la transformada de Fourier discreta que se determina computacionalmente, dada por una expresión análoga a (2.3.16):

$$\tilde{f}_{c,1_{VX}}^{EX}\left(n\cdot EX\right)=\frac{1}{PE}\sum_{k=0}^{PE-1}F\left(k\cdot EU\right)\cdot e^{ik\,E\,U\,n\,E\,X}$$

$$\forall n\in\left\{0\quad 1\quad\cdots\quad PE-2\quad PE-1\right\} \tag{2.6.6}$$

2.6.2. Interpolación en las transformadas de Fourier

- La interpolación de la transformada de Fourier en PE valores del dominio frecuencial viene representada por los valores dados mediante una expresión análoga a (2.4.23):

$$\left(F_{c,1_{VX}}^{*EX}\right)_{u',1_{VU'}}^{EU'}\left(k\cdot EU'\right)=$$

$$=\frac{EX}{2p}\sum_{q=0}^{PE-1}\left(F_{c,1_{VX}}^{EX}\right)_{u,1_{VU}}^{EU}\left(q\cdot EU\right)\cdot\left(\hat{\mathbb{I}}_{c,1_{VX}}^{q\,EX}\right)_{u',1_{VU'}}^{EU'}\left(k\cdot EU'\,|\,c,VX\right) \tag{2.6.7}$$

$$\forall k\in\left\{\underline{k}\quad\underline{k}+1\quad\cdots\quad\overline{k}-1\quad\overline{k}\right\}$$

Donde el conjunto de índices $\left\{\underline{k}\quad\underline{k}+1\quad\cdots\quad\overline{k}-1\quad\overline{k}\right\}$ cumple la condición:

$$k\cdot EU'\in\left(u'\quad VU'+u'\right),\qquad\forall k\in\left\{\underline{k}\quad\underline{k}+1\quad\cdots\quad\overline{k}-1\quad\overline{k}\right\} \tag{2.4.22}$$

Los valores $\left(F^{EX}_{c,1_{VX}}\right)^{EU}_{u,1_{VU}}$ vienen determinados por una expresión análoga a (2.4.2), que se rescribe en la forma (2.6.2).

Así mismo, los valores $\left(\hat{\mathbb{I}}^{q\,EX}_{c,1_{VX}}\right)^{EU'}_{u',1_{VU'}}$ vienen determinados por una expresión análoga a (2.4.3):

$$\left(\hat{\mathbb{I}}^{q\,EX}_{c,1_{VX}}\right)^{EU'}_{u',1_{VU'}}(k\cdot EU') = EU\cdot\sum_{n=0}^{PE-1} e^{-i(k\,E\,U'-q\,E\,U)n\,E\,X}$$

$$\forall k \in \left\{\underline{k} \quad \underline{k}+1 \quad \cdots \quad \overline{k}-1 \quad \overline{k}\right\} \tag{2.6.8}$$

- La interpolación de la transformada de Fourier inversa en PE valores del dominio natural viene representada por los valores dados mediante una expresión análoga a (2.4.49):

$$\left(f^{*EU}_{u,1_{VU}}\right)^{EX'}_{c',1_{VX'}}(n\cdot EX') =$$

$$= EU\cdot\sum_{m=0}^{PE-1}\left(f^{EU}_{u,1_{VU}}\right)^{EX}_{c,1_{VX}}(m\cdot EX)\cdot\left(\hat{\mathbb{I}}^{m\,EU}_{u,1_{VU}}\right)^{EX'}_{c',1_{VX'}}(n\cdot EX'|u,VU) \tag{2.6.9}$$

$$\forall n \in \left\{\underline{n} \quad \underline{n}+1 \quad \cdots \quad \overline{n}-1 \quad \overline{n}\right\}$$

Donde el conjunto de índices $\left\{\underline{n} \quad \underline{n}+1 \quad \cdots \quad \overline{n}-1 \quad \overline{n}\right\}$ cumple la condición:

$$n\cdot EX' \in \left(c' \quad VX'+c'\right), \qquad \forall n \in \left\{\underline{n} \quad \underline{n}+1 \quad \cdots \quad \overline{n}-1 \quad \overline{n}\right\} \tag{2.4.48}$$

Los valores $\left(f^{EU}_{u,1_{VU}}\right)^{EX}_{c,1_{VX}}$ vienen determinados por una expresión análoga a (2.4.28), que se rescribe en la forma (2.6.6).

Así mismo, los valores $\left(\hat{\mathbb{I}}^{m\,EU}_{u,1_{VU}}\right)^{EX'}_{c',1_{VX'}}$ vienen determinados por una expresión análoga a (2.4.29):

$$\left(\hat{\mathbb{I}}^{m\,EU}_{u,1_{VU}}\right)^{EX'}_{c',1_{VX'}}(n\cdot EX') = \frac{1}{VU}\sum_{k=0}^{PE-1} e^{i\,k\cdot E\,U(n\,E\,X'-m\cdot EX)}$$

$$\forall n \in \left\{\underline{n} \quad \underline{n}+1 \quad \cdots \quad \overline{n}-1 \quad \overline{n}\right\} \tag{2.6.10}$$

Es importante señalar que este método de interpolación en las transformadas de Fourier es un proceso costoso computacionalmente, dada la gran cantidad de operaciones necesarias, explicitadas en los sumatorios. Este número de operaciones es sensiblemente superior al número de operaciones necesarias para determinar la transformada de Fourier computacionalmente.

2.6.3. Relaciones entre las transformadas de Fourier y la función original

- La relación entre la función muestreada soporte acotado representada por los valores $f^{EX}_{c,1_{VX}}$ dados en (2.6.1), y la transformada inversa de su transformada directa $\left(F^{EX}_{c,1_{VX}}\right)^{EU}_{u,1_{VU}}$ dada por (2.6.2), representada por los valores $\left(\left(f^{EX}_{c,1_{VX}}\right)^{EU}_{u,1_{VU}}\right)^{EX}_{c,1_{VX}}$, viene dada por una expresión análoga a (2.5.1):

$$f^{EX}_{c,1_{VX}}(n\cdot EX)=\left(\left(f^{EX}_{c,1_{VX}}\right)^{EU}_{u,1_{VU}}\right)^{EX}_{c,1_{VX}}(n\cdot EX)$$

$$\forall n\in\{0\quad 1\quad\cdots\quad PE-2\quad PE-1\} \tag{2.5.1}$$

- La relación entre la función muestreada soporte acotado representada por los valores $f^{EX}_{c,1_{VX}}$ dados en (2.6.1), y la transformada inversa de su transformada directa interpolada $\left(F^{EX}_{c,1_{VX}}\right)^{EU'}_{u',1_{VU'}}$ dada por (2.6.7), representada por los valores $\left(\left(f^{EX}_{c,1_{VX}}\right)^{EU'}_{u',1_{VU'}}\right)^{EX'}_{c',1_{VX'}}$, viene dada por una expresión análoga a (2.5.15) y (2.5.16):

$$f^{EX'}_{c,1_{VX}}(n\cdot EX')\simeq\left(\frac{VX}{VX'}\right)\cdot\left(\left(f^{*EX}_{c,1_{VX}}\right)^{EU'}_{u',1_{VU'}}\right)^{EX'}_{c',1_{VX'}}(n\cdot EX')$$

$$\forall n\in\{0\quad 1\quad\cdots\quad PE-2\quad PE-1\}\quad:\quad n\cdot EX'\in(c\quad VX+c) \tag{2.5.1}$$

- La relación entre la función muestreada soporte acotado representada por los valores $f^{EX}_{c,1_{VX}}$ dados en (2.6.1), y la interpolación de la transformada inversa de su transformada directa interpolada $\left(F^{EX}_{c,1_{VX}}\right)^{EU'}_{u',1_{VU'}}$ dada por (2.6.7),

representada por los valores $\left(\left(f^{EX}_{c,1_{VX}}\right)^{EU'}_{u',1_{VU'}}\right)^{EX}_{c,1_{VX}}$, viene dada por una expresión análoga a (2.5.30):

$$f^{EX}_{c,1_{VX}}(nEX) \simeq \left(\frac{VX}{VX'}\right)\left(\left(f^{*EX}_{c,1_{VX}}\right)^{EU'}_{u',1_{VU'}}\right)^{EX}_{c,1_{VX}}(nEX) \tag{2.5.1}$$

$$\forall n \in \{0 \quad 1 \quad \cdots \quad PE-2 \quad PE-1\}$$

Capítulo 3

Implementación del algoritmo

Introducción

En este tercer Capítulo se expone la estructuración del algoritmo para la resolución del problema directo para un único perfil en sus módulos constituyentes, prestándose una especial atención al módulo diseñado para la determinación de los reflectores ficticios que permiten obtener las ondas reflejadas múltiples.

Se encuentra dividido en tres Secciones dedicadas, respectivamente:

- A la descripción técnica del algoritmo implementado.
- Al método de determinación de las ondas reflejadas múltiples en cada traza.
- A la discusión de la metodología de interpolación en la transformada de Fourier.

3.1. Descripción técnica del algoritmo implementado

Este algoritmo se implementa en el lenguaje de MATLAB® Version 6.5.0.180913a (R13), desarrollado por la compañía The MathWorks, Inc. (Hanselman y Littlefield, 1997).

Este algoritmo permite resolver el problema directo para el caso de un único perfil, cuyo rumbo se asume que se corresponde con el eje $\overline{OX}$, sujeto a las restricciones expuestas en §1.5.1. Dado que se considera incidencia normal, únicamente se considerarán colecciones de reflectores plano-paralelos.

En la Tabla 3–1–1 se exponen los módulos en que se subdivide el algoritmo, que serán descritos a continuación.

Tabla 3–1-1: Relación de módulos de que consta el algoritmo. Las flechas indican llamadas a los módulos correspondientes.

`perfil_pd` →	`coordenadas`			
	`reflectividad2perfil` →	`natural2frecuencial`		
		`frecuencial2natural`		
		`indices2reflectividades` →	`multiples_pd`	
		`ampliar_distribución`		
		`filtrar_FFT2_pd` →	`Qperfil`	
			`Kperfil`	
			`dKdQperfil`	
			`spline3interp`	
		`reducir_perfil`		

En estos módulos se emplean las funciones implementadas por MATLAB (por ejemplo `fftn` e `ifftn` para determinar las transformadas de Fourier directa e inversa), así como algunas de las funciones incluidas en sus toolboxes: `mean`, `fftshift`, `ifftshift`, `num2str`, `str2num` y `linspace`.

3.1.1. Módulo `perfil_pd`

Éste es el guión del algoritmo que permite resolver el problema directo para un único perfil. En él el usuario debe explicitar los parámetros que caracterizan la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD, así como otros que se precisan para determinar la SECCIÓN MEDIDA. Este conjunto de parámetros define el modelo físico cuyo radargrama sintético se quiere determinar.

- Frecuencia de la antena (en Hz).

- Parametrización de los medios (numerados 1, 2, etc.): permitividad eléctrica, permeabilidad magnética y conductividad eléctrica (en unidades del S. I.). Estos valores, junto con la frecuencia de la antena, son empleados en el cálculo para cada medio de la impedancia, h, la velocidad de propagación, c, y el factor de atenuación, a, de acuerdo con las expresiones (Lorenzo, 1994):

$$h = \sqrt{\frac{iwm}{s + iwe}} \tag{3.1.1}$$

$$c = \frac{w}{\mathrm{Im}\left(\sqrt{iwms - wme}\right)} = \frac{1}{\sqrt{\frac{me}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{s}{we}\right)^2}\right)}} \tag{1.3.13}$$

$$a = w\sqrt{\frac{me}{2}\left(\sqrt{1 + \left(\frac{s}{we}\right)^2} - 1\right)} \tag{3.1.2}$$

- Número de trazas por perfil (*PEX*) y longitud del perfil (*LX*, en m), número de muestras por traza (*PET*) y longitud de la traza en tiempo doble de recorrido (*LT*, en ns).

- SECCIÓN DE ÍNDICES. Se entiende por SECCIÓN DE ÍNDICES una matriz de tamaño $PET \times PEX$, en la que cada elemento (i, j) representa la muestra i-ésima de la traza j-ésima, esto es, la información del punto a una distancia $x = (j-1) \cdot EX$ del origen a lo largo del perfil, a una profundidad equivalente al tiempo doble $t = (i-1) \cdot ET$. Estos elementos de la SECCIÓN DE ÍNDICES serán nulos excepto cuando alberguen un punto difractor (asociado a un reflector), en cuyo caso toman un valor no nulo e igual al índice que caracteriza el tipo de reflector. Este índice se define mediante un número de dos dígitos, donde el primer dígito corresponde al medio superior y el segundo al medio inferior (por ejemplo, el reflector que separa los medios 1 y 3 se expresa mediante el índice 13).

  El conjunto de los índices se almacena en un vector de índices, en correspondencia biunívoca con los vectores de reflectividades y transmisividades descendentes y ascendentes correspondientes a cada interfaz, cuyos valores son determinados a partir de las impedancias de cada medio de acuerdo con las expresiones, válidas para incidencia normal (Lorenzo, 1994):

$$r_{ab} = \frac{h_b - h_a}{h_b + h_a}, \qquad t_{ab} = \frac{2h_b}{h_b + h_a} \tag{3.1.3}$$

  Obsérvese que, por su definición, $r_{ba} = -r_{ab}$, por lo que se define un único vector de reflectividades. Dado que no existe una relación análoga en el caso de las transmisividades, es necesario definir un vector que contenga las transmisividades descendentes, t_{ab}, y otro que contenga las transmisividades ascendentes, t_{ba}.

- Condición de reflectividad mínima para el cálculo de ondas múltiples (Cf. §3.1.4 y §3.1.5).

En este módulo se determinan las coordenadas (X, D) de cada muestra en cada traza (Cf. §1.3.2.1), mediante sendas llamadas a la función `coordenadas` (Cf. §3.1.3.), con el objeto de facilitar una representación gráfica de la SECCIÓN DE ÍNDICES.

Con los elementos arriba descritos se efectúa una llamada a la función `reflectividad2perfil`, que devuelve como salida la SECCIÓN MEDIDA y los nuevos límites del eje temporal (Cf. §3.1.2.).

Mediante una nueva llamada a la función `coordenadas` (Cf. §3.1.3.) se determinan las nuevas coordenadas temporales de cada muestra, con el objeto de facilitar una representación gráfica de la SECCIÓN MEDIDA.

3.1.2. Módulo `reflectividad2perfil`

Este módulo implementa el núcleo del algoritmo, y está diseñado para ser ensamblado fácilmente en un programa más completo de modelado y análisis de radargramas. La llamada a este método se muestra en la Tabla 3–1–2:

Tabla 3–1-2: Llamada al módulo `reflectividad2perfil`.

```
[perfil, PET2, LT2] = …
reflectividad2perfil(seccion_indices, codigo, r, td, ta, w, e_media, m_media, …
s_media, factor_atenuacion, c, LT, PED, ED, PEX, EX, r_minima)
```

La entrada del módulo consta de:

- La matriz *seccion* representa la SECCIÓN DE ÍNDICES.
- Los vectores *codigo*, *r*, *td* y *ta* contienen, respectivamente, los índices que contiene la SECCIÓN DE ÍNDICES, así como las reflectividades y transmisividades descendentes y ascendentes asociadas a éstos.
- El escalar *w* contiene la frecuencia de la antena.
- Los escalares *e_media*, *m_media* y *s_media* contienen, respectivamente, la permitividad eléctrica, permeabilidad magnética y conductividad eléctrica promedio.
- Los vectores *factor_atenuacion* y *c* contienen, respectivamente, los factores de atenuación y las velocidades de propagación correspondientes a cada medio. Dada la aproximación según la cual se considera que los reflectores se

encuentran insertos en una matriz con parámetros electromagnéticos constantes, estos vectores se sustituyen por otros de igual longitud, pero conteniendo los valores promedios del factor de atenuación y la velocidad de propagación, respectivamente.

- *LT* representa la longitud máxima del perfil en tiempo doble, *PED* y *ED* el número de puntos y el espaciado asociados a la coordenada *D* (Cf. §1.3.2.1), *PEX* y *EX* el número de puntos y el espaciado asociados a la coordenada *X* (Cf. §1.3.1.1).

