Trabajo de Investigación del Tercer Ciclo

Dra. Ana María Negredo M<mark>oren</mark>o

Programa de doctorado en Física de la Tierra: Geofísica y Meteorología

MODELIZACIÓN GEODINÁMICA: DESARROLLO DE MODELOS TERMOMECÁNICOS Y APLICACIÓN AL MAR DE ALBORÁN

Juan-Luis Valera Rubio Mayo 2006



UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS DEPARTAMENTO DE FÍSICA DE LA TIERRA, ASTRONOMÍA Y ASTROFÍSICA I (GEOFÍSICA Y METEOROLOGÍA)

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS

DEPARTAMENTO DE FÍSICA DE LA TIERRA, ASTRONOMÍA Y ASTROFÍSICA I (GEOFÍSICA Y METEOROLOGÍA)

Programa de doctorado en Física de la Tierra: Geofísica y Meteorología

Trabajo de Investigación

MODELIZACIÓN GEODINÁMICA: DESARROLLO DE MODELOS TERMOMECÁNICOS Y APLICACIÓN AL MAR DE ALBORÁN

Juan-Luis Valera Rubio

Visto Bueno Directora:

Dra. Ana María Negredo Moreno Mayo 2006

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado dentro del tema de investigación "Modelización Geodinámica" bajo la dirección de la Dra. Ana María Negredo Moreno, del Departamento de Física de la Tierra, Astronomía y Astrofísica I de la Universidad Complutense de Madrid. Quiero agradecerle profundamente a ella su apoyo y sus consejos, así como la confianza que ha depositado en mí desde que un día le pedí ayuda para un trabajo de una asignatura de la carrera y que, en realidad, se ha convertido en la investigación que aún sigo desarrollando. También a su familia por su paciencia conmigo.

Quiero agradecer a todos aquellos que me han ayudado con sus recomendaciones, que han conocido mi trabajo y me han animado a seguir adelante: el Prof. Dr. Harro Schmelling, del *Institut für Meteorologie und Geophysik, Johann Wolfgang Goethe Universität Frankfurt am Main*; el Prof. Dr. Friedrich Busse, de la *University of Bayreuth*; la Dra. Ivone Jiménez-Munt y el Dr. Antonio Villaseñor, del Instituto de Ciencias de la Tierra Jaume Almera (CSIC).

Agradezco la colaboración a todos los profesores, personal y compañeros del Departamento de Física de la Tierra, Astronomía y Astrofísica I que me han apoyado en todo momento durante la realización de este trabajo. En particular, quiero agradecer a la Dra. Marisa Osete su confianza y el haberme animado a meterme en el estudio de la Geofísica y a la Dra. Elisa Buforn por haberme ofrecido mi primer a beca en la investigación.

Un reconocimiento especial merecen mis compañeros de tantas horas de comida y tantas infructuosas quedadas para ir al cine (entre otras cosas) por su apoyo, su ánimo y su amistad: Tatiana, Carmen, Jacques, Almudena, Paco y a Arancha, que aunque no es del Departamento, soporta nuestras discusiones con sano estoicismo.

Mi más profundo agradecimiento a mi familia y a mis amigos que han soportado mis noches de trabajo, mis agobios y, sobre todo, mis entusiastas explicaciones sobre un tema que no les interesaba pero que escuchaban por cariño y amistad. Y por lo que aún les queda...

Y por supuesto, se lo agradezco todo a Aquel que es el Primero y Último en mi vida.

Este trabajo ha sido realizado gracias a una beca predoctoral que la Universidad Complutense me concedió en mayo de 2005 y al proyecto BTE2002-02462 del Ministerio de Ciencia y Tecnología.

Índice del Trabajo de Investigación

1 Introducción.]
1.1 Mecanismos de rejuvenecimiento litosférico	1
1.2 Modelos previos	5
1.3 Objetivos	8
2 Estudio analítico y numérico de la ecuación de movimiento	Ģ
2.1 La Tierra como fluido	Ģ
2.2 Estudio analítico de la ecuación de movimiento	10
2.3 Estudio numérico de la ecuación de movimiento	16
2.3.1 Discretización de la ecuación de movimiento	16
2.3.2 Condiciones de contorno	20
2.3.3 Método matricial de resolución.	23
3 El Programa NASCEM (Navier-Stokes Complex Equation Model)	25
3.1 Introducción	25
3.2 Características generales del programa	25
3.3 Diagrama de flujo	27
3.4 Simulaciones	31
3.4.1 Modelos isoviscosos.	31
3.4.2 Modelo de viscosidad estratificada.	32
4 Aplicación del modelo dinámico al mar de Alborán y la cordillera Bético- Rifeña	36
4.1 Introducción	36
4.2 Modelos Conceptuales Propuestos	39
4.3 Modelo aplicado	41

4.4 Resultados	41
4.4.1 Adelgazamiento convectivo simétrico o remoción convectiva	42
4.4.2 Adelgazamiento convectivo asimétrico o Delaminación	42
4.4.3 Subducción	47
4.5 Conclusiones	51
5 Estudio analítico y numérico de la ecuación térmica.	52
5.1 Introducción	52
5.2 Estudio analítico de la ecuación térmica	52
5.3 El estado térmico inicial y la transición olivino-espinela	57
5.4 Estudio numérico de la ecuación térmica	61
5.4.1 Formulación en diferencias finitas de la ecuación de la energía.	62
5.4.2 Aplicación del Algoritmo de Thomas al esquema ADI de la ecuación de la energía.	65
6 Acoplamiento termomecánico	68
6.1 Descripción del acoplamiento	68
6.2 Descripción general del programa TESCH	69
6.3 Diagrama de flujo	70
6.4 Simulaciones	73
6.4.1 Simulaciones isoviscosas	74
6.4.2 Simulaciones con viscosidad dependiente de la temperatura	75
7 Conclusiones y líneas abiertas de investigación	81
8 Referencias	84
ANEXO: Esquema alternativo de discretización	89

1.- Introducción.

1.1. Mecanismos de Rejuvenecimiento Litosférico

La teoría de la Tectónica de Placas, desde su proposición inicial hasta la forma en que es propuesta en la actualidad, ha permitido comprender y dar una explicación satisfactoria de muchos de los procesos geodinámicos que ocurren en la Tierra. Sin embargo, hay aún ciertos problemas en geodinámica que continúan sin una explicación satisfactoria dentro del marco estándar de la Tectónica de Placas. Uno de estos problemas, especialmente interesante, es la aparición de extensión en regiones sometidas a convergencia.

Habitualmente se ha relacionado esta aparición con la sustitución de material del manto litosférico por material de la astenosfera, más caliente y menos denso. El consiguiente reajuste isostático provocaría elevación topográfica y extensión local, superando el régimen regional de convergencia. Los mecanismos que se han propuesto para explicar esta sustitución de material pueden englobarse bajo el nombre de "mecanismos de rejuvenecimiento litosférico".

Desde finales de los años 70 y principios de los 80, diferentes autores han ido proponiendo diversos modelos o mecanismos. Con una mirada retrospectiva podemos ahora decir que los mecanismos son tres: el adelgazamiento convectivo, que puede suceder de un modo asimétrico (figura 1.1.a) o simétrico (figura 1.1b) y procesos relacionados con la subducción, como la subducción de manto litosférico, arrastrado por una subducción oceánica (figura 1.1c).

El adelgazamiento convectivo asimétrico se conoce en la literatura como "delaminación" (Bird, 1979). Bird propuso que, si se creaba alguna zona de debilidad en el manto litosférico que pusiese en contacto la astenosfera y la corteza inferior, se crearía un contraste lateral de presiones que, con viscosidades suficientemente bajas, causaría que el material astenosférico se expandiese lateralmente por la base de la corteza, actuando como una "palanca" o "navaja" y desgajando progresivamente el manto litosférico de la corteza. (figura 1.2). Este manto desgajado o delaminado se

hundiría en el manto superior debido a su propio peso y a la convección. El ascenso de la astenosfera causaría elevación topográfica y extensión. En un principio, Bird no consideró la necesidad de un engrosamiento en la litosfera pero autores posteriores, modelizando el adelgazamiento convectivo estudiaron el establecimiento de la delaminación introduciendo una zona de baja viscosidad situada al lado del engrosamiento o "raíz engrosada" (figura 1.3). Actualmente, los modelos que consideran la delaminación parten siempre de una litosfera engrosada. (e. g. Schott y Schmeling, 1998; Marotta et al, 1999; Morency y Doin, 2004).

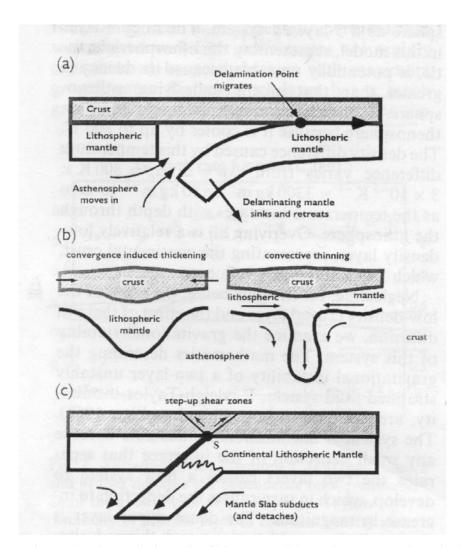


Figura 1.1: Mecanismos de rejuvenecimiento litosférico. 1.a) Adelgazamiento convectivo asimétrico o delaminación; 1b) Adelgazamiento convectivo simétrico o remoción convectiva; 1c) Subducción de manto litosférico continental. Explicaciones en el texto. Figura tomada de Houseman y Molnar, 2001.

El adelgazamiento convectivo simétrico o *remoción convectiva* fue propuesto en los años 80 y ha sido muy estudiado desde entonces. (e.g. Houseman et al., 1981; Conrad y Molnar, 1997; Houseman y Molnar, 2001; Molnar y Houseman, 2004.) Los

defensores de esta propuesta señalaron que cuando la litosfera continental sometida a un régimen de convergencia se engrosa para formar un orógeno, el manto litosférico, más denso que la astenosfera sobre la que reposa, puede alcanzar una situación de inestabilidad, denominada de tipo Rayleigh-Taylor. El propio peso de esa perturbación, del engrosamiento, provoca su desprendimiento del manto litosférico, y su hundimiento en la astenosfera. El orógeno, por tanto, pierde su "raíz" litosférica y el resultado es una corteza engrosada con un manto litosférico adelgazado (figura 1.4). Nuevamente, la consiguiente presencia de material astenosférico a bajas profundidades provocaría elevación topográfica y extensión.

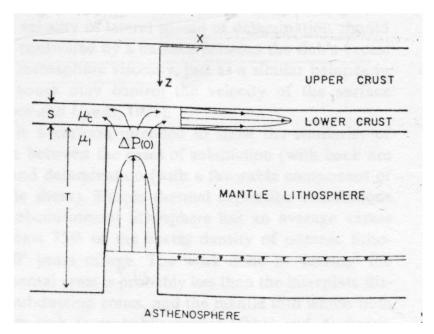


Figura 1.2. Mecanismo de delaminación propuesto por Bird en 1979. Figura tomada del artículo original.

La subducción de manto litosférico arrastrado por la subducción de una placa oceánica se ha propuesto también como un posible mecanismo capaz de generar extensión. En este mecanismo, el manto litosférico subducido se separa de la placa superior por la tensión entre el peso de la placa oceánica subducida y el empuje ascendente debido a la flotabilidad de la litosfera continental que queda en superficie. En respuesta a la carga eliminada, puede desarrollarse elevación topográfica de la superficie y extensión, junto con calentamiento de la litosfera por la sustitución del manto litosférico por material astenosférico. (e. g. Beaumont et al., 1994; Willet y Beaumont, 1994; Von Blanckenburg y Davies, 1995; van der Meulen et al., 1998).

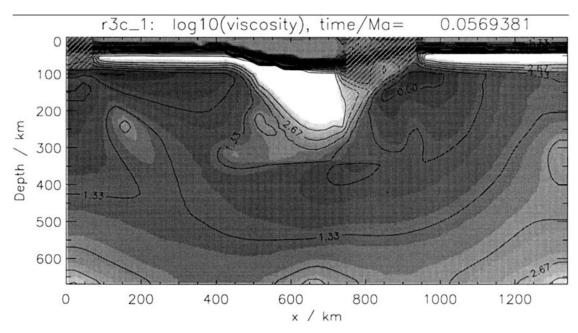


Figura 1.3: Modelo de Schott y Schmeling (1998) mostrando la amplia zona de baja viscosidad a la derecha de la perturbación (zona rayada en gris claro). Los grados de gris indican la viscosidad, los oscuros indican baja viscosidad, los claros indican alta viscosidad. Este modelo calcula la viscosidad dependiente de la temperatura y de la velocidad de deformación, pero trunca los resultados en un mínimo de 10²⁰ Pa.s (zona negra correspondiente a la corteza inferior) y un máximo de 10²⁵ Pa.s (zona blanca correspondiente al manto litosférico).

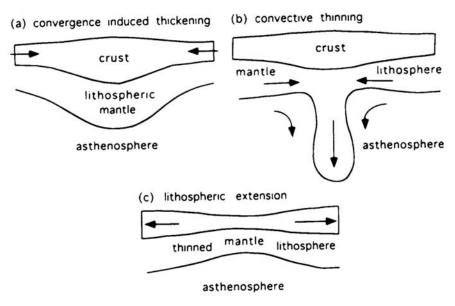


Figura 1.4: Modelo de evolución de la remoción convectiva. Explicación en el texto. Figura tomada de Houseman y Molnar 1997.

A parte de estos mecanismos de rejuvenecimiento litosférico, que implican la existencia de litosfera inicialmente engrosada, otro mecanismo que se propone comunmente para explicar la aparición de extensión en un marco regional de compresión es la migración lateral de una zona de subducción. Dicha migración se produce por la verticalización ("roll back") del bloque de litosfera que subduce. Esta migración produce una succión en la placa superior hacia la fosa, y se genera extensión. (figura 1.5). Este mecanismo es uno de los que se propone en la literatura para explicar la formación de cuencas de tras-arco (e. g. Royden et al., 1982).

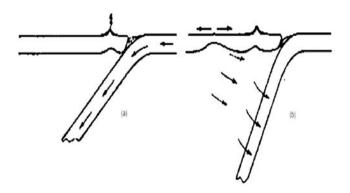


Figura 1.5: Dibujo ilustrativo del proceso de verticalización de un bloque de litosfera que subduce en la astenosfera. La verticalización produce una succión de la placa superior hacia la fosa, apareciendo extensión. Modificado de Royden et al (1982).

1.2. Modelos previos

Los modelos numéricos desarrollados para estudiar estos mecanismos podemos clasificarlos en dos tipos: dinámicos y termomecánicos. Los modelos dinámicos resuelven la ecuación del movimiento para un fluido, considerando diferentes reologías (propiedades de los materiales) y diferentes expresiones para la densidad. Los modelos termomecánicos resuelven la ecuación de movimiento acoplada con la ecuación térmica, a fin de obtener una distribución de temperaturas consistente con el comportamiento mecánico de los materiales. Esto les permite poder considerar reologías y expresiones de la densidad dependientes de la temperatura.

El adelgazamiento convectivo simétrico ha sido estudiado por varios autores utilizando modelos dinámicos (e.g. Houseman et al., 1981; Conrad y Molnar, 1997;

Houseman y Molnar, 2001; Molnar y Houseman, 2004.). Los resultados con estos modelos han permitido desarrollar toda una teoria de la inestabilidad convectiva del manto litosférico. Se ha obtenido que la viscosidad es el parámetro que más influye en el desarrollo de la perturbación y que es necesario que la capa superior, la litosfera en sus modelos de dos capas, sea más viscosa que la capa inferior. Sin embargo, estos modelos dinámicos han tenido problemas para reproducir la aparición de adelgazamiento litosférico, por lo que han tenido que recurrir a variaciones de este modelo como es la simulación de una "doble gota" [e. g. Houseman et al., 2000; Houseman y Molnar, 2001; Molnar y Houseman, 2004.]. Considerando un modelo de tres capas, con una capa superior muy ligera y muy viscosa simulando la corteza, la convergencia en estos modelos no genera un engrosamiento central sino dos simétricos y un poco desplazados del centro. Esta "doble gota" sí es capaz de generar adelgazamiento litosférico y, por tanto, reproducir la aparición de extensión (figura 1.6).

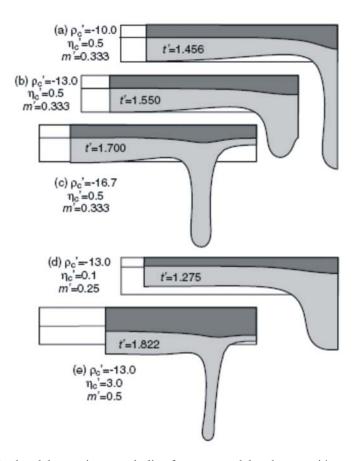


Figura 1.6: La aparición de adelgazamiento en la litosfera con modelos de remoción convectiva sólo se genera en modelos de "doble gota", como los presentados en la figura, de Molnar y Houseman (2004). Los valores son números escalados que dan los valores de densidad y viscosidad para corteza (gris oscuro) y manto litosférico (gris claro). Vease el artículo original para más detalles.

A pesar de que los autores de estos modelos consideraban su aplicación a muy diferentes escenarios (las cordilleras del "Transverse range" en el sur de California, el sur de los Alpes, la meseta tibetana, Nueva Zelanda y los mares Tirreno y Alboran, entre otros), sus modelos no han sido aplicados todavía de manera cuantitativa a zonas concretas.

Por otra parte, se han desarrollado en los últimos años varios modelos numéricos termomecánicos que se centran en los procesos de delaminación y estudian las condiciones para obtener la ruptura del bloque litosférico delaminado. [e.g. Schott y Schmeling, 1998; Schott et al., 1999; Schott et al., 2000a, Schott et al., 2000b] Estos modelos parten también de estados iniciales con perturbaciones de Rayleigh-Taylor, pero introducen una zona de baja viscosidad en un lateral de la perturbación que permite la ruptura de la simetría y la evolución de la delaminación. Los estudios de estos autores permitieron establecer la necesidad de una corteza inferior de baja viscosidad que permita el desacoplamiento entre el manto litosférico y la corteza superior para reproducir la delaminación del manto litosférico. (figura 1.7) Además, se reforzó nuevamente la influencia de la viscosidad, pues si el manto litosférico no es suficientemente viscoso, el estado evoluciona de modo parecido al adelgazamiento simétrico sin aparecer delaminación.

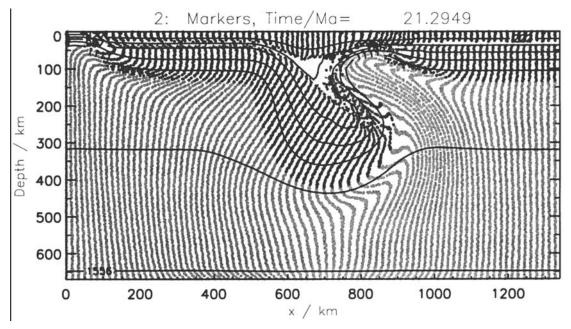


Figura 1.7: Modelo de Schott y Schmeling (1998) que muestra un estadio temprano en el desarrollo de la delaminación. Se observa claramante como la astenosfera (gris claro) desgaja el manto litosférico debido al desacoplamiento mecánico que produce la corteza inferior (en blanco en esta imagen). El estado inicial de este modelo se ha mostrado en la figura 3.