- *r_minima* el valor de reflectividad mínima para el cálculo de ondas múltiples (Cf. §3.1.4 y §3.1.5).

La primera acción en este módulo es determinar las frecuencias asociadas a las coordenadas X y D, mediante sendas llamadas a la función `natural2frecuencial` (Cf. §3.1.3).

A continuación se construye la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD a partir de la SECCIÓN DE ÍNDICES, mediante llamada al módulo `indices2reflectividades`. La DISTRIBUCIÓN DE REFLECT IVIDAD es una matriz análoga a la SECCIÓN DE ÍNDICES, cuyos elementos toman el valor de la reflectividad aparente en cada punto (Cf. §3.1.4).

Una vez determinada esta Distribución, mediante llamada al módulo `ampliar_distribucion` se genera una Distribución equivalente a ésta, de mayor tamaño y que la contiene, con el objeto de evitar los efectos de borde y los “fantasmas” al tomar la transformada de Fourier (Cf. §3.1.6).

A continuación se determina la transformada de Fourier de la Distribución, teniendo en cuenta los resultados expuestos en el Capítulo 2, y se le aplica el filtro expuesto en §1.5.3, mediante llamada al módulo `filtrar_FFT2_pd` (Cf. §3.1.7).

La SECCIÓN MEDIDA se determina mediante la transformada de Fourier inversa del espectro filtrado anterior, teniendo en cuenta los resultados expuestos en el Capítulo 2, y se determinan las nuevas coordenadas asociadas a las nuevas frecuencias mediante llamada a la función `frecuencial2natural` (Cf. §3.1.3).

Obsérvese que esta SECCIÓN MEDIDA se determina a partir de la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD ampliada. Esta Sección es reducida a su tamaño natural mediante llamada al módulo `reducir_perfil` (Cf. §3.1.6).

La salida del módulo consta de:

- La matriz *perfil* representa la SECCIÓN MEDIDA.

- *PET2* y *LT2* representan el número de puntos y la longitud máxima de la SECCIÓN MEDIDA, en tiempo doble.

3.1.3. Módulos `natural2frecuencial`, `coordenadas` y `frecuencial2natural`

Estos módulos efectúan el cálculo de las coordenadas en los dominios natural y frecuencial, así como el paso de unas a otras. Para ello, se emplean las expresiones expuestas en el Capítulo 2, compiladas en la Tabla 2–4–1.

3.1.3.1. `natural2frecuencial`

La llamada a este método se muestra en la Tabla 3–1–3:

Tabla 3–1-3: Llamada al módulo `natural2frecuencial`.

```
[ET, T, VT, EF, LF, F, VF] = natural2frecuencial(PE, LT)
```

La entrada del módulo consta de:

- El número de puntos en el eje, PE.
- La longitud del intervalo en el dominio natural, LT.

Para el dominio natural devuelve como salida:

- El espaciado entre puntos, ET.
- Las coordenadas de los puntos, T (el primero es $T = 0$ y el ultimo $T = ET \cdot (PE - 1)$).
- La longitud de la ventana, VT.

Para el dominio frecuencial devuelve como salida:

- El espaciado entre puntos, EF.
- La longitud del intervalo en el dominio frecuencial, LF.

- Las coordenadas de los puntos, F (el primero es $F = 0$ y el ultimo $F = EF \cdot (PE - 1)$).
- La longitud de la ventana, VF.

3.1.3.2. `coordenadas`

Este módulo es una versión reducida del anterior. La llamada se muestra en la Tabla 3–1–4:

Tabla 3–1-4: Llamada al módulo `coordenadas`.

```
[ET, T] = coordenadas(PE, LT)
```

La entrada del módulo consta de:

- El número de puntos en el eje, PE.
- La longitud del intervalo en el dominio natural, LT.

La salida del módulo consta de:

- El espaciado entre puntos, ET.
- Las coordenadas de los puntos, T (el primero es $T = 0$ y el ultimo $T = ET \cdot (PE - 1)$).

3.1.3.3. `frecuencial2natural`

La llamada a este método se muestra en la Tabla 3–1–5:

Tabla 3–1-5: Llamada al módulo `frecuencial2natural`.

```
[ET, LT, T, VT, EF, F, VF] = frecuencial2natural(PE, LF)
```

La entrada del módulo consta de:

- El número de puntos en el eje, PE.
- La longitud del intervalo en el dominio frecuencial, LF.

Para el dominio natural devuelve como salida:

- El espaciado entre puntos, ET.
- La longitud del intervalo en el dominio natural, LT.
- Las coordenadas de los puntos, T (el primero es $T = 0$ y el ultimo $T = ET \cdot (PE - 1)$).
- La longitud de la ventana, VT.

Para el dominio frecuencial devuelve como salida:

- El espaciado entre puntos, EF.
- Las coordenadas de los puntos, F (el primero es $F = 0$ y el ultimo $F = EF \cdot (PE - 1)$).
- La longitud de la ventana, VF.

3.1.4. Módulo `indices2reflectividades`

Este módulo genera la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD en el formato que acepta el módulo de resolución del problema directo `reflectividad2perfil`, a partir de la SECCIÓN DE ÍNDICES.

La llamada a este método se muestra en la Tabla 3–1–6:

Tabla 3–1-6: Llamada al módulo `indices2reflectividad`.

```
distribucion_reflectividades = …
indices2reflectividades(seccion_indices, codigo, r, td, ta, …
factor_atenuacion, c, D, LT, r_minima)
```

La entrada del módulo consta de:

- La matriz *seccion_indices* representa la SECCIÓN DE ÍNDICES.
- Los vectores *codigo*, *r*, *td* y *ta* contienen, respectivamente, los índices que contiene la SECCIÓN DE ÍNDICES, así como las reflectividades y transmisividades descendentes y ascendentes asociadas a éstos.
- Los vectores *factor_atenuacion* y *c* contienen, respectivamente, los factores de atenuación y las velocidades de propagación correspondientes a cada medio. Dada la aproximación según la cual se considera que los reflectores se encuentran insertos en una matriz con parámetros electromagnéticos constantes, estos vectores se sustituyen por otros de igual longitud, pero conteniendo los valores promedios del factor de atenuación y la velocidad de propagación, respectivamente.
- *LT* representa la longitud máxima del perfil en tiempo doble.
- El vector *D* contiene valores de dicha coordenada correspondientes a las muestras contenidas en la Sección.
- *r_minima* el valor de reflectividad mínima para el cálculo de ondas reflejadas múltiples (Cf. §3.1.5).

La DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD es una matriz análoga a la SECCIÓN DE ÍNDICES, cuyos elementos toman el valor de la reflectividad aparente en cada punto. En su cálculo se ha de tener en cuenta los reflectores a través de los cuales se transmite o reflejan las ondas, así como la atenuación en su propagación a través de cada medio, como se ejemplifica en la Figura 3–1–1:

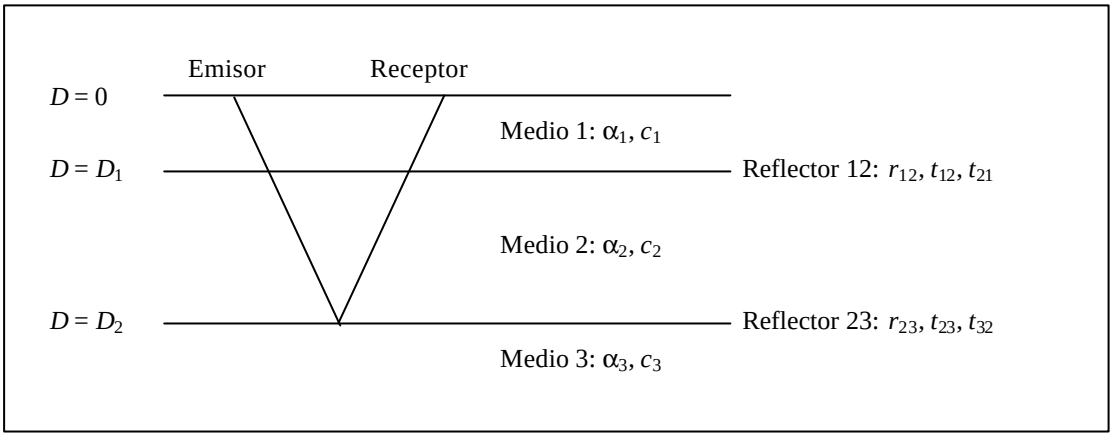


Figura 3–1-1: Ejemplo de determinación de la reflectividad aparente.
En este caso $r_a = e^{-a_1 D_1} \cdot t_{12} \cdot e^{-a_2 (D_2 - D_1)} \cdot r_{23} \cdot e^{-a_2 (D_2 - D_1)} \cdot t_{21} \cdot e^{-a_1 D_1}$.

En el módulo se determina, traza a traza, la posición y características de los reflectores, así como el factor de atenuación y la velocidad de propagación entre cada par de reflectores consecutivos.[1] Estos valores son utilizados como parámetros de entrada del módulo `multiples_pd` (Cf. §3.1.5) que efectúa, traza a traza, el cálculo de las reflectividades aparentes.

El módulo devuelve como salida la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD.

3.1.5. Módulo `multiples_pd`

Este módulo realiza el cómputo de las ondas reflejadas múltiples traza a traza, complementando al módulo `seccion_fis2mat` en la generación de la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD.

La llamada a este método se muestra en la Tabla 3–1–7:

Tabla 3–1-7: Llamada al módulo `multiples_pd`.

```
[nuevoD, nuevor] = …
multiples_pd(D, r, td, ta, factor_atenuacion, c, LT, r_minima)
```

[1] Teniendo en cuenta la aproximación bajo la que se opera, éstos serán los valores promedios.

La entrada del módulo consta de:

- El vector *D* contiene valores de dicha coordenada donde la traza contiene reflectores.
- Los vectores *r*, *td* y *ta* contienen, respectivamente, los valores de la reflectividad y transmisividad descendente y ascendente asociadas a éstos.
- Los vectores *factor_atenuacion* y *c* contienen, respectivamente, los factores de atenuación y las velocidades de propagación correspondientes a cada medio. Dada la aproximación según la cual se considera que los reflectores se encuentran insertos en una matriz con parámetros electromagnéticos constantes, estos vectores se sustituyen por otros de igual longitud, pero conteniendo los valores promedios del factor de atenuación y la velocidad de propagación, respectivamente.
- *LT* y *r_minima* representan las condiciones para el fin del cálculo de múltiples: no se considerarán ondas que llegarían a un tiempo doble superior a *LT*, ni ondas cuya reflectividad aparente asociada sea menor, en módulo, a *r_minima*.

El módulo devuelve como salida los vectores *nuevor* y *nuevoD* que contienen, respectivamente, las reflectividades aparentes y profundidades equivalentes de los reflectores ficticios asociados a cada onda reflejada múltiple. La metodología se expone en detalle en §3.2.

3.1.6. Módulos `ampliar_distribucion` y `reducir_perfil`

Estos módulos determinan la ampliación de la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD y posterior reducción de la SECCIÓN MEDIDA, tal como se expuso en §3.1.2.

3.1.6.1. `ampliar_distribucion`

La llamada a este método se muestra en la Tabla 3–1–8:

Tabla 3–1-8: Llamada al módulo `ampliar_distribucion`.

```
[distribucionI, distribucionD] = ampliar_distribucion(distribucion, NPED, NPEX)
```

La entrada del módulo consta de:

- La matriz *distribucion* representa la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD
- Los escalares $NPED \equiv 3 \cdot PED$ y $NPEX \equiv 2 \cdot PEX$ representan las nuevas dimensiones de la Sección ampliada.

La forma en que se define esta ampliación se muestra en la Figura 3–1–2.

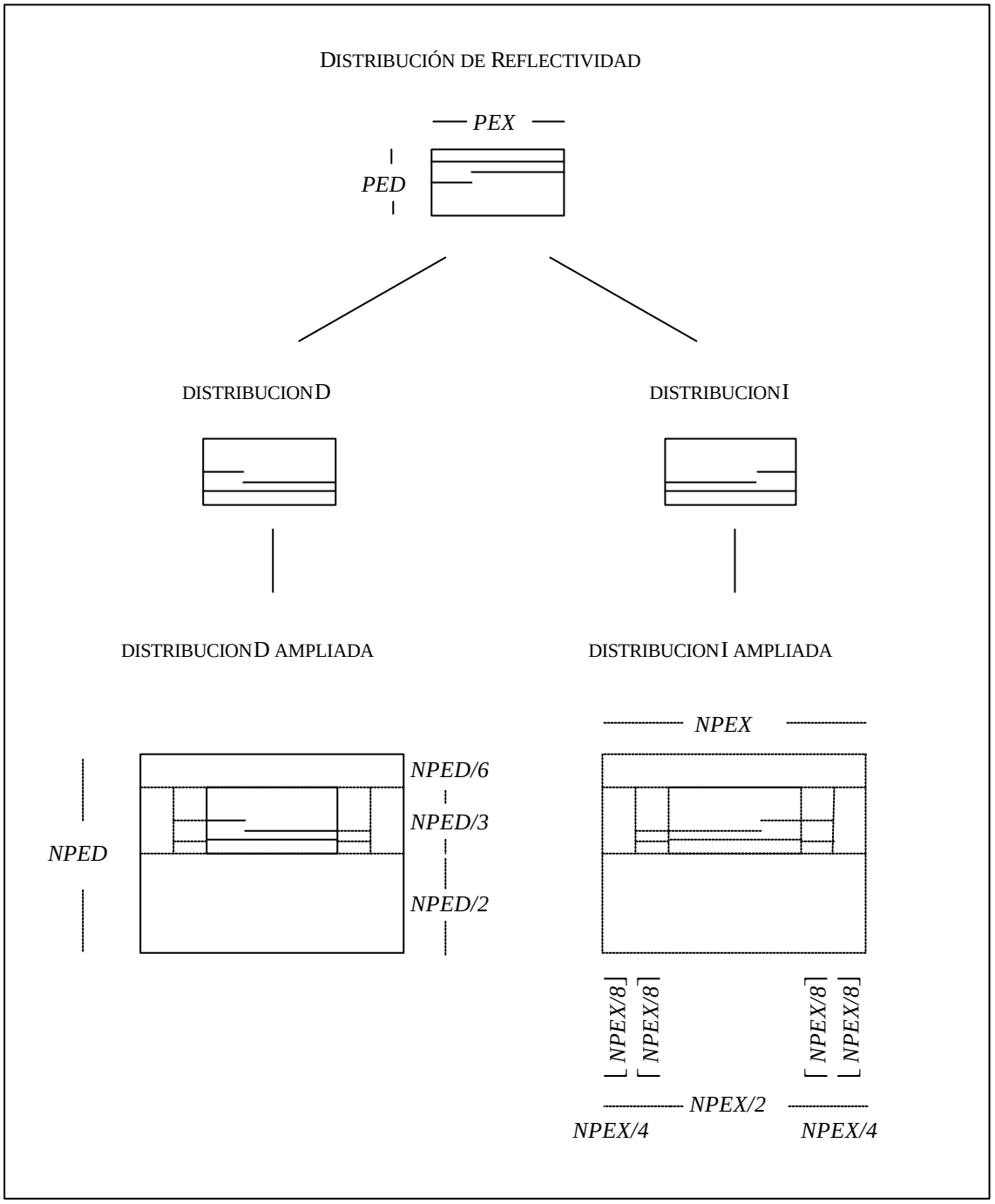


Figura 3–1-2: Ampliación de la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD.

Téngase en cuenta que, por definición, se cumplen las relaciones $NPED \equiv 3 \cdot PED$ *y* $NPEX \equiv 2 \cdot PEX$ *. Así mismo, se denota* $\lceil x \rceil$ *el menor entero mayor o igual que* x *, y* $\lfloor x \rfloor$ *el mayor entero menor o igual que* x *.*

Previa a la construcción de las nuevas Distribuciones ampliadas, se definen las nuevas matrices *distribucionD*, construida invirtiendo el orden de las filas de la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD, y *distribucionI*, construida invirtiendo el orden de las filas y columnas de la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD.