También se han desarrollado modelos numéricos termomecánicos para estudiar el desprendimiento de una raíz litosférica engrosada. Marotta et al. (1998, 1999) estudiaron dentro de un modelo de adelgazamiento convectivo simétrico las condiciones para obtener la ruptura y desprendimiento de una raíz litosférica ("unrooting"). Sus resultados establecen que los efectos térmicos refuerzan el desarrollo de la inestabilidad en el manto, complementando los resultados de los modelos dinámicos previos. Los resultados de Morency y Doin (2004) refuerzan la importancia de la presencia de corteza inferior de baja viscosidad para reproducir la delaminación.

1.3 Objetivos.

Los modelos que hemos descrito anteriormente no se han utilizado para estudiar de manera comparada los diferentes procesos de subducción y adelgazamiento convectivo simétrico o asimétrico. Además, su aplicación a zonas concretas de estudio ha sido hasta ahora puramente cualitativa. Es decir, no se ha utilizado un mismo código adaptando las condiciones iniciales y de contorno según cada posible proceso en una misma zona.

Por tanto, los objetivos de este trabajo son, en primer lugar, elaborar un modelo termomecánico y desarrollar un código numérico en MATLAB que permita una comprensión básica de los posibles procesos físicos implicados en la aparición de la extensión, incluyendo la posibilidad de estratificación en la densidad y en la viscosidad considerados como parámetros clave, según se desprende de la literatura.

En segundo lugar, perseguíamos realizar una aplicación a la evolución del mar de Alborán y la cordillera Bético-Rifeña, si bien preliminar, del código numérico presentado. Con esta aplicación se pretende, por un lado, ilustrar que el código es una herramienta útil y versátil para el estudio de zonas concretas; y, por otro lado, se pretende deducir qué tipo de proceso geodinámico es más acorde con las observaciones disponibles en el mar de Alborán.

2.- Estudio analítico y numérico de la ecuación de movimiento.

2.1.- La Tierra como fluido

Un fluido es un material que se deforma continuamente bajo la acción de una fuerza F, o, más adecuadamente, bajo la acción de un esfuerzo σ . Una fuerza tiene un punto de aplicación local, mientras que un esfuerzo se aplica sobre la unidad de superficie. Al abordar el estudio de los fluidos, nos interesa mucho más el concepto de esfuerzo aplicado que el de fuerza aplicada.

En un fluido los esfuerzos se relacionan con la *velocidad de deformación* ($\dot{\varepsilon}$) del mismo a través de una ecuación denominada *ley constitutiva o ley reológica*. En función de qué forma funcional tenga la reología o ley reológica podemos considerar varios tipos de fluidos:

- Fluido newtoniano. La relación es lineal: el esfuerzo aplicado es proporcional a la deformación obtenida. La constante de proporcionalidad es la *viscosidad*, que puede depender o no de la temperatura.
- Fluidos no newtonianos. Obviamente, se engloban bajo este nombre todas aquellas leyes reológicas no lineales. Se suele definir una viscosidad efectiva para su estudio.

La geodinámica trata con muchos problemas relacionados con la mecánica de fluidos y, desde luego, el movimiento del manto es uno de los más interesantes. El comportamiento fluido del manto es el responsable de la Tectónica de placas y la deriva continental; juega un papel primordial en la estructura térmica de la Tierra. Todo el estudio sobre el movimiento del material que compone la Tierra descansa sobre la afirmación de que, para los tiempos de evolución propios de la geología (millones de años), el material se comporta como un fluido.

Por tanto, las ecuaciones que vamos a utilizar en el estudio son las ecuaciones de la mecánica de fluidos: la ecuación de movimiento o ecuación de Navier-Stokes y la ecuación térmica o ecuación del calor.

2.2.- Estudio analítico de la ecuación de movimiento

Para estudiar el movimiento de un fluido, partimos de la segunda ley de Newton:

$$\sum_{k} F_{k} = \frac{d(mu)}{dt} \tag{2.1}$$

La variación de la cantidad de movimiento en un fluido (el termino de la derecha en la ecuación de Newton) se calcula a partir del producto de la masa de un elemento de fluido por su velocidad. Las fuerzas más importantes que actúan son la gravedad y las fuerzas que están produciendo la deformación, que en mecánica se calculan como la variación espacial del tensor de esfuerzos σ.

La segunda ley de Newton, expresada para un fluido, es la ecuación de conservación del momento:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i = \frac{D(\rho u)_i}{Dt} \tag{2.2}$$

donde σ es el tensor de esfuerzos; F, las fuerzas externas (que serán gravitatorias en este caso); ρ es la densidad; u es la velocidad; x las coordenadas espaciales; i,j indican las componentes y t, el tiempo.

En el estudio que estamos realizando, adoptamos las hipótesis más utilizadas en la literatura (e.g. Schmeling y Marquart, 1991; Molnar et al, 1998; Molnar y Houseman, 2004; Enns et al., 2005) que son las siguientes:

• Consideraremos un fluido en dos dimensiones, una vertical y una horizontal. La coordenada vertical z apuntará en la dirección de la gravedad.

- Consideraremos despreciables las fuerzas inerciales. Esto es, vamos a admitir que son mucho menores que el resto de las fuerzas inerciales. En nuestro caso concreto, aceptaremos que las aceleraciones son mucho menores que la aceleración gravitatoria. Esto implica considerar que estamos trabajando con fluidos muy viscosos¹. Esta aproximación es corriente al modelizar el comportamiento de la Tierra, donde las viscosidades son del orden de 10²º 10²º Pa.s.
- Utilizaremos la Aproximación de Boussinesq, que se enuncia: "La variación de cualquier variable termodinámica, incluida la densidad, es considerada despreciable. Las variaciones de densidad sólo se tendrán en cuenta cuando tengan consecuencias gravitatorias". (e. g. Tritton, 1988; Lliboutry, 1997; Schubert et al., 2001)

Estudiemos más a fondo las implicaciones de las hipótesis en el término de la derecha de la ecuación (2.2). Desarrollando la Derivada Total obtenemos:

$$\frac{D(\rho u)_i}{Dt} = \frac{D\rho}{Dt} u_i + \frac{Du_i}{Dt} \rho \tag{2.3}$$

Este término completo debe anularse en la *Aproximación de Boussinesq* dado que no tiene consecuencias gravitatorias al no aparecer la gravedad.

El segundo término de la derecha en la ecuación (2.3) es el término de las fuerzas inerciales, término que despreciaremos por la segunda hipótesis considerada.

Nos queda, por tanto:

 $\frac{D\rho}{Dt} = 0 \tag{2.4}$

¹ En la literatura, es frecuente utilizar los *números adimensionales* para caracterizar un fluido y su movimiento. Por tanto, es muy frecuente encontrar expresada esta condición como que el número adimensional de Prandtl es muy grande (Schubert et al., 2001). Este número relaciona la viscosidad (o difusividad del momento) y la conductividad (o difusividad del calor). Números de Prandtl grandes significan que la viscosidad es mucho mayor que la conductividad: el fluido es muy viscoso.

Es decir, que las variaciones de densidad son despreciables o, lo que es lo mismo, que el fluido es incompresible y la masa se conserva en cada elemento de fluido. En nuestro caso, incluso aunque introduzcamos variaciones de densidad en los elementos de fluido debido a la transición de fase de olivino a espinela, la variación en la densidad es aproximadamente del 6% en la transformación de fase ($\Delta \rho_{ol-sp}$ =181 kg m⁻³ frente a un valor de referencia para la litosfera de ρ_{I} =3300 kg m⁻³ (Tetzlaff y Schmeling, 2000)).

Si aplicamos esta condición a la ecuación de continuidad de masas:

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = \nabla \cdot \vec{u} \tag{2.5}$$

obtenemos:

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \tag{2.6}$$

Así pues, la *Aproximación de Boussinesq* sobre un fluido muy viscoso en el que se desprecian las fuerzas inerciales significa considerar el fluido como incompresible. Nótese que no estamos considerando que la densidad sea constante: con la *Aproximación de Boussinesq* lo que se afirma es que las variaciones de densidad no ejercen una gran influencia excepto en lo que se refiere a los términos gravitatorios. Por esta razón, podremos más adelante introducir dependencias de la densidad con la temperatura y la composición, siguiendo a diferentes autores, ya indicados, que utilizan estas mismas hipótesis.

Aplicadas estas simplificaciones, nuestra ecuación de movimiento queda como sigue:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i = 0 \tag{2.7}$$

Analicemos ahora los términos que nos quedan.

Las fuerzas externas que vamos a considerar son únicamente las fuerzas gravitatorias. Definimos F como el peso que ejerce el elemento de fluido considerado y consideraremos que tiene la misma dirección que la gravedad.

$$F_i = \rho g \delta_{iz} \tag{2.8}$$

donde δ es la delta de Kronecker (definida como 1 si i=j, 0 si $i\neq j$; en este caso 1 si i=z, 0 si $i\neq z$);

El término de las fuerzas internas, que son las fuerzas que producen la deformación, es el más interesante en nuestro estudio. El tensor de esfuerzos viscosos o, simplemente, tensor de esfuerzos σ , viene dado como la suma de dos aportaciones:

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + \tau_{ij} \tag{2.9}$$

El primer término son los esfuerzos isótropos, dados por la presión P; el segundo término son los esfuerzos desviatorios τ . Estos esfuerzos vienen dados por la *ley constitutiva* que relaciona los esfuerzos con la velocidad de deformación del fluido. En forma general, esta ecuación se escribe:

$$\tau_{ij} = \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta i j + 2\mu \dot{\varepsilon}_{ij} \tag{2.10}$$

donde $\dot{\varepsilon}$ es la velocidad de deformación del fluido, δ es la delta de Kronecker, μ es la viscosidad dinámica, primer coeficiente de Lamé (que en Teoría de Elasticidad –propia de sólidos- se denomina también coeficiente de rigidez o módulo de cizalla) y λ es el segundo coeficiente de viscosidad o segundo coeficiente de Lamé. Este último no nos interesa, dado que por ser el fluido incompresible, el término se anula independientemente del valor de λ .