Las nuevas Distribuciones ampliadas están constituidas por superposición de submatrices. En una primera fila de submatrices aparece una submatriz de ceros de tamaño $NPED/6 \times NPEX$. En una segunda fila aparecen, por este orden, una submatriz de ceros de tamaño $NPED/3 \times \lfloor NPEX/8 \rfloor$, una submatriz de tamaño $NPED/3 \times \lceil NPEX/8 \rceil$, cuyas columnas son repetición de la primera columna de la matriz *distribucionD* (vs. *distribucionI*), la matriz *distribucionD* (vs. *distribucionI*), una submatriz de tamaño $NPED/3 \times \lceil NPEX/8 \rceil$, cuyas columnas son repetición de la última columna de la matriz *distribucionD* (vs. *distribucionI*) y una submatriz de ceros de tamaño $NPED/3 \times \lfloor NPEX/8 \rfloor$. En la última fila de submatrices aparece una submatriz de ceros de tamaño $NPED/2 \times NPEX$.

El módulo devuelve como salida las Distribuciones ampliadas *distribucionI* y *distribucionD*, que permiten obtener, respectivamente, las ramas izquierda y derecha de las hipérbolas de difracción.

3.1.6.2. `reducir_perfil`

La llamada a este método se muestra en la Tabla 3–1–9:

Tabla 3–1-9: Llamada al módulo `reducir_perfil`.

```
[perfil, PET2, LT2] = reducir_perfil(perfilI, perfilD, T2, LT, NPED, NPEX)
```

La entrada del módulo consta de:

- Las matrices *perfilI* y *perfilD* representan, respectivamente, las SECCIONES MEDIDAS con las ramas izquierda y derecha de las hipérbolas de difracción.
- El vector *T2* contiene los nuevos tiempos dobles que describe la SECCIÓN MEDIDA ampliada, y *LT* representa el tiempo doble máximo del perfil.
- Los escalares *NPED*, *NPEX* representan, respectivamente, los números de filas y columnas de la Sección ampliada.

La forma en que se define esta reducción se muestra en la Figura 3–1–3:

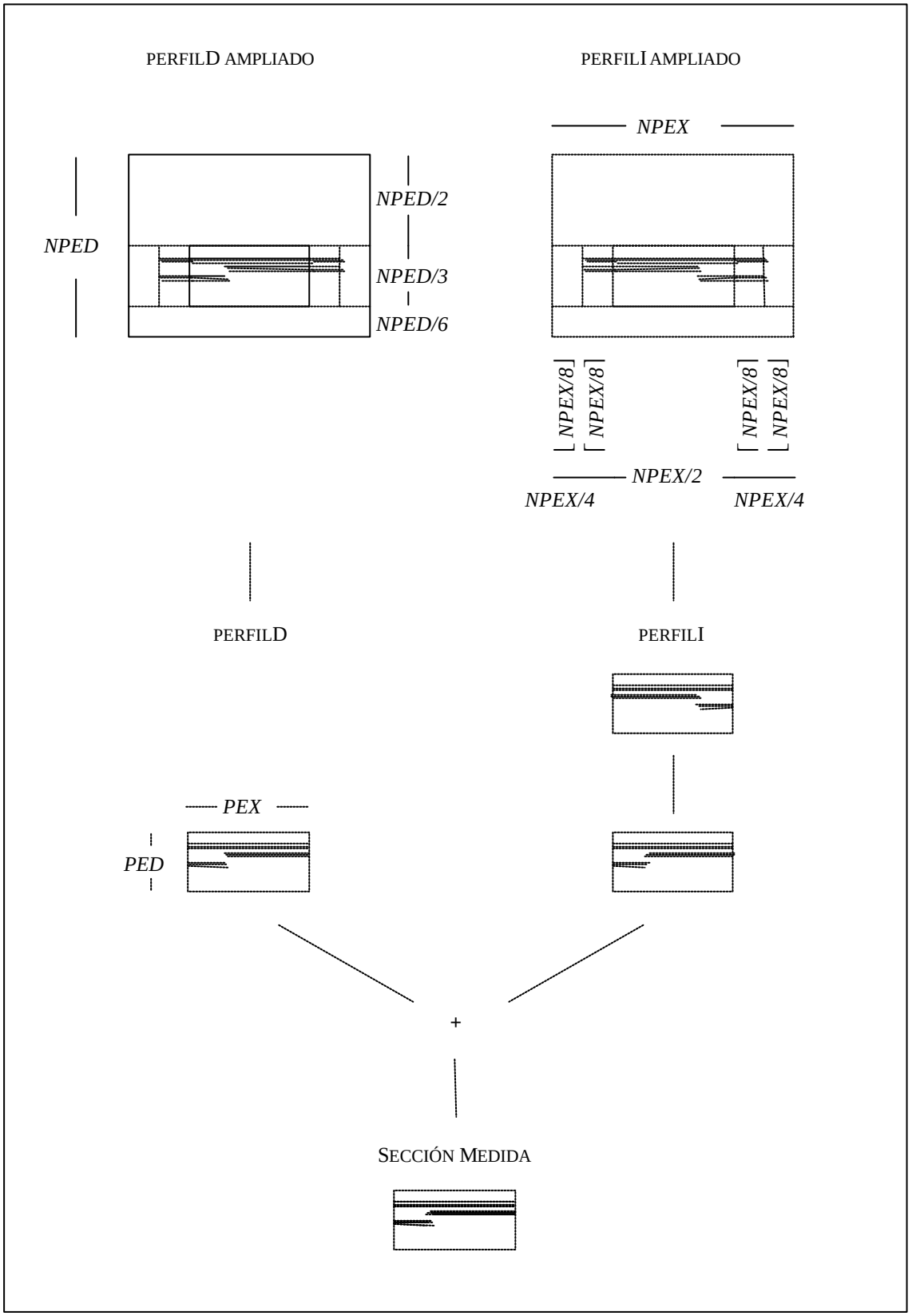


Figura 3–1-3: Reducción de la SECCIÓN MEDIDA.

Previa a la construcción de la SECCIÓN MEDIDA, se definen las nuevas matrices *perfilD* y *perfilI* tomando, de las matrices originales, las submatrices indicadas en la Figura anterior.

La SECCIÓN MEDIDA se determina mediante la suma de la matriz *perfilD* así obtenida, y la matriz obtenida al invertir el orden de columnas en la matriz *perfilI.*

La matriz así obtenida se trunca en filas, de tal forma que son eliminadas las filas correspondientes a un tiempo doble de recorrido mayor al tiempo doble máximo del perfil.

La salida del módulo consta de:

- Las matriz *perfil* representan la SECCIÓN MEDIDA.
- Los escalares *PET2* y *LT2* contienen, respectivamente, el nuevo número de muestras y la nueva longitud de las trazas.

3.1.7. Módulo `filtrar_FFT2_pd`

En este módulo se aplican los resultados obtenidos en el Capítulo 1 en el diseño del algoritmo. La llamada a este módulo se muestra en la Tabla 3–1–10:

Tabla 3–1-10: Llamada al módulo `filtrar_FFT2_pd`.

```
[FFT2I, FFT2D, Qinterp, VQ] = filtrar_FFT2_pd(FFT2I, FFT2D, K, U, w, e, m, s)
```

La entrada al módulo consta de:

- Las matrices *FFT2I* y *FFT2D* representan las transformadas de Fourier de las Distribuciones ampliadas.
- Los vectores *K* y *U* contienen, respectivamente, las frecuencias asociadas a las coordenadas *D* y *X*.
- Los escalares *w*, *e*, *m* y *s* contienen, respectivamente, la frecuencia de la antena y la permitividad eléctrica, permeabilidad magnética y conductividad eléctrica promedio del medio.

En el método se determinan las frecuencias *Q* para los distintos valores de la frecuencia *U*, mediante la función `Qperfil` (Cf. §3.1.8), y se determina la interpolación de dichas frecuencias, de tal forma que se obtenga un vector con tantos valores de frecuencia *Q* como

requiera la Sección ampliada, equiespaciadas y contenidas en cada uno de los vectores de frecuencias *Q* calculados para los distintos valores de la frecuencia *U*.

Para estos valores interpolados de la frecuencia *Q* se determinan los valores de la frecuencia *K* asociados, mediante la función `Kperfil` (Cf. §3.1.8) y, con estos, a su vez se determina la derivada para el cambio de variable en la integral, mediante la función `dKdQperfil` (Cf. §3.1.8).

Una vez obtenidos estos valores, se interpolan las transformadas *FFT2I* y *FFT2D* en los valores de las frecuencias interpoladas, mediante la función `spline3interp` (Cf. §3.1.9 y discusión en §3.3), y se determinan los espectros filtrados (Cf. §1.5.3).

La salida del módulo consta de:

- Las matrices *FFT2I* y *FFT2D* representan los espectros filtrados.
- El vector *Qinterp* contiene las nuevas frecuencias *Q* interpoladas.
- El escalar *VQ* contiene la nueva longitud de la ventana de frecuencias correspondiente.

3.1.8. Módulos `Qperfil`, `Kperfil` y `dKdQperfil`

Estos módulos efectúan el cálculo de las frecuencias *Q*, *K* y la derivada d*K*/d*Q*. Para ello, se emplean las expresiones expuestas en §1.5.3.

3.1.8.1. `Qperfil`

La llamada a este método se muestra en la Tabla 3–1–11:

Tabla 3–1-11: Llamada al módulo `Qperfil`.

```
Q = Qperfil(K, U, w, e, m, s)
```

La entrada del módulo consta de:

- Los vectores *K* y *U* contienen, respectivamente, las frecuencias asociadas a las coordenadas *D* y *X*.

- Los escalares *w*, *e*, *m* y *s* contienen, respectivamente, la frecuencia de la antena y la permitividad eléctrica, permeabilidad magnética y conductividad eléctrica promedio del medio.

El módulo devuelve como salida una matriz con las frecuencias *Q* asociadas a las frecuencias *K* para cada valor de la frecuencia *U*.

3.1.8.2. `Kperfil`

La llamada a este método se muestra en la Tabla 3–1–12:

Tabla 3–1-12: Llamada al módulo `Kperfil`.

```
K = Kperfil(Q, U, w, e, m, s)
```

La entrada del módulo consta de:

- Los vectores *Q* y *U* contienen, respectivamente, las frecuencias asociadas a las coordenadas *D* y *X*.

- Los escalares *w*, *e*, *m* y *s* contienen, respectivamente, la frecuencia de la antena y la permitividad eléctrica, permeabilidad magnética y conductividad eléctrica promedio del medio.

El módulo devuelve como salida una matriz con las frecuencias *K* asociadas a las frecuencias *Q* para cada valor de la frecuencia *U*.

3.1.8.3. `dKdQperfil`

La llamada a este método se muestra en la Tabla 3–1–13:

Tabla 3–1-13: Llamada al módulo `dKdQperfil`.

```
diferencial = dKdQperfil(K, U, w, e, m, s)
```

La entrada del módulo consta de:

- Los vectores *K* y *U* contienen, respectivamente, las frecuencias asociadas a las coordenadas *D* y *X*.
- Los escalares *w*, *e*, *m* y *s* contienen, respectivamente, la frecuencia de la antena y la permitividad eléctrica, permeabilidad magnética y conductividad eléctrica promedio del medio.

El módulo devuelve como salida una matriz con los valores de la derivada *dK*/*dQ* asociados a las frecuencias *K* para cada valor de la frecuencia *U*.

3.1.9. Módulo `spline3interp`

Este módulo interpola mediante splines cúbicos en una dimensión, haciendo uso de la expresión (3.3.3) de la obra de Press et al. (1994).

La llamada a este método se muestra en la Tabla 3–1–14:

Tabla 3–1-14: Llamada al módulo `spline3interp`.

```
yi= spline3interp(x, y, xi, yp1, ypn)
yi= spline3interp(x, y, xi)
```

La entrada del módulo consta de:

- Los vectores *x* e *y* contienen, respectivamente, los valores de las abscisas y ordenadas correspondientes a una cierta función.
- El vector *xi* contiene las abscisas donde se interpola dicha función.
- Los escalares *yp1* e *ypn* contienen los valores de la derivada primera de la función interpoladora en *x(1)* y *x(end)*. Estas son las condiciones adicionales necesarias para la determinación de la derivada segunda de la función interpoladora en los puntos de *x*, la cual se determina mediante una rutina

modificada de la rutina `spline` expuesta en la obra de Press et al. (1994). En el caso en que estos valores *yp1* e *ypn* no se incluyan, se asume la condición de derivada segunda en *x(1)* y *x(end)* igual a cero (splines naturales).

Se asume que *x* y *xi* son vectores ordenados, las abscisas x son todas distintas y que *xi* está contenido en *x*.

El módulo devuelve como salida el vector *yi*, que contiene los valores de las ordenadas resultado de interpolar en las ordenadas *xi*.

3.2. Determinación de las ondas reflejadas múltiples en cada traza

En el módulo `multiples_pd` se hace un seguimiento de la onda que parte del emisor, de acuerdo con las siguientes reglas:

- Las ondas que llegan a cada reflector se dividen: una parte es reflejada y la otra es transmitida, de acuerdo con los coeficientes apropiados.
- Por simplicidad, las ondas que regresan al dispositivo son registradas por el receptor, y no experimentan nuevas reflexiones.
- Las ondas transmitidas por el último reflector no podrán volver a ascender.

El seguimiento de cada onda finaliza cuando son transmitidas por el último reflector o cumplen las condiciones para el fin de cálculo anteriormente expuestas: no se considerarán ondas que llegarían a un tiempo superior a *LT2* (definido como la mitad del tiempo doble máximo del perfil), ni ondas cuya reflectividad aparente asociada sea menor, en módulo, a *r_minima*.

La reflectividad aparente es calculada para cada múltiple de acuerdo a las ideas expuestas en la Figura 3-1–1, y es actualizada tras cada reflexión o transmisión. Así mismo, conocida la distancia entre reflectores y la velocidad de propagación promedio, el tiempo de viaje de cada onda es actualizado simultáneamente a la reflectividad aparente.

Las reflectividades aparentes y profundidades equivalentes a los tiempos dobles de recorrido acumulados son almacenados en sendos vectores *nuevor* y *nuevoD*, respectivamente, que son la salida devuelta por el módulo.

3.3. Metodología de interpolación en la transformada de Fourier

En el Capítulo 2 se expuso la metodología para la interpolación en las transformadas de Fourier que se deriva de la generalización del Teorema del Muestreo para funciones con soporte acotado por la aplicación de una ventana general. En el mismo se estudió la relación entre la transformada inversa de la interpolación de la transformada directa y la función original, así como la relación entre la interpolación de la transformada inversa de la interpolación de la transformada directa y la función original.

Esta metodología es la más apropiada para efectuar dicha interpolación pero, como ya se mencionó, es muy costosa en términos de potencia y tiempo de cálculo. Con el objeto de solventar esta deficiencia, diversos autores proponen emplear funciones interpoladoras distintas de la transformada de Fourier de la ventana[2] (por ejemplo, Wen et al. (1988) proponen emplear una interpolación geométrica. Este tema es tratado en amplitud por Unser (2000) en su artículo recopilatorio). De entre todas las familias de funciones interpoladoras, se selecciona para este trabajo la familia de splines cúbicos (Lancaster y Šalkauskas, 1986; Späth, 1995), dada su simplicidad de cálculo y su similitud con la función seno cardinal.

Análogamente a como se operó en §2.4.1, en esta Subsección se estudia la interpolación mediante splines cúbicos de la transformada de Fourier directa. Para ello, se realiza una interpolación análoga a la realizada en la Figura 2–4–4 (d) para una función muestreada con soporte acotado constituida por suma de impulsos, y se compara el resultado así obtenido con el mostrado en dicha Figura. Este resultado se muestra en la Figura 3–3–1.

La transformada inversa del espectro así obtenido se muestra en la Figura 3–3–2, análoga a la Figura 2–5–5.