La velocidad de deformación del fluido $\dot{\varepsilon}$ viene dada por la expresión:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \tag{2.11}$$

La traza de este tensor $\dot{\varepsilon}_{ii}$ es el cambio de volumen en un elemento de fluido (dilatación) mientras que los componentes fuera de la diagonal expresan la deformación por cizalla.

Si aplicamos las ecuaciones (2.8), (2.9) y (2.10) a la ecuación (2.7), obtenemos:

$$\nabla P - \rho \vec{g} = 2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mu \dot{\varepsilon}_{ij} \right) \tag{2.12}$$

o, en componentes:

$$\frac{\partial P}{\partial x_i} - \rho g \delta_{iz} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right]$$
(2.13)

ecuación que se conoce en la literatura como Ecuación de Navier-Stokes² y que expresa el balance en el fluido entre las fuerzas de presión (primer término de la izquierda), las fuerzas gravitatorias (segundo término de la izquierda) y las fuerzas viscosas (término de la derecha).

Podemos operar con esta ecuación, desarrollando los términos de cada componente, aplicando las derivadas cruzadas y restando la ecuación para una coordenada respecto de la ecuación para la otra a fin de eliminar la presión. Nos interesa eliminarla porque es una incógnita para la que no tenemos condiciones de contorno.

Obtenemos así otra formulación de la ecuación de Navier-Stokes:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho g) = 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left[\mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \right]$$
(2.14)

² La denominación de estas ecuaciones en la literatura es un tanto confusa. Algunos autores (e.g. Lliboutry, 1997) denominan así a la ecuación primitiva (2.2). Otros autores (e.g. Schubert et al., 2001) consideran que la ecuación de Navier- Stokes es la que hemos indicado. En general, se denomina ecuación de Navier-Stokes a la ecuación del movimiento de un fluido en cualquiera de sus formas.

que es una ecuación no lineal. El mismo resultado puede obtenerse aplicando el operador rotacional a la ecuación (2.12) o (2.13).

Para facilitar los cálculos, reduciendo el número de incógnitas, nos interesa expresar la ecuación (2.14) utilizando la *función de corriente*. Para un fluido bidimensional incompresible, se pueden definir las velocidades como provenientes de una función potencial a partir de la ecuación (2.6). Esa función potencial se denomina función de corriente y se expresa como:

$$u_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \Psi_y; \quad u_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\Psi_x$$
 (2.15)

Con esta notación, la ecuación de Navier-Stokes o del movimiento resulta ser:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho g) = 4 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[\mu \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \Psi \right] + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left[\mu \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \Psi \right]$$
(2.16)

Esta es la ecuación fundamental que consideraremos en este trabajo. No simplificaremos más porque queremos conservar la posibilidad de utilizar viscosidad variable. Nótese que el término de la izquierda, el término de flotabilidad, contiene la densidad. Por la *Aproximación de Boussinesq*, esa densidad aún puede ser considerada constante o variable, dado que es el término que tiene consecuencias gravitatorias. Para obtener la ecuación ya hemos aplicado que en todos los demás términos la densidad es constante o, al menos, que sus efectos son despreciables frente a la fuerza gravitatoria.

Si considerásemos una viscosidad constante, la ecuación (2.16) se simplifica hasta obtener la ecuación biharmónica (2.17), inhomogénea si la densidad es variable u homogénea si la consideramos constante.

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho g) = \mu \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) \Psi = \mu \nabla^4 \Psi$$
 (2.17)

2.3.- Estudio numérico de la ecuación de movimiento

2.3.1.- Discretización de la ecuación de movimiento

A fin de crear un programa que simule las condiciones del movimiento del manto en la Tierra, vamos a aplicar un esquema de diferencias finitas para obtener nuestra ecuación numérica.

Partimos de la ecuación (2.16). A pesar de que podamos utilizar la ecuación (2.17) para viscosidades constantes, utilizaremos siempre la ecuación (2.16) dado que permitirá trabajar con viscosidades constantes y variables.

Para la resolución numérica de la ecuación, utilizaremos la *Aproximación de diferencias finitas*. Esta aproximación consiste, en esencia, en aproximar una función continua (y sus derivadas) por expresiones que toman valores en sólo un número finito y discreto de puntos. El dominio continuo de la función se sustituye, por tanto, por un dominio discontinuo (discreto) o malla, compuesto por un número limitado de puntos o nodos. Cada nodo se identifica por los subíndices (*i,j*), *i* es el índice de la coordenada horizontal, *j* es el índice de la coordenada vertical, donde:

$$i=1, 2, 3 \dots, I-1, I$$

 $j=1, 2, 3 \dots, J-1, J$

La malla por tanto tendrá I nodos en la dirección horizontal y J nodos en la dirección vertical. La correspondencia entre los índices y las coordenadas es directamente:

$$x=i\Delta x$$

$$z=j\Delta z$$

donde Δx es el "paso de malla" o distancia entre un nodo y otro en la dirección horizontal y Δz es su análogo para la coordenada vertical (figura 2.1).

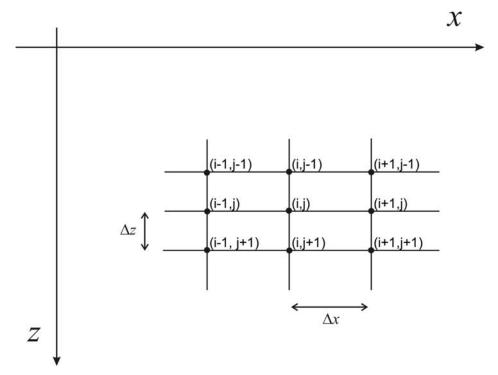


Figura 2.1. Malla discreta para las diferencias finitas. La coordenada vertical apunta hacia abajo para seguir la dirección de la gravedad.

Las expresiones discretas para aproximar la función que más frecuentemente se usan en el esquema de diferencias finitas se obtienen a partir de desarrollos de Taylor. (e. g. Anderson 1995). Utilizaremos unas expresiones en diferencias centradas (es decir, la aproximación en un nodo se calcula a partir de nodos cercanos distribuidos simétricamente antes y después de él), de orden dos, cuyas expresiones son:

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial x} = \frac{1}{\Delta x} \left(\Gamma_{i+\frac{1}{2},j} - \Gamma_{i-\frac{1}{2},j} \right) + O(h^{2})$$

$$\frac{\partial^{2} \Gamma}{\partial x^{2}} = \frac{1}{\Delta x^{2}} \left(\Gamma_{i+1,j} - 2\Gamma_{i,j} + \Gamma_{i-1,j} \right) + O(h^{2})$$

$$\frac{\partial^{2} \Gamma}{\partial x \partial z} = \frac{1}{\Delta x \Delta z} \left(\Gamma_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - \Gamma_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - \Gamma_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + \Gamma_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \right) + O(h^{2})$$
(2.18)

expresiones en donde hemos llamado Γ a la función continua genérica que estamos aproximando, e indicamos como $\Gamma_{i,j}$ la evaluación de la función Γ en el nodo (i,j).

La aproximación en diferencias finitas consiste en despreciar los términos de orden superior a dos en las expresiones (2.18) y aproximar las derivadas por los

cocientes indicados. Aplicando estas expresiones directamente sobre la ecuación (2.16), obtenemos la siguiente ecuación en diferencias finitas:

$$\frac{g}{\Delta x} \left(\rho_{i+\frac{1}{2},j} - \rho_{i-\frac{1}{2},j} \right) = 4 \left(\frac{\Theta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - \Theta_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - \Theta_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + \Theta_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{\Delta x \Delta z} \right) \left(\mu_{i,j} \frac{\Psi_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - \Psi_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - \Psi_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + \Psi_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{\Delta x \Delta z} \right) + \left(\frac{\Theta_{i,j+1} - 2\Theta_{i,j} + \Theta_{i,j-1}}{\Delta z^{2}} - \frac{\Theta_{i+1,j} - 2\Theta_{i,j} + \Theta_{i-1,j}}{\Delta x^{2}} \right) \left(\mu_{i,j} \frac{\Psi_{i,j+1} - 2\Psi_{i,j} + \Psi_{i,j-1}}{\Delta z^{2}} - \frac{\Psi_{i+1,j} - 2\Psi_{i,j} + \Psi_{i-1,j}}{\Delta x^{2}} \right)$$

$$(2.19)$$

donde, por simplificar la notación, hemos indicado con notación de "operadores" la tercera expresión (2.18). Así, por ejemplo, el "operador" $\Theta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}$ significa evaluar la expresión sobre la que el operador actúa en el punto $(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})$. Esto es:

$$\left(\Theta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}\right)\!\left(\Gamma_{i,j}\right) = \Gamma_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}$$