[2] En el caso que se trata en este trabajo la ventana es un pulso cuadrado, cuya transformada de Fourier es un miembro de la familia de los senos cardinales (Cf. §2.4.1.1, §2.4.2.1).

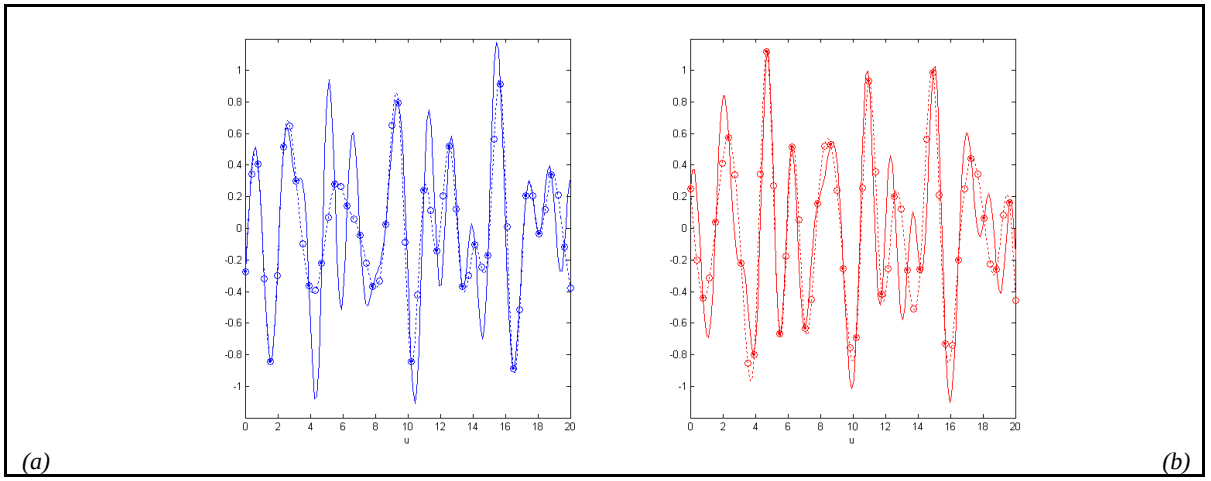


Figura 3–3-1: Interpolación en la transformada de Fourier directa mediante splines cúbicos, correspondiente al ejemplo II mostrado en §2.2 (Cf. Figura 2–4–4):

Transformada de Fourier $\left(F^{*0,05}_{0,025;\,h_8}\right)^{p/4}_{p/8;\,\mathrm{I}_{40p}}$ *(puntos) y transformada para interpolar* $\left(F^{*0,05}_{0,025;\,h_8}\right)(u)$ *(línea continua). Transformada interpolada (círculos) y función interpoladora mediante splines cúbicos (línea punteada). (Detalle).*

Se representa en azul (a) la parte real, en rojo (b) la parte imaginaria.

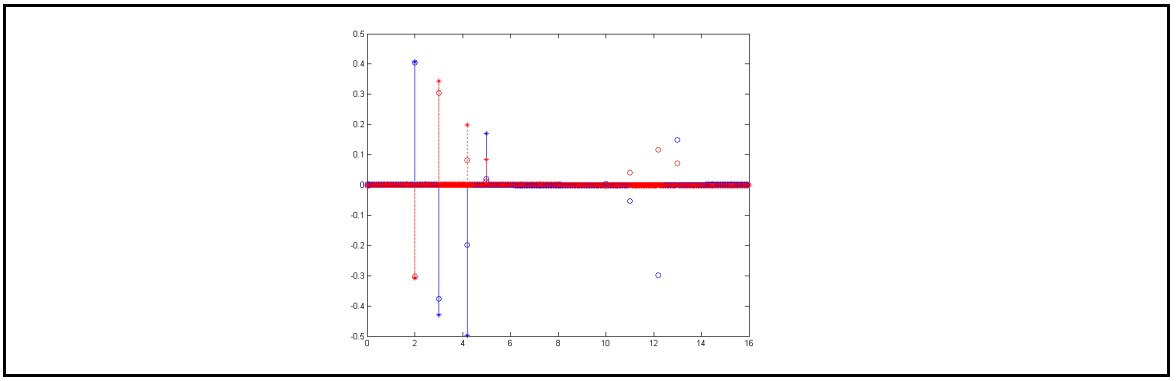


Figura 3–3-2: Relación entre la transformada inversa de la transformada directa interpolada mediante splines cúbicos y la función original, correspondiente al ejemplo II mostrado en §2.4.1.2 (I) (Cf. Figura 2–5–5):

Valores de la función muestreada con soporte acotado $g^{0,05}_{0,025;\,h_8}$ *(puntos) y valores de la transformada inversa de la interpolación de la transformada directa mediante splines cúbicos, corregida mediante una expresión análoga a 2.5.15 (círculos).*

Se muestra en azul la parte real, en rojo la parte imaginaria.

La característica más llamativa de la Figura 3–3–2 es la presencia de impulsos “fantasma” en la segunda mitad del perfil, correspondientes a la imagen especular de las señales presentes en la primera mitad. Este efecto numérico no se observa en los perfiles obtenidos mediante la aplicación del algoritmo descrito en el presente Capítulo, dada la ampliación de la Distribución de Densidad efectuada antes del cálculo de su espectro y la posterior reducción de la Sección Medida tras el cálculo de la transformada de Fourier inversa del espectro filtrado (Cf. 3.1.6).

Otra de las características importantes de dicha Figura es el que las amplitudes de los impulsos en la primera mitad no coinciden con las esperadas. Estas diferencias dependen exponencialmente de la posición respecto del origen de las señales, así como de la magnitud de su separación frente a la longitud del perfil, pero no de la magnitud de las señales.

Este efecto se ejemplifica en la Figura 3–3–3:

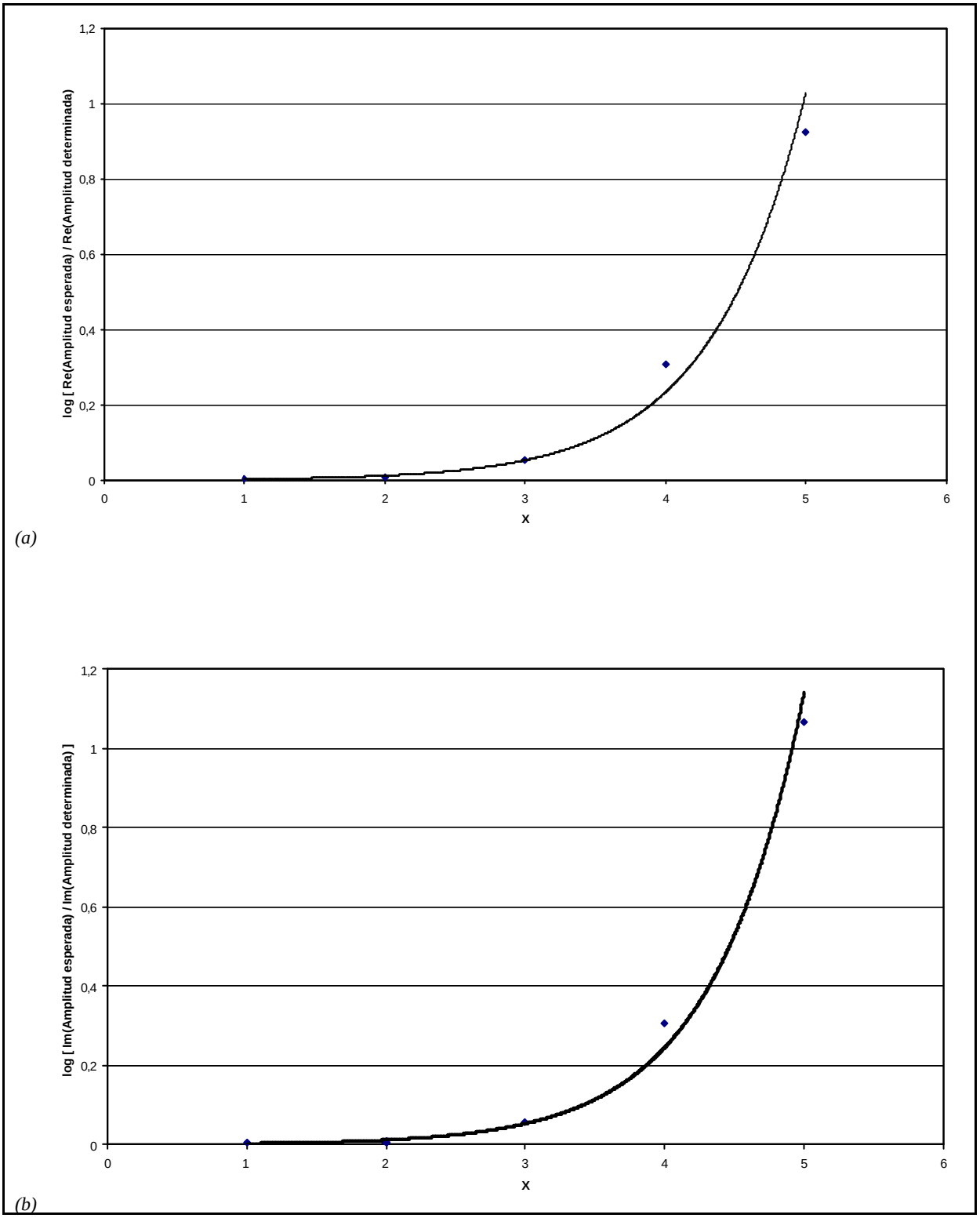


Figura 3–3-3: Comportamiento típico del logaritmo del cociente entre la amplitud esperada y la amplitud determinada vs. posición (puntos).

La figura (a) corresponde al cociente de las partes reales, la figura (b) al cociente de las partes imaginarias. La línea continua muestra un ajuste por mínimos cuadrados de los datos a una función de la forma $\log\left(\frac{\text{Amplitud esperada}}{\text{Amplitud determinada}}\right) = a \cdot e^{bX}$.

Este efecto, que equivale a un factor de atenuación espurio adicional, se debe al cambio de la función interpoladora. Como puede apreciarse en la Figura 3–3–1, la función interpoladora obtenida con los splines cúbicos permanece, en promedio, dentro de la región delimitada por la obtenida con los senos cardinales, por lo que el área delimitada por la función interpoladora obtenida con los splines cúbicos es menor que la delimitada por la obtenida con los senos cardinales. La aplicación del Teorema de Parseval (Marsden y Hoffman, 1993, §10.2.4) a la transformación de Fourier conduce a la relación (Papoulis, 1962, §2–5;Marsden y Hoffman, 1993, Tabla 10.5–3):

? **FÓRMULA DE PARSEVAL.** Si $F(u)$ es la transformada de Fourier de $f(x)$, entonces:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \left| f(t) \right|^2 = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} du \left| F(u) \right|^2 \tag{3.3.1}$$

?

De tal forma que la menor área subtendida por la función interpoladora obtenida con los splines cúbicos conduce a un decremento de la señal determinada.

A la vista de estos resultados, será preciso optar entre la interpolación mediante el seno cardinal, con el coste computacional que esto conlleva, o la interpolación mediante splines cúbicos, determinándose una corrección adecuada del factor de atenuación adicional. La determinación de esta corrección excede los objetivos de este Trabajo, y será discutida en los Capítulos subsiguientes.

Capítulo 4

Aplicación del algoritmo a modelos sencillos

Introducción

En este cuarto Capítulo se exponen y analizan los resultados de la aplicación de este algoritmo a distintos modelos sencillos.

Se encuentra dividido en seis Secciones dedicadas, respectivamente:

- A la determinación del perfil resultante de considerar como modelo una colección de puntos difractores aislados.[1]
- A la determinación del perfil resultante de considerar como modelo un reflector plano con aberturas.
- A la determinación del perfil resultante de considerar como modelo dos reflectores plano-paralelos.
- A la determinación del perfil resultante de considerar como modelo una colección de semiplanos y segmentos reflectores con reflectividades y transmisividades constantes.
- A la determinación del perfil resultante de considerar como modelo una colección de semiplanos y segmentos reflectores con reflectividades y transmisividades realistas.
- A la exposición, a modo de compilación, de los principales resultados obtenidos.

Se considera que aparece difracción cuando el tamaño de los cuerpos y las aberturas es del mismo orden de magnitud que la longitud de onda. En el caso en que el tamaño de los cuerpos es mucho mayor que la longitud de onda, cada punto del cuerpo se comporta como un emisor de radiación, y se observa la interferencia entre estas señales como una reflexión. En el caso en que el tamaño de los cuerpos es mucho menor que la longitud de onda, no son detectables (Mejías Arias y Martínez Herrero, 1999).

[1] Se considera que aparece difracción cuando las propiedades electromagnéticas en el medio cambian en una longitud del orden de la longitud de la onda.

4.1. Determinación del perfil resultante de considerar como modelo una colección de puntos difractores aislados

En esta subsección se considera como modelo una colección de puntos difractores aislados, con el objeto de comprobar la aparición de difracción en los mismos.

4.1.1. Descripción del modelo

La descripción del modelo se detalla en la Tabla 4–1–1:

Tabla 4–1-1: Descripción del modelo para el estudio de puntos difractores aislados.

Caracterización del perfil:	PET = 512 LT = 50 ns PEX = 350 LX = 15 m
Frecuencia de la antena:	900 MHz
Caracterización de la matriz:	
Velocidad de propagación media ($cm \cdot ns^{-1}$):	14,40
Factor de atenuación medio (m^{-1}):	0
Caracterización de los puntos difractores:	
Reflectividad:	r = 0,8
Posición (m):	x_1 = 7,5; z_1 = 0,50 x_2 = 7,5; z_2 = 1,00 x_3 = 7,5; z_3 = 1,50 x_4 = 7,5; z_4 = 2,00 x_5 = 7,5; z_5 = 2,50 x_6 = 7,5; z_6 = 3,00 x_7 = 7,5; z_7 = 3,50

4.1.2. Sección de Índices

El modelo consta de puntos difractores separados 0,50 m en profundidad. La Sección de Índices (Cf. §3.1.1) correspondiente a este modelo se muestra en la Figura 4-1–1:

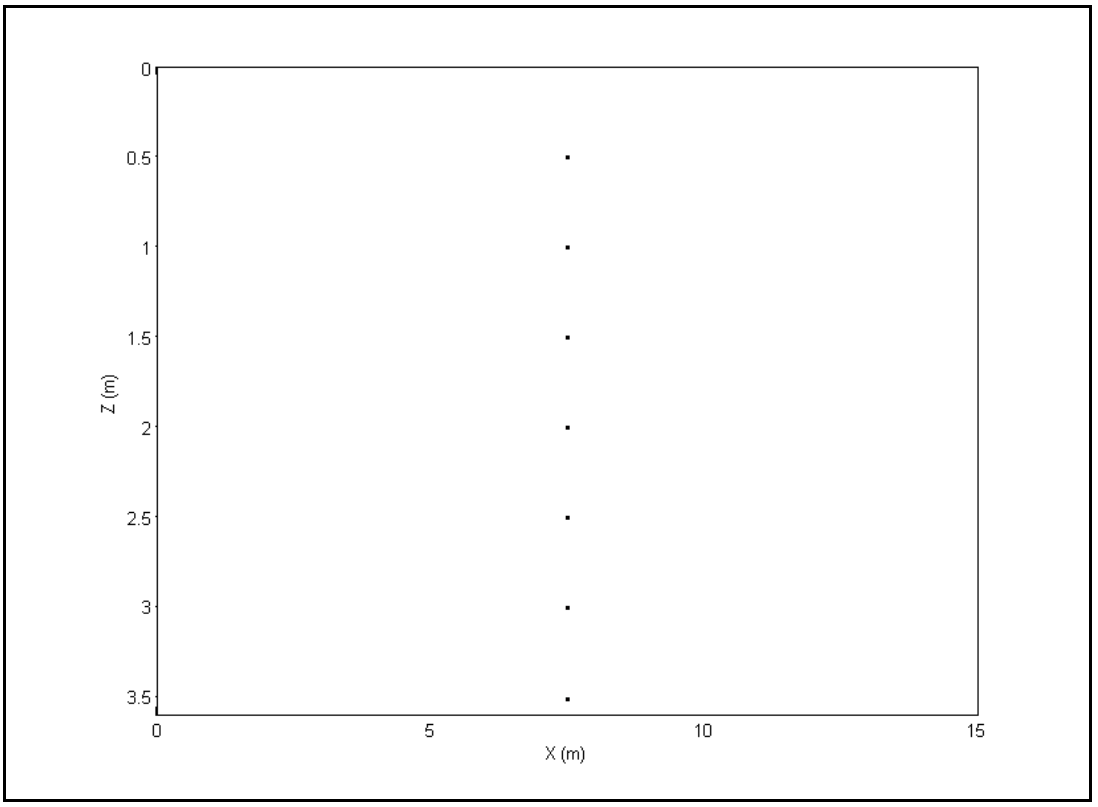


Figura 4–1-1: Sección de Índices correspondiente al modelo para el estudio de puntos difractores aislados.