Operando de este modo sobre la ecuación (2.19), obtenemos la expresión en diferencias finitas para la ecuación del movimiento de un fluido:

$$g\frac{\partial \rho}{\partial x} = AA\Psi_{i,j} + A\Psi_{i+2,j} + B\Psi_{i+1,j+1} + C\Psi_{i+1,j} + D\Psi_{i+1,j-1} + E\Psi_{i,j+2} + F\Psi_{i,j+1} + G\Psi_{i,j-1} + H\Psi_{i,j-2} + I\Psi_{i-1,j+1} + J\Psi_{i-1,j} + K\Psi_{i-1,j-1} + L\Psi_{i-2,j}$$
(2.20)

donde los coeficientes son:

$$\begin{split} AA &= \frac{4}{\Delta x^2 \Delta z^2} \left(\mu_{i+1/2, j+1/2} + \mu_{i+1/2, j-1/2} + \mu_{i-1/2, j+1/2} + \mu_{i-1/2, j-1/2} + \mu_{i-1/2, j-1/2} + \frac{\mu_{i,j+1}}{\Delta z^4} + \frac{\mu_{i,j-1}}{\Delta z^4} + \frac{\mu_{i+1,j}}{\Delta x^4} + 4\mu_{i,j} \left(\frac{1}{\Delta x^2} - \frac{1}{\Delta z^2} \right)^2 \\ A &= \frac{\mu_{i+1,j}}{\Delta x^4} \\ B &= \frac{4\mu_{i+1/2, j+1/2}}{\Delta x^2 \Delta z^2} - \frac{\mu_{i,j+1}}{\Delta x^2 \Delta z^2} - \frac{\mu_{i+1,j}}{\Delta x^2 \Delta z^2} \\ C &= \frac{-4}{\Delta x^2 \Delta z^2} \left(\mu_{i+1/2, j+1/2} + \mu_{i+1/2, j-1/2} \right) - \frac{2\mu_{i+1,j}}{\Delta x^2} \left(\frac{1}{\Delta x^2} - \frac{1}{\Delta z^2} \right)^2 - \frac{2\mu_{i,j}}{\Delta x^2} \left(\frac{1}{\Delta x^2} - \frac{1}{\Delta z^2} \right)^2 \\ D &= \frac{4\mu_{i+1/2, j-1/2}}{\Delta x^2 \Delta z^2} - \frac{\mu_{i,j-1}}{\Delta x^2 \Delta z^2} - \frac{\mu_{i+1,j}}{\Delta x^2 \Delta z^2} \end{split}$$

$$\begin{split} E &= \frac{\mu_{i,j+1}}{\Delta z^4} \\ F &= \frac{-4}{\Delta x^2 \Delta z^2} \left(\mu_{i+1/2,j+1/2} + \mu_{i-1/2,j+1/2} \right) + \frac{2\mu_{i,j+1}}{\Delta z^2} \left(\frac{1}{\Delta x^2} - \frac{1}{\Delta z^2} \right)^2 + \frac{2\mu_{i,j}}{\Delta z^2} \left(\frac{1}{\Delta x^2} - \frac{1}{\Delta z^2} \right)^2 \\ G &= \frac{-4}{\Delta x^2 \Delta z^2} \left(\mu_{i+1/2,j-1/2} + \mu_{i-1/2,j-1/2} \right) + \frac{2\mu_{i,j-1}}{\Delta z^2} \left(\frac{1}{\Delta x^2} - \frac{1}{\Delta z^2} \right)^2 + \frac{2\mu_{i,j}}{\Delta z^2} \left(\frac{1}{\Delta x^2} - \frac{1}{\Delta z^2} \right)^2 \\ H &= \frac{\mu_{i,j-1}}{\Delta z^4} \\ I &= \frac{4\mu_{i-1/2,j+1/2}}{\Delta x^2 \Delta z^2} - \frac{\mu_{i,j+1}}{\Delta x^2 \Delta z^2} - \frac{\mu_{i-1,j}}{\Delta x^2 \Delta z^2} \\ J &= \frac{-4}{\Delta x^2 \Delta z^2} \left(\mu_{i-1/2,j-1/2} + \mu_{i-1/2,j+1/2} \right) - \frac{2\mu_{i-1,j}}{\Delta x^2} \left(\frac{1}{\Delta x^2} - \frac{1}{\Delta z^2} \right)^2 - \frac{2\mu_{i,j}}{\Delta x^2} \left(\frac{1}{\Delta x^2} - \frac{1}{\Delta z^2} \right)^2 \\ K &= \frac{4\mu_{i-1/2,j-1/2}}{\Delta x^2 \Delta z^2} - \frac{\mu_{i,j-1}}{\Delta x^2 \Delta z^2} - \frac{\mu_{i-1,j}}{\Delta x^2 \Delta z^2} \\ L &= \frac{\mu_{i-1,j}}{\Delta x^4} \end{split}$$

El esquema así obtenido es un esquema "de 12 vecinos". Se denomina así porque para obtener el valor en un punto (i,j) necesitamos los valores de 12 nodos (i,j) a su alrededor. (figura 2.2)

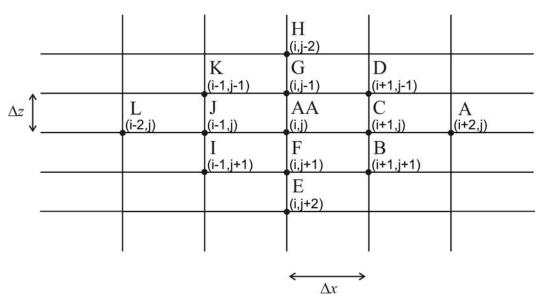


Figura 2.2. Esquema de 12 vecinos con los coeficientes de cada nodo

En resumen, hemos obtenido la ecuación (2.20) aplicando un esquema de discretización en diferencias finitas y luego desarrollando los términos. Este es un método menos corriente en la literatura, pero utilizado con gran éxito por Schmeling &

Marquart (1991). De este modo, el esquema de discretización sólo requiere términos de hasta orden dos, lo cual hace que el esquema sea más estable.

Existe otro posible método alternativo, consistente en desarrollar primero todos los términos de la ecuación (2.16) y luego aplicar el esquema de diferencias finitas. Se puede ver este desarrollo numérico en el Anexo. No obstante, las características de la matriz del sistema de ecuaciones que se obtiene al utilizar este segundo método hacen que los resultados sean muy inestables.

Es fácil comprobar analíticamente (no se muestra) que, si aplicamos viscosidad constante, obtenemos el mismo resultado que discretizando directamente la ecuación biharmónica (2.17).

2.3.2.- Condiciones de contorno

Una vez obtenida la ecuación que rige el movimiento, tenemos que imponer las condiciones de contorno.

Consideraremos un rectángulo de dimensiones horizontales $I\Delta x$ y verticales $J\Delta z$, donde I es el número de nodos en la dirección x, J es el número de nodos en la dirección z, Δx es el "paso de malla" o distancia entre un nodo y otro en la dirección horizontal y Δz es su análogo para la coordenada vertical.

Vamos a considerar condiciones de "free slip" o de deslizamiento libre, que son muy frecuentemente usadas en la literatura. (e.g. Schmeling y Marquart, 1991; Enns et al., 2005). Estas condiciones implican que la velocidad normal a la frontera sea nula y la derivada normal de la velocidad tangencial también se anule.

$$v_n = 0; \quad \frac{\partial v_t}{\partial n} = 0 \tag{2.22}$$

Es decir, aplicada a nuestro dominio, las condiciones de contorno son las que se muestran en la figura (2.3).

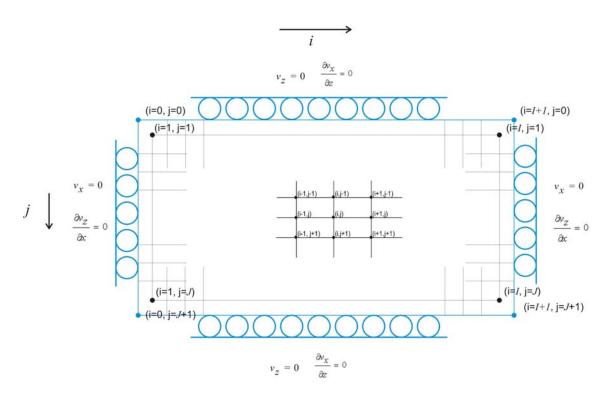


Figura (2.3): Condiciones de contorno sobre la malla. Es necesario añadir dos filas (j=0 y j=J+1) y dos columnas más (i=0, i=I+1), en azul, para incluir los nodos con los valores en las fronteras.

En los contornos superior e inferior opera la misma condición. El desarrollo detallado para la frontera superior es el que sigue:

Consideremos la primera condición:

$$v_z\big|_{z=0} = 0 \tag{2.23}$$

Utilizando la notación de la función de corriente, la condición se expresa:

$$-\frac{\partial \Psi}{\partial x}\bigg|_{z=0} = 0 \tag{2.24}$$

Aplicando el esquema de diferencias finitas a las ecuaciones de contorno, necesitamos añadir dos filas $(j=0 \ y \ j=J+1)$ y dos columnas más $(i=0, \ i=I+1)$ para incluir los nodos con los valores en las fronteras. Así, obtenemos:

$$\left. \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right|_{z=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\Psi_{i+1,j} - \Psi_{i,j}}{\Delta x} \right|_{i=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Psi_{i+1,0} = \Psi_{i,0}$$
 (2.25)

Por lo que podemos imponer, como condición de contorno, $\Psi = 0$ en la frontera superior.

A partir de la segunda condición:

$$\left. \frac{\partial v_x}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \tag{2.26}$$

expresada en notación de la función de corriente:

$$\left. \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right|_{z=0} = 0 \tag{2.27}$$

podemos, de la misma manera, aplicar el esquema de diferencias finitas y obtener:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \bigg|_{z=0} = 0 \implies \frac{\Psi_{i,j+2} - 2\Psi_{i,j+1} + \Psi_{i,j}}{\Delta y^2} \bigg|_{i=0} = 0$$
 (2.28)

Como, por la condición anterior, $\Psi=0$ en la primera fila $\Psi_{i,0}=0$, obtenemos:

$$\left(\Psi_{i,j+2} - 2\Psi_{i,j+1} + \Psi_{i,j}\right)\Big|_{j=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Psi_{i,2} = 2\Psi_{i,1} \tag{2.29}$$

Luego podemos imponer $\Psi_{i,2} = 2\Psi_{i,1}$ en la fila 1.