4.1.3. Sección Medida

La Sección Medida correspondiente a este modelo se muestra en la Figura 4-1–2:

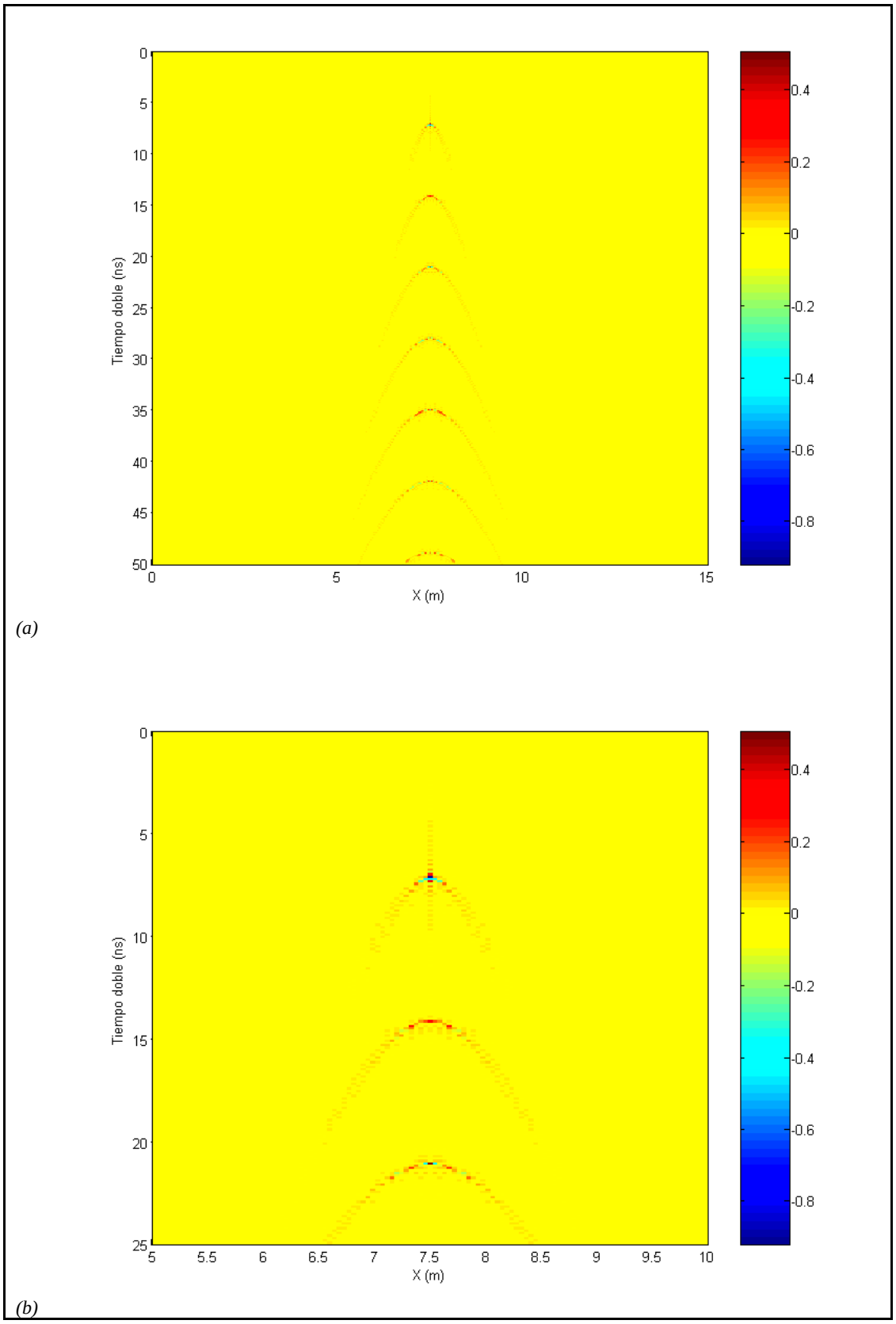


Figura 4–1-2: Sección Medida correspondiente al modelo para el estudio de puntos difractores aislados.

(a) Visión general. (b) Detalle.

En la Figura 4–1–2 puede apreciarse la presencia de hipérbolas de difracción en los puntos esperados, con las características esperadas.

Así mismo, dada las características de la ampliación de la Distribución de Densidad efectuada antes del cálculo de su espectro y la posterior reducción de la Sección Medida tras el cálculo de la transformada de Fourier inversa del espectro filtrado (Cf. 3.1.6), no se observan señales “fantasma” en la región inferior del radargrama.

Es interesante mencionar la presencia de ondulaciones en las regiones superior e inferior a la localización de las señales con amplitud grande (primer difractor). Este es un efecto numérico inherente a la transformada de Fourier, que deberá ser tenido en cuenta en la interpretación de estos radargramas.

4.2. Determinación del perfil resultante de considerar como modelo un reflector plano con aberturas

En esta subsección se considera como modelo un reflector plano con aberturas de distinto tamaño, con el objeto de comprobar la aparición de ondas difractadas y con el tamaño de la abertura.

4.2.1. Descripción del modelo

La descripción del modelo se detalla en la Tabla 4–2–1:

Tabla 4–2-1: Descripción del modelo para el estudio de un reflector plano con aberturas.

Caracterización del perfil:	*PET* = 512 *LT* = 50 ns *PEX* = 350 *LX* = 15 m
Frecuencia de la antena:	900 MHz
Caracterización de la matriz:	
Velocidad de propagación media ($cm \cdot ns^{-1}$):	14,40
Factor de atenuación medio (m^{-1}):	0
Caracterización del plano reflector:	
Reflectividad:	*r* = 0,8
Posición (m):	*z* = 1,00
Tamaño de las aberturas (m):	0,04 0,09 0,13 0,17 0,21 0,26 0,30 0,34 0,37 0,43

4.2.2. Sección de Índices

El modelo consta un reflector plano, interrumpido por una serie de aberturas de tamaño creciente de izquierda a derecha. La Sección de Índices correspondiente a este modelo se muestra en la Figura 4-2–1:

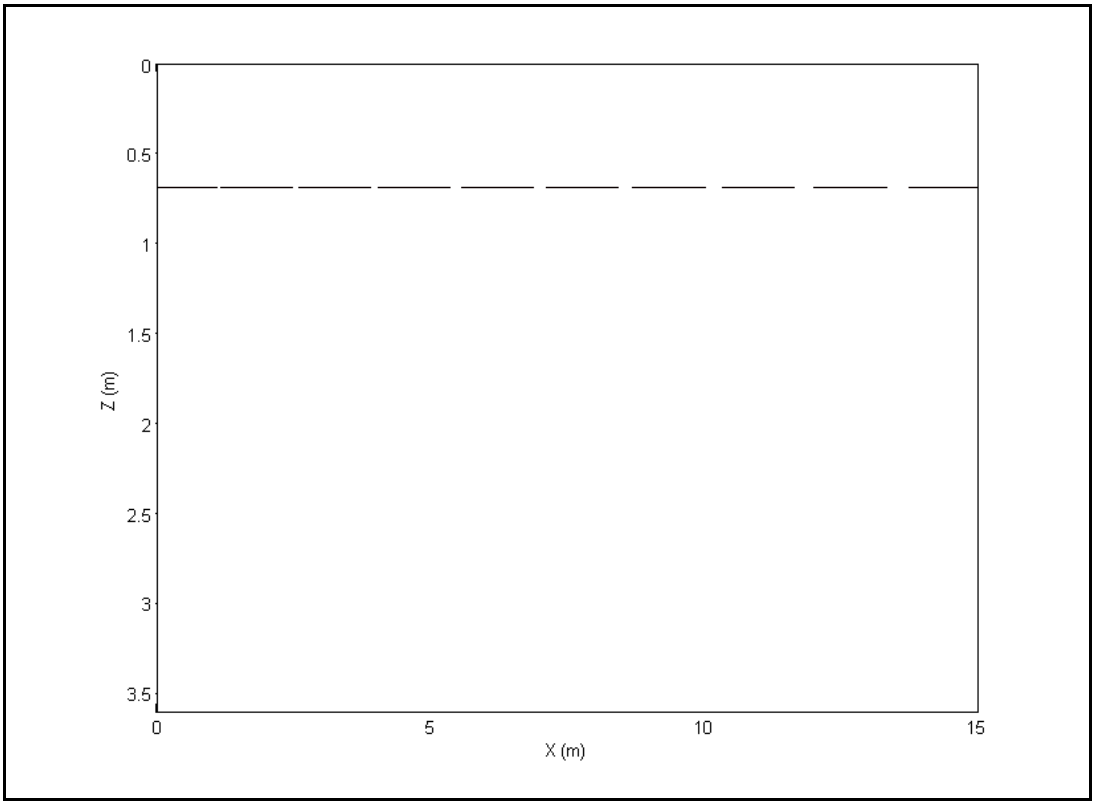
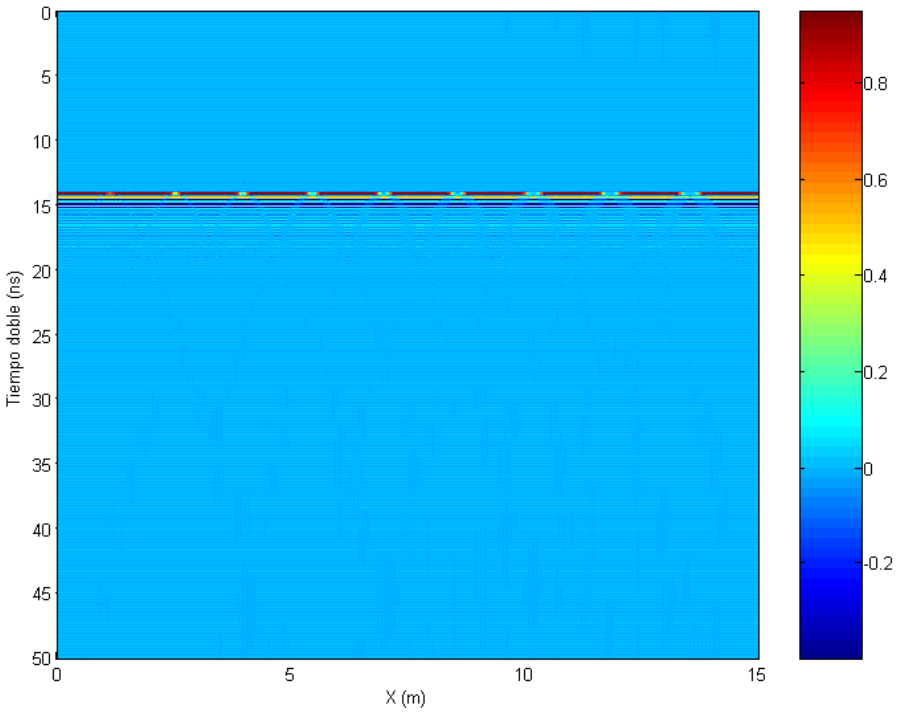


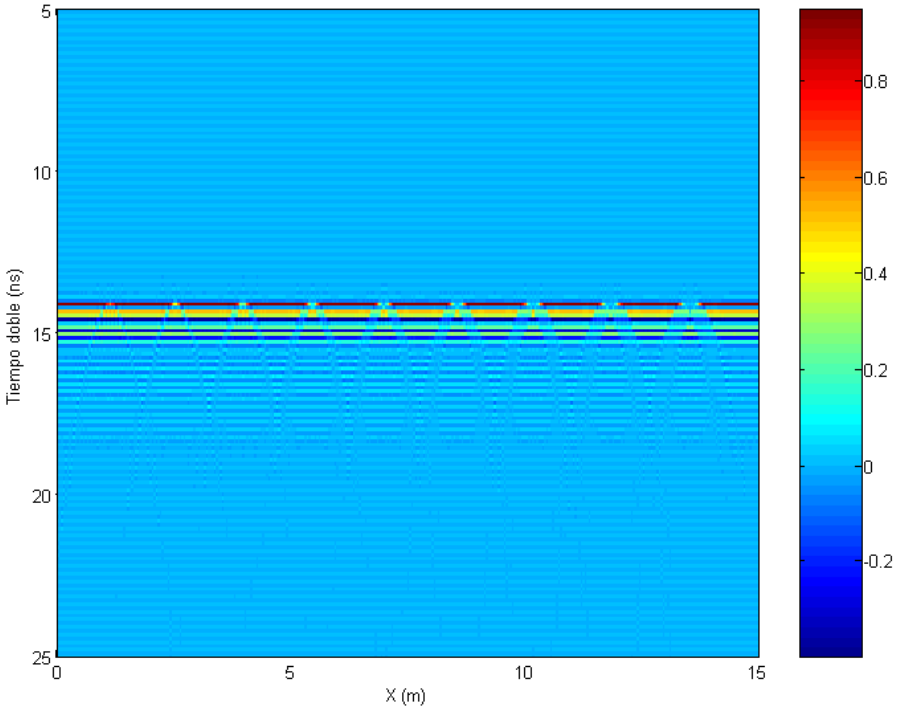
Figura 4–2-1: Sección de Índices correspondiente al modelo para el estudio de la difracción por aberturas.

4.2.3. Sección Medida

La Sección Medida correspondiente a este modelo se muestra en la Figura 4-2–2:



(a)



(b)

Figura 4–2-2: Sección Medida correspondiente al modelo para el estudio de la difracción por aberturas.

(a) Visión general. (b) Detalle.

En la Figura 4-2–2 puede apreciarse la reflexión en el plano, así como el efecto de la difracción en las aberturas, tanto más notorio cuanto mayor son éstas, con las características esperadas.

Así mismo, dada las características de la ampliación de la Distribución de Densidad efectuada antes del cálculo de su espectro y la posterior reducción de la Sección Medida tras el cálculo de la transformada de Fourier inversa del espectro filtrado (Cf. 3.1.6), no se observan señales “fantasma” en las regiones laterales del radargrama.

Nuevamente, puede observarse la presencia de ondulaciones en las regiones superior e inferior a la localización del plano reflector.

4.3. Determinación del perfil resultante de considerar como modelo dos reflectores plano-paralelos

En esta subsección se considera como modelo dos reflectores plano-paralelos, con el objeto de comprobar la aparición de las ondas reflejadas múltiples.

4.3.1. Descripción del modelo

La descripción del modelo se detalla en la Tabla 4–3–1:

Tabla 4–3-1: Descripción del modelo para el estudio de reflectores plano-paralelos.