Las mismas matemáticas son válidas para la frontera inferior, por lo que, igualmente, podemos imponer $\Psi=0$ en la frontera y $\Psi_{i,J}=2\Psi_{i,J-1}$ en la última fila.

De un modo exactamente análogo, podemos obtener las condiciones de contorno para los laterales, que resultan ser:

 $\Psi = 0$ en los extremos laterales izquierdo y derecho y

 $\Psi_{2,j} = 2\Psi_{1,j}$ en la primera y última columna.

Así, resumiendo, las ecuaciones de contorno quedan tal y como se indica en la figura (2.4):

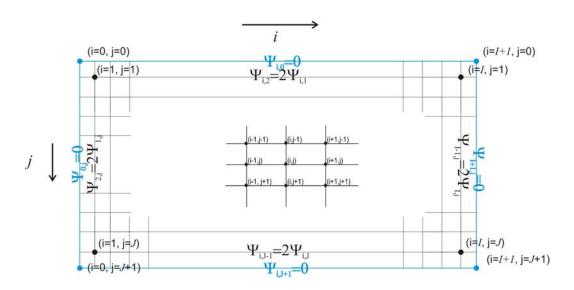


Figura 2.4: Condiciones de contorno discretizadas proyectadas sobre la malla. Es necesario añadir dos filas $(j=0 \ y \ j=J+1)$ y dos columnas más $(i=0, \ i=I+1)$, en azul, para incluir los nodos con los valores en las fronteras.

2.3.3.- Método matricial de resolución.

Tenemos que resolver la ecuación en diferencias finitas (2.20). Es una ecuación de doce vecinos que expresa, en componentes, para I valores de i y J valores de j, un sistema de IxJ ecuaciones (una para cada nodo) con IxJ incógnitas (valores de Ψ). Son ecuaciones que, al haber sido discretizadas, son lineales e inhomogéneas, que pueden expresarse en modo matricial, habiendo aplicado ya las condiciones de contorno, como:

$$M\psi = b$$
 (2.30)

Las condiciones de contorno nos dan información sobre los valores de las incógnitas y, por tanto, están incluidas en la Matriz M, determinando su forma y sus valores.

La matriz M del sistema tiene muchos elementos nulos (matriz de tipo "*sparse*"), con sólo doce diagonales no nulas. Por ejemplo, una matriz de un sistema 4x6 (*I*=4,

J=6) tendría la forma que se muestra en la figura (2.5). Y matrices más grandes conservarían la forma mostrada en la figura (2.6).

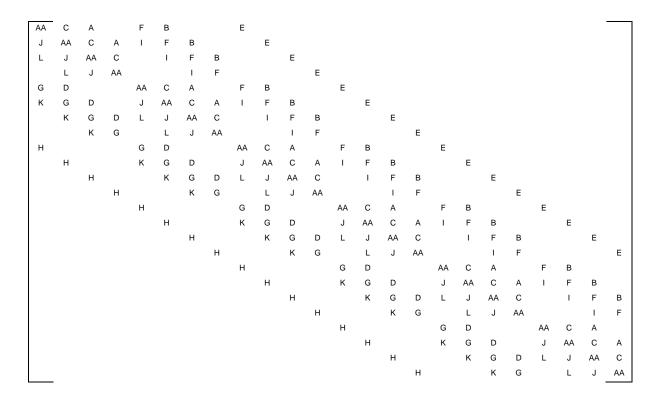


Figura 2.5: Forma de la matriz de un sistema 4x6 (*I*=4, *J*=6) obtenida con la ecuación (2.20)

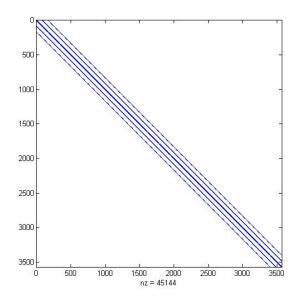


Figura 2.6: matriz 3600x3600, sólo 45144 elementos son no nulos. Sólo hay 12 diagonales no nulas.

La matriz M construida con los coeficientes de la ecuación (2.20), es una matriz que, en todos los casos, es simétrica, diagonalmente dominante y está bien condicionada, lo que garantiza que los resultados sean estables.

3.- El Programa NASCEM (Navier-Stokes Complex Equation Model)

3.1.- Introducción

Como primer paso en nuestro proceso para obtener un modelo termomecánico hemos elaborado un código en entorno MATLAB que resuelve la ecuación de movimiento (cuya forma discretizada se expresa en la ecuación 2.20), aplicando las condiciones de contorno estudiadas en el capítulo anterior. Tendremos en la primera parte de este trabajo modelos puramente dinámicos, en el sentido de que se incluyen las fuerzas debidas a contrastes de densidad, suponiendo que la viscosidad y la densidad no dependen de la temperatura; a diferencia del capítulo 5, en el que consideraremos un acoplamiento termomecánico.

El modelo dinámico tiene interés en sí mismo, ya que nos permite comprobar, de un modo sencillo, si las evoluciones presentadas por los diferentes modelos conceptuales presentados para explicar la extensión son dinámicamente consistentes. Además, la comparación con los modelos termomecánicos desarrollados en el capítulo 5 nos permitirá comprobar qué efectos son puramente gravitatorios y qué efectos son dependientes de la temperatura.

3.2 Descripción general del programa

Una vez obtenida la ecuación que gobierna el movimiento del fluido y habiendo expresado esa ecuación mediante un esquema numérico apropiado, elaboramos un programa en entorno MATLAB que permite estudiar la evolución dinámica del manto.

El programa trabaja con dos mallas diferentes:

 una malla correspondiente a los nodos, euleriana; esto es, la posición de los nodos es constante; • y una malla "flexible", lagrangiana, definida por la posición de unos "marcadores"; "flexible" en el sentido de que los marcadores se desplazan con el campo de velocidades obtenido y, por tanto, la malla se deforma siguiendo el movimiento del fluido. La malla de marcadores es más densa que la de nodos. El programa está preparado para trabajar con mallas de marcadores de una a cuatro veces más densa, pero la modificación para aumentar ese número es muy sencilla. En los modelos hemos utilizado una malla tres veces más densa.

Las propiedades físicas (velocidad, densidad, viscosidad) se calculan en los nodos y se interpolan a los marcadores. Éstos se mueven según los valores de las componentes de la velocidad, arrastrando consigo los valores de densidad y viscosidad. Acto seguido se interpolan nuevamente las propiedades físicas de los marcadores a los nodos más cercanos y se vuelve a resolver la ecuación de movimiento.

Para contrastar la fiabilidad de las interpolaciones que se realizan en el programa, se realizaron más de 30 ejecuciones con diferentes combinaciones de los métodos de interpolación en dos dimensiones incluidos en MATLAB. Finalmente se comprobó que los mejores resultados (teniendo en cuenta exactitud de la solución y tiempo de cómputo) se obtenían con la combinación siguiente:

- Subrutina interpmark (de nodos a marcadores): Método V4.
- Subrutina *interpn2m* (de nodos a marcadores): Método V4.
- Subrutina *interpm2n* (de marcadores a nodos): Método de interpolación lineal, con las líneas inferior y superior recalculadas con el Método V4.

La diferencia entre el uso de un método u otro viene dada por los algoritmos que utilizan los propios métodos: el método V4 está optimizado para la interpolación de valores desde una malla fija a una malla dispersa o nube de puntos irregular, mientras que es excesivamente lento en el proceso inverso, interpolación desde una malla irregular a una malla fija.

El Método V4 de MATLAB está basado en el algoritmo de Sandwell (1987).

Se ha comprobado la convergencia de los resultados variando los parámetros temporales y geométricos de la malla. Dentro de las limitaciones que nos impone la capacidad física de un ordenador personal, los resultados obtenidos verifican que el programa es estable. Las limitaciones que se indican están, fundamentalmente, relacionadas con la gestión de la memoria. El método de resolución matricial que se utiliza crea una matriz de dimensiones (*IxJ*, *IxJ*), pues cada fila de la matriz corresponde a un único nodo de la malla. Para valores altos de *I* y *J*, las matrices generadas ocupan un gran espacio en la memoria del ordenador, ralentizando el cálculo y, en ocasiones, desbordando la capacidad de PC. En un ordenador personal Pentium IV, con 3Gb de memoria RAM y 8Gb de memoria virtual, la máxima dimensión de la matriz que admite el entorno MATLAB es aproximadamente de 3600x3600, lo que corresponde a mallas de 85x40 nodos aproximadamente.

Los mayores problemas de estabilidad se han encontrado para contrastes muy fuertes de viscosidad con pasos de malla y pasos temporales grandes. Los problemas que aparecen en esos casos no son achacables a la inversión de la matriz (ni, por tanto, al método) sino a problemas propios de los algoritmos de interpolación.

El programa permite el estudio de muy diferentes escenarios, desarrollando una evolución auto-consistente al resolver internamente la ecuación de movimiento. Su sencillez de manejo y de modificación hace que pueda ser fácilmente aplicado a diferentes escenarios realistas, incluso a pesar de su no-dependencia con la temperatura.

3.3 Diagrama de flujo

El programa incluye numerosas subrutinas que van realizando las diferentes tareas, tal y como se presenta en el diagrama de flujo del programa (figura 3.1).

La subrutina *Parameters* es la que incluye los parámetros de entrada. Éstos incluyen parámetros físicos y parámetros numéricos como las viscosidades y densidades de cada material, sus espesores, el número de nodos en horizontal y en vertical, los tamaños de los pasos de malla espaciales (en horizontal y en vertical) y temporal, el número de iteraciones temporales y algunos parámetros físicos como la aceleración de la gravedad.

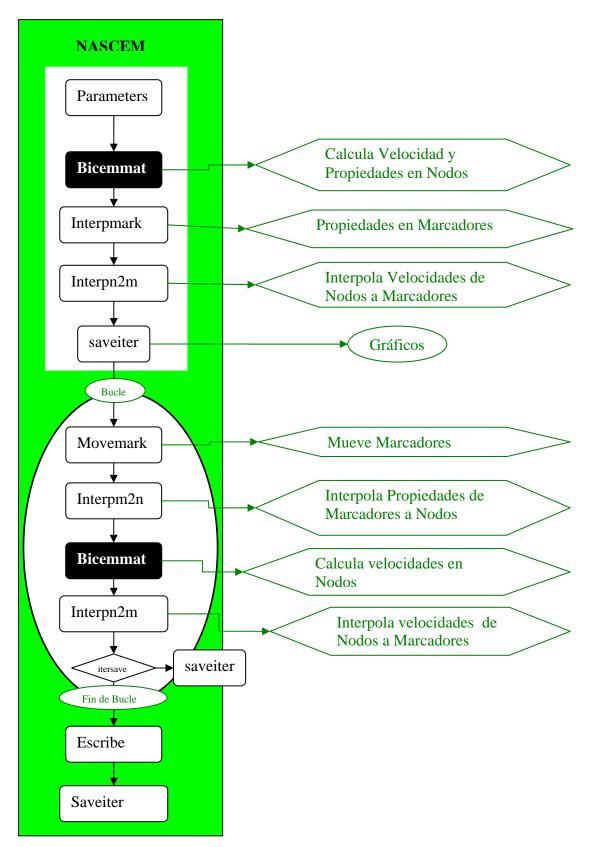


Figura 3.1 : Diagrama de flujo del programa NASCEM

Bicemmat es la subrutina clave que resuelve la ecuación de movimiento. Incluye varias subrutinas que no se han mostrado en el diagrama para mayor claridad.

La primera de estas subrutinas internas de *Bicemmat* es *Cwave*. Esta subrutina se encarga de dibujar la geometría inicial del problema. El programa está preparado para generar un estado inicial de tipo *remoción convectiva*. Esto es, una perturbación de densidad de tipo Rayleigh-Taylor. No obstante, incluye también una subrutina (*DesignC*) que permite diseñar un estado inicial cualquiera. De este modo, puede aplicarse también el programa a situaciones de *delaminación* o de tipo subductivo y estudiar así, por ejemplo, fenómenos como la ruptura de la raíz litosférica o el inicio y la evolución del *roll-back*. El programa está diseñado para trabajar con hasta 4 materiales diferentes, aunque introducir un número mayor es sencillo.

La segunda subrutina interna es *Makematrix*. Esta subrutina es la que genera la matriz M del sistema en función de las dimensiones I, J. La construcción de la matriz está condicionada a las condiciones de contorno que se apliquen. La subrutina es capaz de generar matrices con condiciones de contorno de *deslizamiento libre* o "*free slip*" (las condiciones que hemos considerado en el análisis numérico en el capítulo anterior) y condiciones de contorno en las que se impone un valor fijo nulo en las fronteras para la función de corriente Ψ .

Como mecanismo de control, esta subrutina permite estudiar nodos concretos y comprobar qué valores de viscosidad están teniéndose en cuenta para calcular los 12 coeficientes que, según la ecuación (2.20) se necesitan para calcular el valor de la función de corriente Ψ en ese nodo específico. Además, la subrutina construye también una matriz que asigna a cada nodo (en sentido primero horizontal creciente y segundo vertical creciente) un número natural del 1 al IxJ que facilita la identificación de cada nodo. Así, para una malla de 4x6 nodos, el nodo (1,1) es el nodo (1,2) es el nodo (2,1) es el nodo (3,2) es el nodo (3,3) es el nodo (3,4) es el nodo (3

La subrutina *Bicemmat* construye los términos inhomogéneos del sistema (2.30). Para resolver este sistema, se han aplicado y comparado diferentes métodos de resolución, directos o iterativos y finalmente se ha optado, por razones de mayor

estabilidad y menor tiempo de cómputo, por utilizar el operador "\" interno de MATLAB que resuelve el sistema con el algoritmo de eliminación Gaussiana.

Esta subrutina termina derivando numéricamente la función de corriente según las ecuaciones para obtener en cada nodo los valores de la velocidad horizontal y vertical. Esta derivada numérica se hace con un esquema de diferencias centradas para todos los nodos excepto para la primera fila y la primera columna en la que utiliza un esquema de diferencias adelantadas; y para la última fila y la última columna en la que utiliza un esquema de diferencias retrasadas, a fin de evitar los "efectos de borde" en la derivada (e. g. Anderson, 1995).

La subrutina *Interpmark* se ejecuta sólo en la iteración inicial para generar los marcadores e interpolar en ellos las propiedades físicas asignadas a cada nodo por la subrutina Cwave.

La subrutina *Interpn2m* interpola a los marcadores las velocidades calculadas en los nodos por la subrutina *Bicemmat*.

La subrutina *Movemark* es la encargada de mover los marcadores. Para ello, calcula la nueva posición de cada marcador multiplicando la velocidad en cada eje por el paso temporal y sumándolo a la posición anterior.

Finalmente, la subrutina *Saveiter* salva cada *itersave* iteraciones las variables calculadas y dibuja los resultados en cada iteración. El parámetro *itersave* es uno de los parámetros numéricos de entrada que se dan en la subrutina *Parameters*. La subrutina *Escribe* salva en un fichero *model.dat* los parámetros geométricos y físicos más importantes, así como el tiempo real de cómputo (medido como tiempo de uso de la CPU del ordenador) de toda la evolución estudiada.

3.4 Simulaciones

Presentamos en este apartado muy brevemente algunas ejecuciones comparadas que permiten mostrar la aplicabilidad del programa y el tipo de resultados esperables. El capítulo siguiente se dedica a un análisis completo y comparativo de algunas ejecuciones del programa aplicado a un problema de gran interés científico como es la evolución del mar de Alborán.

3.4.1 Modelos isoviscosos.

Una primera comparación que permite ver la calidad de nuestros resultados y la estabilidad de las soluciones del programa sería la comparación de los resultados obtenidos para un modelo isoviscoso con nuestro programa y con otro algoritmo totalmente diferente desarrollado específicamente para un modelo isoviscoso.

Para ello, se implementó un nuevo código en MATLAB que resolviese mediante diferencias finitas la ecuación biharmónica (2.17) obtenida analíticamente bajo la condición de viscosidad constante. Este programa resuelve numéricamente la ecuación dividiéndola en dos ecuaciones de Poisson enlazadas:

$$\nabla^{2}\Psi = \tilde{\Psi}$$

$$\nabla^{2}\tilde{\Psi} = \frac{g\rho}{\mu}$$
(3.1)

El algoritmo para la resolución de estas ecuaciones enlazadas, bajo condiciones de contorno de "free slip" está publicado en la literatura (e. g. Carnahan et al., 1979). La estructura del programa BISEM que implementa este nuevo código es análoga a la estructura del programa NASCEM. Sólo cambia el algoritmo de resolución de la ecuación.

Aplicamos los dos códigos a una misma geometría inicial, consistente en una perturbación que podría simular una litosfera orogénica, engrosada hasta el doble de su espesor inicial. La litosfera no perturbada tendrá 112 km de espesor compuesta por una corteza superior de 16 km y una corteza inferior de 24 km de espesor, lo que suman 40 km de espesor cortical inicial, y un manto litosférico de 72 km de espesor. Para simular

la litosfera orogénica, imponemos una perturbación que dobla el espesor de las tres capas, alcanzando la litosfera los 224 km de profundidad. El modelo consta de 87x44 nodos, con un paso de malla espacial de 16 km y un paso temporal de 0.5 Ma, a fin de reproducir la geometría que en el capítulo siguiente se utilizará para la modelización de la evolución del mar de Alborán. El estado inicial se muestra en la figura 3.2.a

Tabla 3.1 – Valores para el modelo isoviscoso

Modelo		Log (viscosidad) (log(Pa.s))			
	Astenosfera	Manto litosférico	Corteza inferior	Corteza superior	
BISEM	3300	3400	2800	2900	22
NASCEM	3300	3400	2800	2900	22

Los resultados obtenidos tras 50 Ma de evolución con el programa BISEM se muestran en la figura 3.2b. Los resultados obtenidos tras el mismo tiempo con el programa NASCEM se muestran en la figura 3.2.c. Se puede apreciar la gran similitud entre ambos resultados. Durante todo el proceso, las similitudes entre ambos modelos son muy altas: la diferencia entre un resultado y otro nunca difiere en más de un nodo. Estas diferencias son achacables a los algoritmos de interpolación.

Dado que esta comparación sólo nos interesaba para establecer que nuestro algoritmo aplicado a una versión isoviscosa es comparable a algoritmos muy conocidos en la literatura que resuelven la ecuación biharmónica (donde la viscosidad es constante) sólo presentamos estos resultados sin entrar en más detalles. Resultan mucho más interesantes otras comparaciones.

3.4.2 Modelo de viscosidad estratificada.

Una complicación mayor respecto a los modelos anteriores se obtendría introduciendo una viscosidad que dependa del material.