Caracterización del perfil:	PET = 512 LT = 50 ns PEX = 350 LX = 15 m
Frecuencia de la antena:	900 MHz
Caracterización de la matriz:	
Velocidad de propagación media ($cm \cdot ns^{-1}$):	14,40
Factor de atenuación medio (m^{-1}):	0,0030
Caracterización de los planos reflectores:	
Reflectividad:	r = 0,8
Transmisividad descendente:	t_d = 0,6
Transmisividad ascendente:	t_a = 0,6
Posición (m):	z_1 = 0,10 z_2 = 0,50

4.3.2. Sección de Índices

El modelo consta de dos planos reflectores paralelos separados 0,40 m en profundidad. La Sección de Índices correspondiente a este modelo se muestra en la Figura 4-3–1:

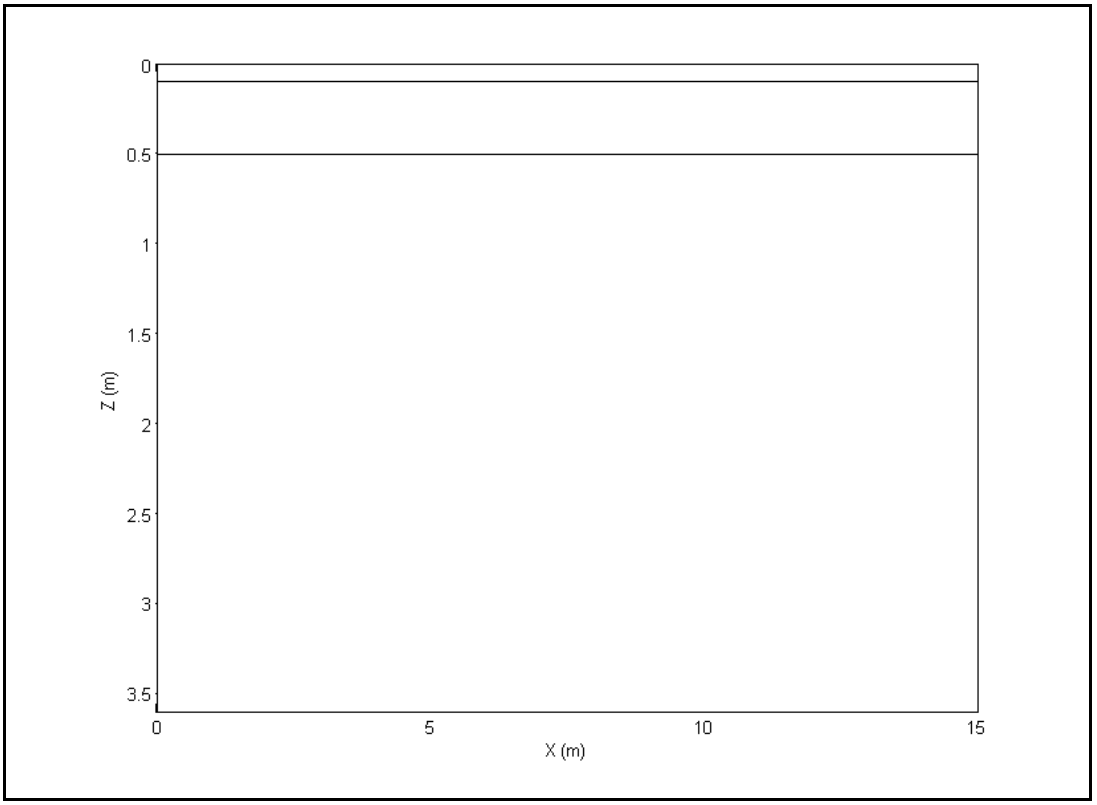


Figura 4–3-1: Sección de Índices correspondiente al modelo para el estudio de las ondas reflejadas múltiples.

4.3.3. Sección Medida

La Sección Medida correspondiente a este modelo se muestra en la Figura 4-3–2.

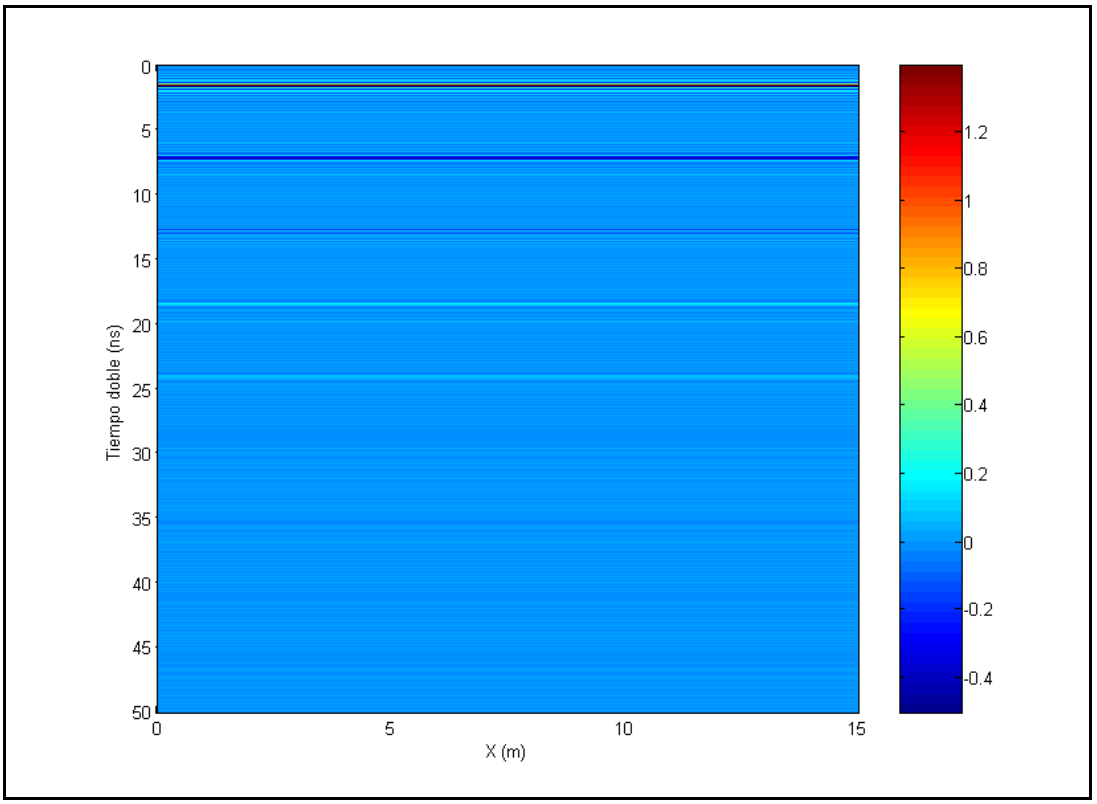


Figura 4–3-2: Sección Medida correspondiente al modelo para el estudio de las ondas reflejadas múltiples.

En la Figura 4–3–2 puede apreciarse la presencia de las ondas reflejadas múltiples, con las características esperadas.

Nuevamente, puede observarse la presencia de ondulaciones en las regiones superior e inferior a la localización de las llegadas de las múltiples.

4.4. Determinación del perfil resultante de considerar como modelo una colección de semiplanos y segmentos reflectores con reflectividades y transmisividades constantes

En esta subsección se considera como modelo una colección de semiplanos y segmentos reflectores con reflectividades y transmisividades constantes, con el objeto de comprobar la aparición simultánea de difracción y ondas reflejadas múltiples.

4.4.1. Descripción del modelo

La descripción del modelo se detalla en la Tabla 4–4–1:

Tabla 4–4-1: Descripción del modelo para el estudio de reflectores plano-paralelos.

Caracterización del perfil:	PET = 512 LT = 50 ns PEX = 350 LX = 15 m
Frecuencia de la antena:	900 MHz
Caracterización de la matriz:	
Velocidad de propagación media (cm·ns^{-1}):	14,40
Factor de atenuación medio (m^{-1}):	0,0030
Caracterización de los planos reflectores:	
Reflectividad:	r = 0,8
Transmisividad descendente:	t_d = 0,6
Transmisividad ascendente:	t_a = 0,6
Posición (m):	0,00 = x_1 = 15,00; z_1 = 0,10 0,00 = x_2 = 5,00; z_2 = 0,50 0,00 = x_3 = 5,00; z_3 = 1,00 5,00 = x_4 = 15,00; z_4 = 0,80 9,97 = x_5 = 10,06; z_5 = 0,49 9,97 = x_6 = 10,06; z_6 = 0,58
Reflectividad mínima para el cálculo de múltiples:	$r_{min} = 10^{-4}$

4.4.2. Sección de Índices

El modelo consta de una colección de semiplanos y segmentos reflectores con reflectividades y transmisividades constantes. La Sección de Índices correspondiente a este modelo se muestra en la Figura 4-4–1:

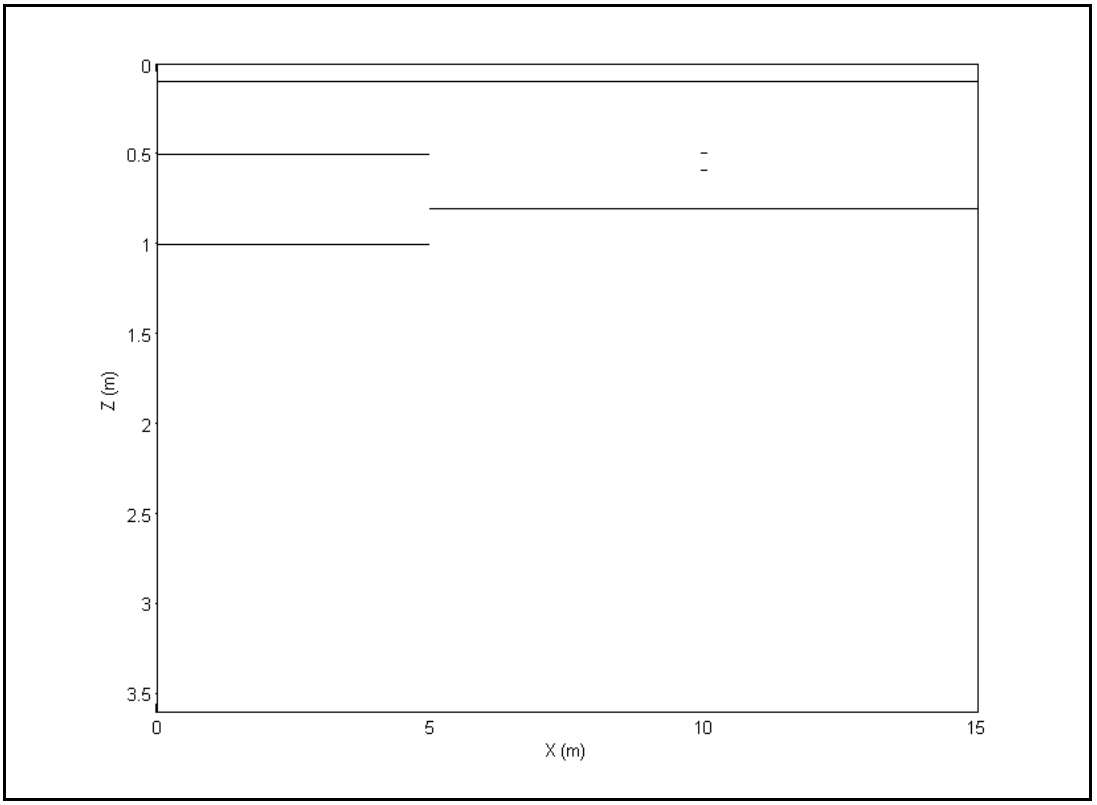


Figura 4–4-1: Sección de Índices correspondiente al modelo para el estudio de la difracción y las ondas reflejadas múltiples para una colección de semiplanos y segmentos reflectores con reflectividades y transmisividades constantes.

4.4.3. Sección Medida

La Sección Medida correspondiente a este modelo se muestra en la Figura 4-4–2:

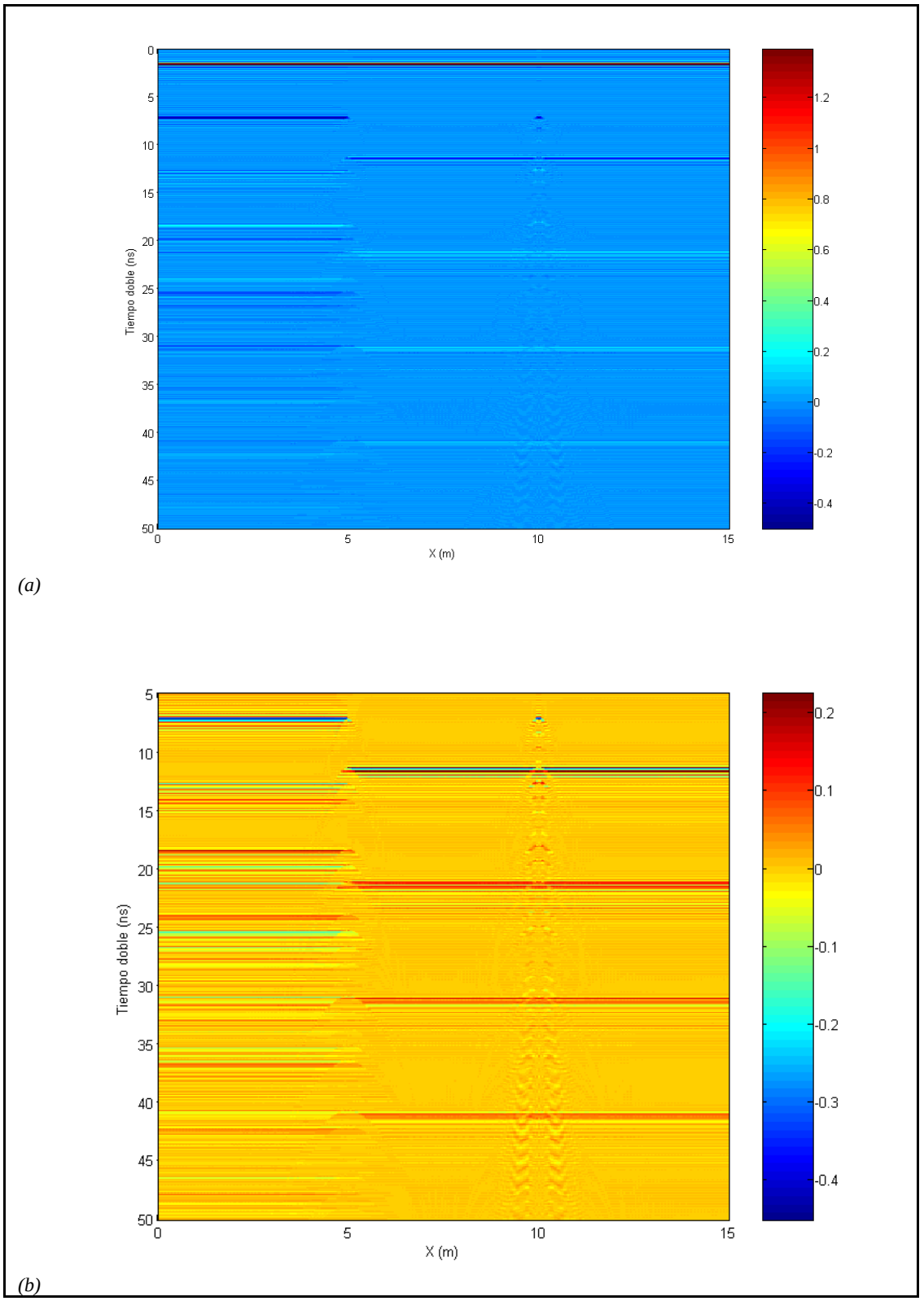


Figura 4–4-2: Sección Medida correspondiente al modelo para el estudio de la difracción y las ondas reflejadas múltiples para una colección de semiplanos y segmentos reflectores con reflectividades y transmisividades constantes.

(a) Visión general. (b) Detalle omitiendo la primera reflexión.

En la Figura 4–4–2 puede apreciarse la presencia tanto del efecto de la difracción como de las ondas reflejadas múltiples, con las características esperadas.

4.5. Determinación del perfil resultante de considerar como modelo una colección de semiplanos y segmentos reflectores con reflectividades y transmisividades realistas

En esta subsección se considera como modelo una colección de semiplanos y segmentos reflectores con reflectividades y transmisividades realistas, con el objeto de comprobar la aparición simultánea de difracción y ondas reflejadas múltiples.

4.5.1. Descripción del modelo

La descripción del modelo se detalla en la Tabla 4–4–1:

Tabla 4–5-1: Descripción del modelo para el estudio de reflectores plano-paralelos. Los valores de los parámetros electromagnéticos de los medios han sido tomados de la Tabla 2.1 de Lorenzo (1994).

Caracterización del perfil:	*PET* = 512 *LT* = 50 ns *PEX* = 350 *LX* = 15 m
Frecuencia de la antena:	900 MHz
Caracterización de la matriz:[2]	
Velocidad de propagación media ($cm \cdot ns^{-1}$):	14,40
Factor de atenuación medio (m^{-1}):	0,0030
Caracterización de los medios:	
Medio 1: Aire.	
Permitividad relativa:	1
Permeabilidad relativa:	1
Conductividad:	$0\ S \cdot m^{-1}$
Impedancia:	377 ohm
Factor de atenuación:	0
Velocidad de propagación:	$29{,}98\ cm \cdot ns^{-1}$
Medio 2: Arenas secas.	
Permitividad relativa:	2
Permeabilidad relativa:	1
Conductividad:	$10^{-4}\ S \cdot m^{-1}$
Impedancia:	$(266 + 0{,}133\ i)$ ohm
Factor de atenuación:	$1{,}33 \cdot 10^{-2}$
Velocidad de propagación:	$21{,}20\ cm \cdot ns^{-1}$
Medio 3: Cobre.	
Permitividad relativa:	4
Permeabilidad relativa:	1
Conductividad:	$10^{-7}\ S \cdot m^{-1}$
Impedancia:	$(0{,}0600 + 0{,}006\ i)$ ohm
Factor de atenuación:	$5{,}96 \cdot 10^{5}$
Velocidad de propagación:	$10^{-3}\ cm \cdot ns^{-1}$
Medio 4: Arenisca seca.	
Permitividad relativa:	6
Permeabilidad relativa:	1
Conductividad:	$10^{-7}\ S \cdot m^{-1}$
Impedancia:	$(154 + 2{,}56 \cdot 10^{-5}\ i)$ ohm
Factor de atenuación:	$7{,}68 \cdot 10^{-6}$
Velocidad de propagación:	$12{,}24\ cm \cdot ns^{-1}$
Medio 5: Granito seco.	
Permitividad relativa:	5
Permeabilidad relativa:	1
Conductividad:	$10^{-8}\ S \cdot m^{-1}$
Impedancia:	$(168 + 3{,}36 \cdot 10^{-6}\ i)$ ohm
Factor de atenuación:	$7{,}70 \cdot 10^{-7}$
Velocidad de propagación:	$13{,}41\ cm \cdot ns^{-1}$

[2] En el cálculo de las características promedio de la matriz no se considera el medio 1 (Aire) y 3 (metal), pues son poco representativos.

Tabla 4–5-1 (Continuación)

Caracterización de los planos reflectores:	
Índice 12:	
Reflectividad:	r_{12} = -0,1716 + 0,0002 i
Transmisividad descendente:	t_{12} = 0,8284 + 0,0002 i
Transmisividad ascendente:	t_{21} = 1,1716 – 0,0002 i
Posición (m):	0,00 = x_{12} = 15,00; z_{12} = 0,10
Índice 24:	
Reflectividad:	r_{24} = -0,2679 – 0,0002 i
Transmisividad descendente:	t_{24} = 0,7321 + 0,0002 i
Transmisividad ascendente:	t_{42} = 1,2679 + 0,0002 i
Posición (m):	0,00 = x_{42} = 5,00; z_{42} = 0,50
Índice 45:	
Reflectividad:	r_{45} = 0,0455 – 0,0000 i
Transmisividad descendente:	t_{45} = 1,0455 – 0,0000 i
Transmisividad ascendente:	t_{54} = 0,9545 + 0,0000 i
Posición (m):	0,00 = x_{45} = 5,00; z_{45} = 1,00
Índice 25:	
Reflectividad:	r_{25} = -0,2251 – 0,0000 i
Transmisividad descendente:	t_{25} = 0,7749 – 0,0002 i
Transmisividad ascendente:	t_{52} = 1,2251 + 0,0002 i
Posición (m):	5,00 = x_{25} = 15,00; z_{25} = 0,80
Índice 23:	
Reflectividad:	r_{23} = -1,0000 + 0,0000 i
Transmisividad descendente:	$t_{23} = 4{,}48 \cdot 10^{-5} + 4{,}47 \cdot 10^{-5}\, i$
Transmisividad ascendente:	t_{32} = 2,0000 – 0,0000 i
Posición (m):	9,97 = x_{23} = 10,06; z_{23} = 0,49
Índice 32:	
Reflectividad:	r_{32} = 1,0000 + 0,0000 i
Transmisividad descendente:	t_{32} = 2,0000 – 0,0000 i
Transmisividad ascendente:	$t_{23} = 4{,}48 \cdot 10^{-5} + 4{,}47 \cdot 10^{-5}\, i$
Posición (m):	9,97 = x_{32} = 10,06; z_{32} = 0,58
Reflectividad mínima para el cálculo de múltiples:	$r_{min} = 10^{-4}$

4.5.2. Sección de Índices

El modelo consta de una colección de semiplanos y segmentos reflectores con reflectividades y transmisividades realistas. La Sección de Índices correspondiente a este modelo se muestra en la Figura 4-5–1:

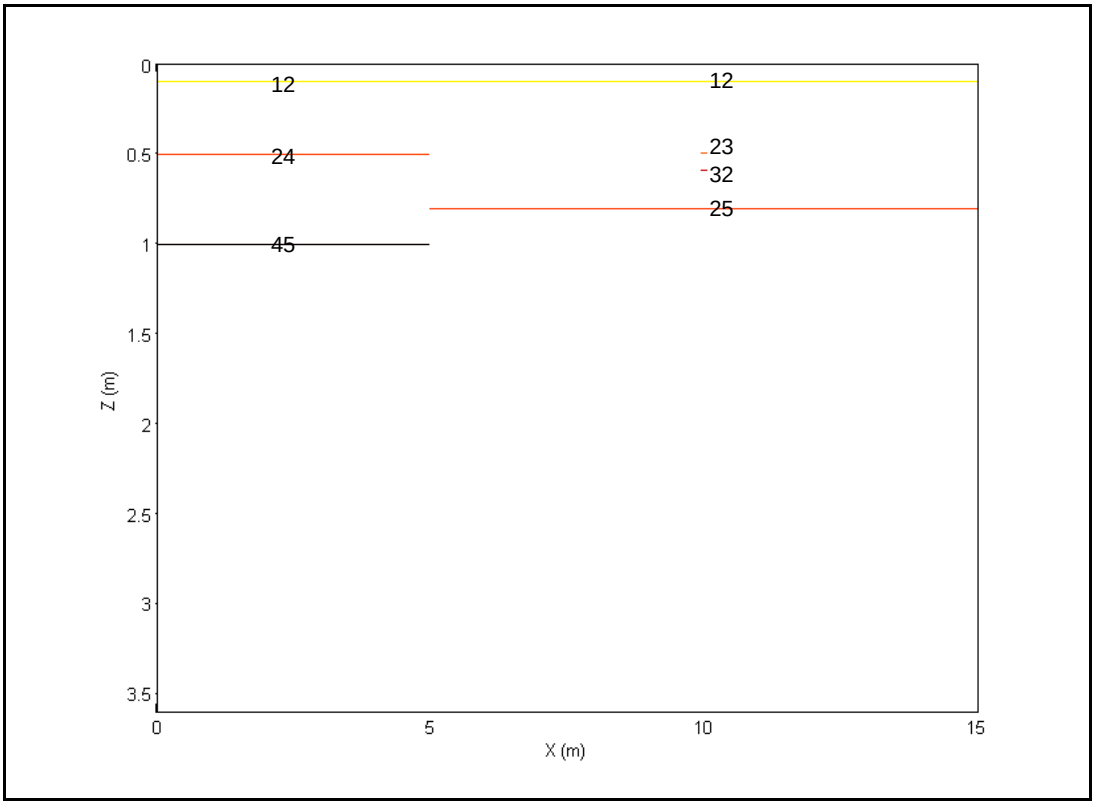
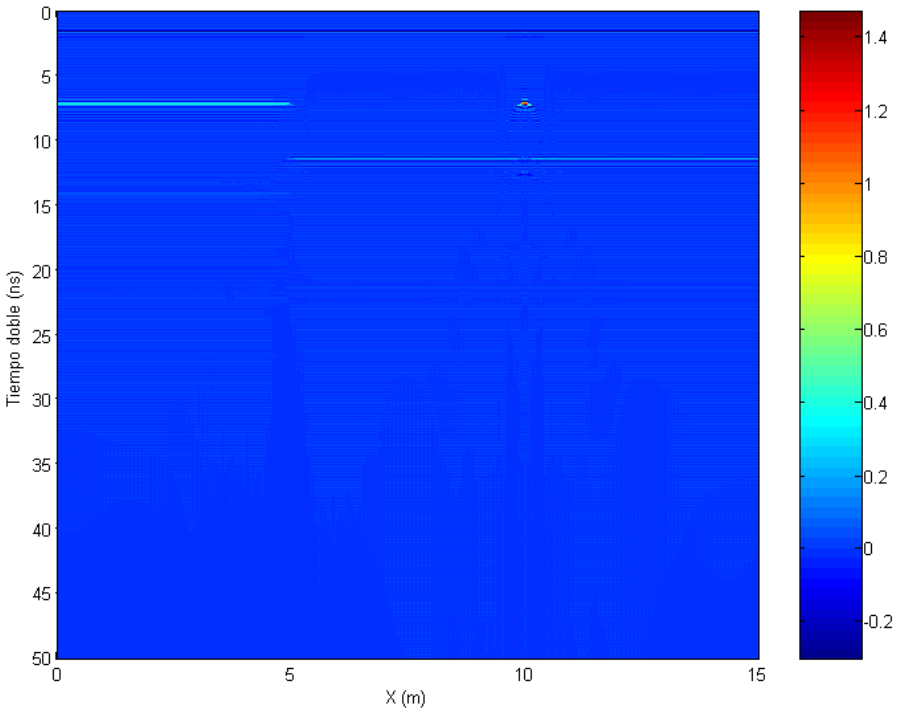


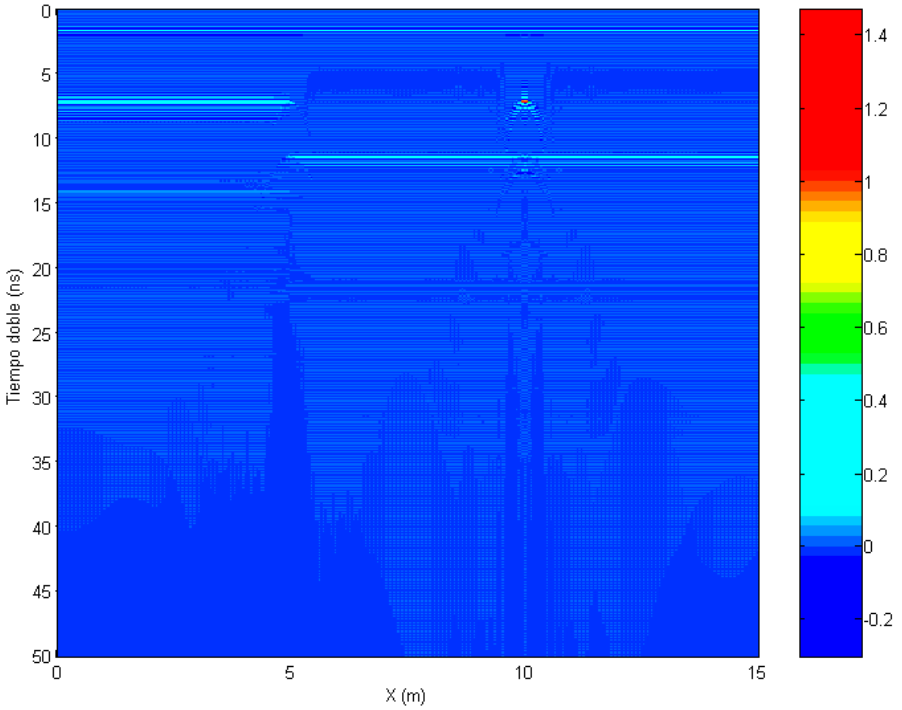
Figura 4–5-1: Sección de Índices correspondiente al modelo para el estudio de la difracción y las ondas reflejadas múltiples para una colección de semiplanos y segmentos reflectores con reflectividades y transmisividades realistas. El índice se muestra sobre cada reflector.

4.5.3. Sección Medida

La Sección Medida correspondiente a este modelo se muestra en la Figura 4-5–2:



(a)



(b)

Figura 4–5-2: Sección Medida correspondiente al modelo para el estudio de la difracción y las ondas reflejadas múltiples para una colección de semiplanos y segmentos reflectores con reflectividades y transmisividades realistas.

(a) Visión general. (b) Imagen anterior aumentando la saturación y la luminosidad.

En la Figura 4-5–2 puede apreciarse la presencia tanto del efecto de la difracción como de las ondas reflejadas múltiples, con las características esperadas.

Las mayores amplitudes se detectan en la primera reflexión (en la interfaz aire–tierra) y en la primera reflexión en la tubería metálica, limitada por los reflectores 23 y 32 en la Figura 4-5-1.

4.6. Recapitulación

En este cuarto Capítulo se exponen y analizan los resultados de la aplicación de este algoritmo a distintos modelos sencillos.

En todos los casos se aprecian correctamente los efectos de la difracción y la presencia de ondas reflejadas múltiples, con las características esperadas.

Así mismo, dada las características de la ampliación de la Distribución de Densidad efectuada antes del cálculo de su espectro y la posterior reducción de la Sección Medida tras el cálculo de la transformada de Fourier inversa del espectro filtrado (Cf. 3.1.6), no se observan señales “fantasma” en las regiones que bordean el radargrama.

Es interesante mencionar la presencia de ondulaciones en las regiones superior e inferior a la localización de los puntos difractores y planos reflectores. Este es un efecto numérico inherente a la transformada de Fourier, que deberá ser tenido en cuenta en la interpretación de estos radargramas.

Conclusiones

En este Trabajo se diseña un algoritmo para la síntesis numérica de radargramas, incluyendo tanto el efecto de la difracción como la presencia de reflexiones múltiples. Este algoritmo para la resolución del Problema Directo se desarrolla para un modelo de Tierra simplificado, consistente en una colección de puntos difractores y reflectores plano-paralelos, inmersos en una matriz homogénea e isótropa, con incidencia normal de la radiación.

Para el desarrollo de este algoritmo se empleará una metodología inversa a la expuesta por Stolt (1978) para la migración de perfiles sísmicos en el espacio frecuencial mediante resolución de la Ecuación de Ondas en el dominio frecuencial, particularizándose para la propagación de ondas electromagnéticas en el rango de frecuencias del geo-radar. Dadas las características de este método, la difracción aparece en forma natural. Las reflexiones múltiples se obtienen mediante la introducción, previa a la resolución de la Ecuación de Ondas, de una colección de reflectores ficticios asociados a cada reflexión múltiple, que son determinados mediante un procedimiento análogo al trazado de rayos.

En la aplicación del algoritmo a diversos casos sencillos se obtienen resultados cualitativamente apropiados, con las características esperadas dadas las aproximaciones que se manejan. No se espera que los resultados sean cuantitativamente adecuados, debido al efecto, equivalente a un factor de atenuación espurio adicional, causado por la interpolación del espectro mediante splines cúbicos en lugar de senos cardinales.

Una vez que se ha comprobado que la metodología desarrollada en este Trabajo es adecuada para el tratamiento cualitativo de los perfiles de geo-radar, la continuación natural de este Trabajo se orientará en las siguientes direcciones:

- Determinación de la corrección necesaria para eliminar el efecto de la interpolación en el espectro mediante splines cúbicos en lugar de senos cardinales.

  Esto puede realizarse bien de forma analítica, comparando las propiedades de ambas funciones interpoladoras (Aldroubi et al., 1992; Unser, 2000), bien en forma numérica, mediante la realización de un análisis de regresión.

- Eliminación de las aproximaciones realizadas.

  De entre éstas, las más restrictivas son la suposición de la constancia de los parámetros electromagnéticos en todo el medio y la suposición de la incidencia normal. Es posible soslayar estas aproximaciones efectuando nuevos cambios de coordenadas previos a la resolución de la Ecuación de Ondas escalar en el dominio frecuencial (Stolt, 1978).

- Validación del algoritmo.

  Una vez obtenido un algoritmo operativo para modelos realistas, se podrá proceder a la validación de los resultados obtenidos mediante comparación con medidas realizadas sobre modelos reales reducidos (Pérez Gracia, 2001).

Es importante señalar que, dada la aproximación de incidencia normal de la radiación, en el desarrollo efectuado en esta Memoria no ha sido tenida en cuenta ni la emisividad de la antena ni su patrón de radiación. Una vez eliminada esta restricción, el efecto de las antenas debe ser introducido en la fase de trazado de rayos previa a la resolución de la Ecuación de Ondas en el dominio frecuencial.

La metodología desarrollada es apta para resolver el Problema Inverso (éste es, de hecho, el primero que se resuelve). En ese caso se aplica en primer lugar el filtrado al espectro de la Sección, y en un segundo paso se efectúa un trazado de rayos para eliminar las reflexiones múltiples. Del estudio de las amplitudes y fases se deducen las propiedades electromagnéticas de los medios.

Así mismo, esta metodología se desarrolla para un único perfil, pero es válida tanto para una única traza como para el ensamblaje de varios perfiles; con lo que es posible realizar montajes y realizar representaciones en tres dimensiones.

Referencias bibliográficas

Aldroubi, A., M. Unser and M. Eden, 1992: "Cardinal spline filters: Stability and convergence to the ideal sinc interpolator". Signal Processing, 28 (2), 127-138. Citado por Unser, M., 2000: "Sampling–50 Years After Shannon". Proceedings of the Institute of Electrical and Electronic Engineers (IEEE), 88 (4), 569-587.

Andrews, L. C. and B. K. Shivamoggi, 1988: "Integral transforms for engineers and applied mathematicians". Macmillan Publishing Company. 353 pp.

Beres, M., P. Huggenberger, A. G. Green and H. Horstmeyer, 1999: "Using two- and three-dimensional georadar methods to characterize glaciofluvial architecture". Sedimentary Geology, 129 (1-2), 1-24.

Bernabini, M., E. Pettinelli, N. Pierdicca, S. Piro and L. Versino, 1995: "Field experiments for characterization of GPR antenna and pulse propagation". Journal of Applied Geophysics, 33 (1-3), 63-76.

Brigham, E. O., 1974: "The fast Fourier transform". Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J. 252 pp.

Carcione, J. M., 1996: "Ground-radar numerical modelling applied to engineering problems". European Journal of Environmental and Engineering Geophysics, 1, 65-81.

Carcione, J. M., H. Marcak, G. Seriani and G. Padoan, 2000: "GPR modeling study in a contaminated area of Krzywa Ari Base (Poland)". Geophysics, 65 (2), 521-525.

Carcione, J. M. and F. Cavallini, 2001: "A semianalytical solution for the propagation of electromagnetic waves in 3-D orthotropic media". Geophysics, 66 (4), 1141-1148.

Cardama Aznar, A., L. Jofre Rosa, J. M. Rius Casals, J. Romeu Robert y S. Blanch Boris, 1998: "Antenas". Edicions Universitat Politècnica de Catalunya (UPC), S. L. 454 pp.

Casper, D. A. and K.-J. S. Kung, 1996: "Simulation of ground-penetrating radar waves in a 2-D soil model". Geophysics, 61 (4), 1034-1049.

Chen, H.-W. and T.-M. Huang, 1998: "Finite-difference time-domain simulation of GPR data". Journal of Applied Geophysics, 40, 139-163.

Claerbout, J. J, 1971: "Toward a unified theory of reflector mapping". Geophysics, 36 (3), 467-481.

Da Silva Cezar, G., P. L. Ferrucio da Rocha, A. Buarque and A. da Costa, 2001: "Two Brazilian archaeological sites investigated by GPR: Serrano and Morro Grande". Journal of Applied Geophysics, 47 (3-4), 227-240.

Daubechies, I., 1992: "Ten Lectures on Wavelets". Society for Industrial and Applied Mathematics. CBMS-NSF. Regional conference series in applied mathematics; v. 61. 357 pp.

Debnath, L., 1995: "Integral Transforms and Their Applications". CRC Press, Inc. 457 pp.

Frenje, L. and C. Juhlin, 2000: "Scattering attenuation: 2-D and 3-D finite difference simulations vs. theory". Journal of Applied Geophysics, 44, 33-46.

Gloaguen, E., M. Chouteau, D. Marcotte and R. Chapuis, 2001: "Estimation of hydraulic conductivity of an unconfined aquifer using cokriging of GPR and hydrostratigraphic data". Journal of Applied Geophysics, 47 (2), 135-152.

Gordon, M. O., K. Broughton and M. S. A. Hardy, 1998: "The assessment of the value of GPR imaging of flexible pavements". NDT & E International, 31 (6), 429-438.

Hammon, W. S. III, G. A. McMechan and X. Zeng, 2000: "Forensic GPR: finite-difference simulation of responses from buried humans remains". Journal of Applied Geophysics, 45, 171-186.

Hanselman, D. and B. Littlefield, 1997: "The Student Edition of MATLAB: version 5, user's guide". The MathWorks, Inc. / Prentice-Hall, Inc. 429 pp.

Harris, J. W. and H. Stocker, 1998: "Handbook of Mathematics and Computational Science". Springer – Verlag. 1028 pp.

Hollender and F., S. Tillard, 1998: "Modelling ground-penetrating radar wave propagation and reflection with the Jonscher parametrization". Geophysics, 63 (6), 1933-1942. [1-D]

Hollender, F. , S. Tillard and L. Corin, 1999: "Multifold borehole radar acquisition and processing". Geophysical Prospecting, 47 (6), 1077-1090.

Holliger, K., M. Musil and H. R. Maurer, 2001: "Ray-based amplitude tomography for crosshole georadar data: a numerical assessment". Journal of Applied Geophysics, 47 (3-4), 285-298.

Hugenschmidt, J., M. N. Partl and H. de Witte, 1998: "GPR inspection of a mountain motorway in Switzerland". Journal of Applied Geophysics, 40 (1-3), 95-104.

Hugenschmidt, J., 2000: "Railway track inspection using GPR". Journal of Applied Geophysics, 43 (2-4), 147-155.

Jakobsen, P. R. and T. Overgaard, 2002: "Georadar facies and glaciotectonic structures in ice marginal deposits, northwest Zealand, Denmark". Quaternary Science Reviews, 21 (8-9), 917-927.

James, J. F., 1995: "A student's guide to Fourier transforms: with applications in physics and engineering". Cambridge University Press. 131 pp.

Jol, H. M, 1995: "Ground-penetrating radar antennae frequencies and transmitter power compared for penetration depth, resolution and reflection continuity". Geophysical Prospecting, 43 (5), 693-709.

Jones, D. S., 1982: "The Theory of Generalized Functions". Cambridge University Press, Cambridge. Citado por Debnath, L., 1995: "Integral Transforms and Their Applications". CRC Press, Inc. 457 pp.

Kaiser, G., 1994: "A friendly guide to wavelets". Birkhäuser. 300 pp.

Lancaster, P. and K. Šalkauskas, 1986: "Curve and Surface Fitting: An Introduction". Academic Press, Ltd. 280 pp.

Lehmann, F. and A. G. Green, 2000: "Topografic migration of georadar data: Implications for acquisition and processing". Geophysics, 65 (3), 836-848.

Lighthill, M. J., 1958: "Introduction to Fourier Analysis and Generalized Functions". Cambridge University Press, Cambridge. Citado por Debnath, L., 1995: "Integral Transforms and Their Applications". CRC Press, Inc. 457 pp.

Liu, L, C. Zhou and L. Xiao, 1998: "Imaging the interior of the Nathan Hale Monument in Coventry, Connecticut by GPR attenuation tomography". Proceedings of the Seventh International Conference on Ground-Penetrating Radar. Lawrence, Kansas (U. S. A.). Vol. II, 775-778.

Lorenzo, E., 1994: "Prospección geofísica de alta resolución mediante geo-radar. Aplicación a obras civiles". Tesis Doctoral. Universidad Complutense de Madrid. España. 201 pp.

Lorenzo, E., V. Cuéllar and M. C. Hernández, 1998: "GPR detection of archaeological galleries and tunnels". Proceedings of the Seventh International Conference on Ground-Penetrating Radar". Lawrence, Kansas (U. S. A.), 661-666.

Marsden, J. E. and M. J. Hoffman, 1993: "Elementary classical analysis". W. H. Freeman and Company. 738 pp.

Matthews, S. L., A. Goodier, S. Massey and K. Veness, 1998: "Permittivity measurements and analytical dielectric modelling of plain structural concretes". Proceedings of the Seventh International Conference on Ground-Penetrating Radar. Lawrence, Kansas (U. S. A.). 363-368.

McNamee, J., F. Stenger and E. L. Whitney, 1971: "Whittaker's Cardinal Function in Retrospect". Mathematics of Computation, 25 (113), 141-154.

Mejías Arias, P. M. y R. Martínez Herrero, 1999: "Óptica Geométrica". Editorial Síntesis, S. A. 208 pp.

Moran, M. L., R. J. Greenfield, S. A. Arcone and A. J. Delaney, 2000: "Multidimensional GPR array processing using Kirchhoff migration". Journal of Applied Geophysics, 43 (2-4), 281-295.

Nakashima, Y., H. Zhou and M. Sato, 2001: "Estimation of groundwater level by GPR in an area with multiple ambiguous reflections". Journal of Applied Geophysics, 47 (3-4), Pages 241-249.

Olsson, O., L. Falk, O. Forshund, L. Lundmark and E. Sandberg, 1992: "Borehole radar applied to the characterization of hydraulically conductive fracture zones in crystalline rock". Geophysical Prospecting, 40 (2), 109-142.

Papoulis, A., 1962: "The Fourier integral and its applications". McGraw Hill Book Company, Inc. 318 pp.

Partington, J. R. and B. Ünalmis, 2001: "On the Windowed Fourier Transform and Wavelet Transform of Almost Periodic Functions". Applied and Computational Harmonic Analysis, 10, 45-60.

Pérez Gracia, V., 2001: "Radar de subsuelo. Evaluación para aplicaciones en Arqueología y en Patrimonio Histórico-Artístico". Tesis Doctoral. Departamento de Ingeniería de Terreno, Cartografía y Geofísica. Universidad Politécnica de Cataluña. Barcelona (España). 971 pp.

Pettinelli, E., J. D. Redman, A. L. Endres and A. P. Annan, 1994a: "A test site for quantification of GPR responses". Proceedings of the Fifth International Conference on Ground-Penetrating Radar. Kitcherner, Ontario (Canada). 153-162.

Pettinelli, E., J. D. Redman, A. L. Endres, A. P. Annan and G. B. Johnson, 1994b: "GPR response quantification: initial processing and model testing". Proceedings of the Fifth International Conference on Ground-Penetrating Radar. Kitcherner, Ontario (Canada). 163-172.

Press, W. H., S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling and B. P. Flannery, 1992: "Numerical recipes in Fortran: The art of scientific computing", 2nd edition: Cambridge University Press. 953 pp.

Press, W. H., S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling and B. P. Flannery, 1996: "Numerical recipes in Fortran 90: The art of parallel scientific computing. Volume 2 of Fortran numerical recipes", 2nd edition. Cambridge University Press. 551 pp.

Robert, A., 1998: "Dielectric permittivity of concrete between 50 MHz and 1 GHz and GPR measurements for building materials evaluation. Journal of Applied Geophysics, 40 (1-3), 89-94.

Saintenoy, A. C. and A. Tarantola, 2001: "Ground-penetrating radar: Analysis of point diffractors for modelling and inversion". Geophysics, 66 (2), 540-550.

Shannon, C. E., 1949: "Communication in the Presence of Noise". Proceedings of the Institute of Radio Engineers (IRE), 37 (1), 10-21. Reimpreso en los Proceedings of the Institute of Electrical and Electronic Engineers (IEEE), 86 (2), 447-457, February 1998.

Späth, H., 1995: "Two Dimensional Spline Interpolacion Algorithms". A K Peters, Ltd. 304 pp.

Spiegel, M. R., J. Liu y L. Abellanas Rapún, 2000: "Fórmulas y tablas de matemática aplicada". McGraw-Hill / Interamericana de España, S. A. U. 2ª edición. 366 pp.

Stolt, R. H., 1978: "Migration by Fourier Transform". Geophysics, 43 (1), 23-48.

Suman, R. J. and R. J. Knight, 1997: "Effects of pore structure and wettability on the electrical resistivity of parcially saturated rocks". Geophysics, 62 (4), 1151-1162

Sutinen, R., 1992: "Glacial deposits, their electrical properties and surveying by image interpretation and ground penetrating radar". Geologycal Survey of finland. Bulletin 359. Geologian tutkmuskeskus. Espoo 1992. 123 pp.

Teixeira, T., E. Lorenzo y A. Da Costa, 2002: "Aplicação de GPR em meio ambiente: detecção do nivel freático e intrusão de água salina na praia de Itapuaçu, Maricá, Rio de Janeiro". Anales de la III Asamblea Hipano-Portuguesa de Geodesia y Geofísica. Valencia (España), 4-8 de febrero.

Tercier, P., R. Knight and H. Jol, 2000: "A comparison of the correlation structure in GPR images of deltaic and barrier spit depositional environments". Geophysics, 65 (4), 1142 & ss.

Tranter, C. J., 1956: "Integral Transforms in Mathematical Physics". Methuens's Monographs on Physical Subjetcs. Methuen & Co. Ltd. London. 133 pp.

Tronicke, J., N. Blindow, R. Groß and M. A. Lange, 1999: "Joint application of surface electrical resistivity- and GPR-measurements for groundwater exploration on the island of Spiekeroog—northern Germany". Journal of Hydrology, 223 (1-2), 44-53.

Udías, A. y A. López Arroyo, 1970: "Análisis de frecuencias y su programación". Revista de Geofísica, 29(1), 1-39.

Unser, M., 2000: "Sampling–50 Years After Shannon". Proceedings of the Institute of Electrical and Electronic Engineers (IEEE), 88 (4), 569-587.

Ursin, B., 1983: "Review of elastic and electromagnetic wave propagation in horizontally layered media". Geophysics, 48 (8), 1063-1081.

Vasco, D. W., J. E. Peterson, Jr., and K. H. Lee, 1997: "Ground-penetrating radar velocity tomography in heterogeneous and anisotropic media". Geophysics, 62 (6), 1758-1773.

Ward, S. H. and G. W. Hohmann, 1987: "Electromagnetic Theory for Geophysical Applications". Investigations in Geophysics, nº3: "Electromagnetic Methods in Applied Geophysics, volume 1: Theory", 131-311. Ed. by M. N. Nabighian. Society of Exploration Geophysicist (SEG).

Weisstein, E. W., 1999: “The CRC concise encyclopedia of mathematics”. CRC Press LLC. 1969 pp.

Wen, J., G. A. McMechan and M. W. Booth, 1988: “Three-dimensional modeling and migration of seismic data using Fourier transforms”. Geophysics, 53 (9), 1194-1201.

Whittaker, E. T., 1915: “On the Functions Which are Represented by the Expansions of the Interpolation Theory”. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. Section A, Mathematical and physical sciences, 35, 181-194.

Whittaker, J. M., 1927: “On the Cardinal Function of Interpolation Theory”. Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, 2, 41-46.

Whittaker, J. M., 1935: “Interpolatory Function Theory”. Cambridge University Press. 107 pp.

Witten, A. J., J. E. Molyneux and J. E. Nyquist, 1994: “Ground Penetrating Radar Tomography: Algorithms and Case Studies”. Institute of Electrical and Electronic Engineers (IEEE) Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 32 (2), 461-467.

Zeng, X., G. A. McMechan, J. Cai and H.-W. Chen, 1995: “Comparison of ray and Fourier methods for modeling monostatic ground-penetrating radar profiles”. Geophysics, 60 (6), 1727-1734.