Consideremos el mismo estado inicial del apartado anterior (figura 3.3.a) Apliquemos nuestro programa a un modelo en el que el valor de la viscosidad dependa también de cada material (Tabla 3.2)

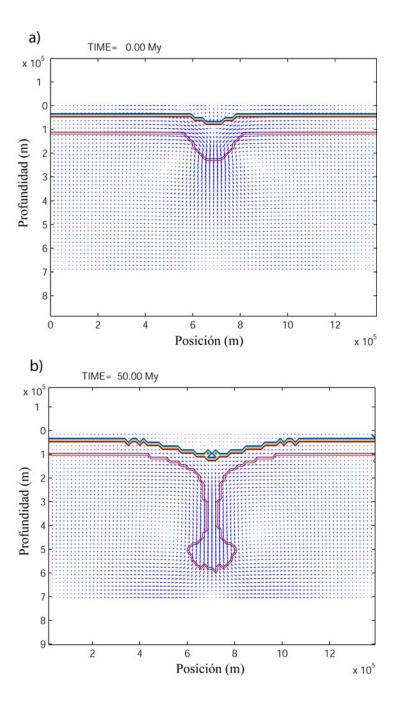


Figura 3.2 – Resultados de la comparación entre el algoritmo BISEM y el algoritmo NASCEM para modelos isoviscosos. El estado inicial se muestra en la figura 3.2.a. Los resultados obtenidos tras 50 Ma de evolución con el programa BISEM se muestran en la figura 3.2b. Los resultados obtenidos tras el mismo tiempo con el programa NASCEM se muestran en la figura 3.2.c. Se puede apreciar la gran similitud entre ambos resultados.

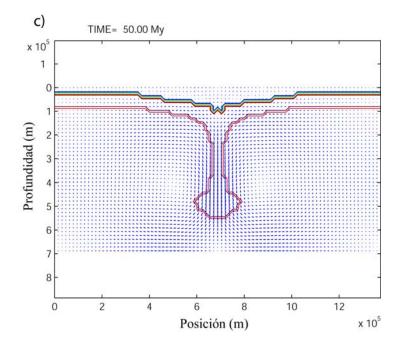


Tabla 3.2. Valores de la viscosidad considerados en el modelo de viscosidad estratificada

Capa	Densidad (Kg/m³)	Log (viscosidad) (log(Pa.s))		
Astenosfera	3200	20		
Manto litosférico	3250	22		
Corteza inferior	2900	20		
Corteza superior	2800	23		

Dejamos evolucionar el modelo 200 iteraciones que, con un paso temporal de 0.5Ma, simula una evolución de 100 Ma. Los resultados muestran una gran estabilidad, incluso para tiempos de evolución muy largos. Se observa como el material que forma la perturbación se hunde en la astenosfera, arrastrando consigo material de la corteza inferior, menos viscosa (figuras 3.3.b y 3.3.c). El modelo no incluye transformación de material ni dependencia de la densidad con la temperatura, por lo que las líneas de igual densidad muestran nodos con material cortical alcanzando incluso la base del manto superior conservando densidad de corteza (figuras 3.3.d). La presencia de corteza hasta profundidades tan elevadas puede ser fruto de los algoritmos de interpolación.

El material en hundimiento toca la base del modelo en 30Ma y, desde ese momento, comienza a acumularse en la base. Debido a la ley de conservación de la masa, el material que se acumula en el fondo (más denso) procede del manto litosférico en superficie, por lo que aparece un fuerte adelgazamiento en la litosfera. La perturbación en la corteza desaparece, puesto que el material cortical también es arrastrado por la fuerza de succión que ejerce el manto litosférico en hundimiento. La corteza va aplanándose progresivamente. El modelo está, pues, adquiriendo una posición de mayor estabilidad gravitatoria, con el material menos denso distribuido en superficie y el material más denso distribuido en la base del modelo.

Estos resultados ilustran que el programa NASCEM es estable y que presenta resultados físicamente plausibles. En el capítulo siguiente se presentarán los resultados de la aplicación de este programa a un contexto real, la evolución del mar de Alborán.

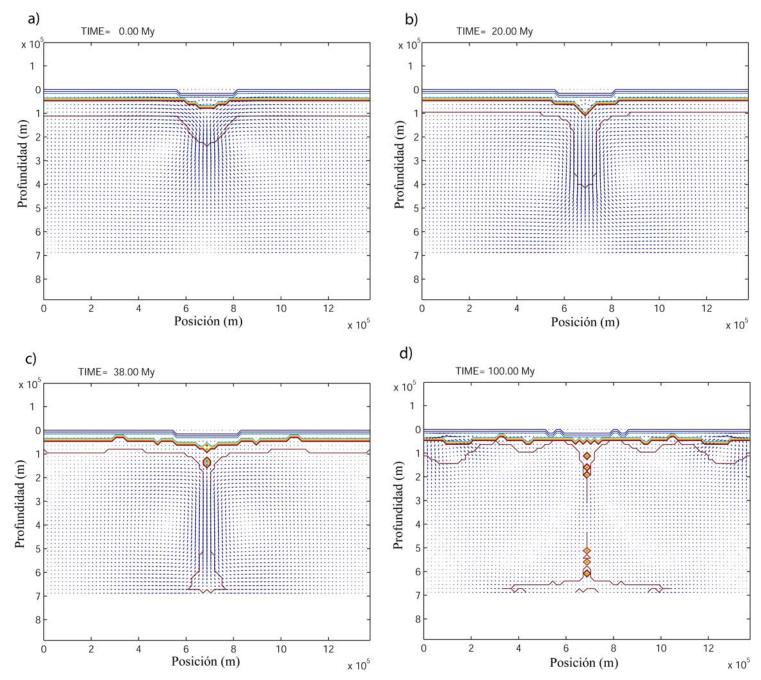


Figura 3.3 - Estado inicial (a) y evolución tras 20 Ma (b), 38M a (c) y 100 Ma (d) del modelo con estratificación de la viscosidad. Las líneas indican igual densidad. Comentarios en el texto.

4.- Aplicación del modelo dinámico al mar de Alborán y la cordillera Bético-Rifeña¹.

4.1.- Introducción

La complejidad de la evolución del mar de Alborán durante el Neógeno ha despertado un enorme interés en la comunidad científica nacional e internacional. El origen de esta cuenca -asociado a procesos de extensión que durante el Mioceno inferior y medio adelgazaron una litosfera continental previamente engrosada, coexistentes con cabalgamientos y acortamientos en las zonas más externas de la cuenca- ha sido sometido a un intenso debate en los últimos años (e.g. Comas et al, 1992; Platt et al., 1996).

Además, la ocurrencia de terremotos de profundidad intermedia, entre 40 y 130 km (e. g. Buforn et al., 1991), y el adelgazamiento cortical y litosférico observado en la zona - con corteza de 30 km de espesor bajo el arco de Gibraltar y menos de 12 km de espesor en el centro de la cuenca de Alborán y espesores de manto litosférico que van desde 140 km bajo el arco de Gibraltar hasta menos de 50 km en la parte oriental de la cuenca (e. g. Torne et al., 2000) - son observables que cualquier posible hipótesis sobre el origen del mar de Alborán debe tener en consideración.

Más aún, las imágenes tomográficas de Villaseñor et al. (2003, figura 4.1), basadas en un modelo global de propagación de ondas P, muestran –como ya hicieran Blanco y Spakman (1992) y otros autores posteriores (e.g. Gutscher et al., 2002; Calvert et al., 2000)- la existencia de una región de alta velocidad de ondas P que parece alcanzar los 650 km de profundidad y reposar sobre la base del manto superior. Las imágenes de Villaseñor et al. (2003) muestran una proyección vertical de los terremotos de profundidad intermedia de la región que ponen de manifiesto que estos terremotos ocurren en una zona de baja velocidad de ondas P.

¹ Los resultados de este capítulo han sido presentados en una comunicación oral en la V Asamblea Hispano-Lusa de Geodesia y Geofísica celebrada en Sevilla en febrero de 2006. Fruto de esa participación es su publicación en el libro de resúmenes de dicho congreso. (Valera y Negredo, 2006). Además, han sido presentados como póster en el Congreso de la European Geophysical Union celebrada en abril de 2006 en Viena.

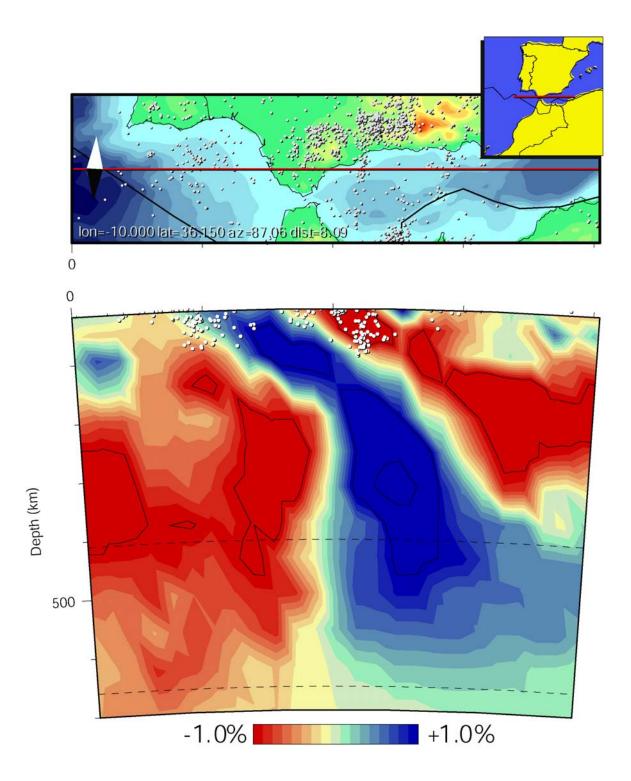


Figura 4.1.- Imagen tomográfica de Villaseñor et al., 2003., basada en un modelo global de propagación de ondas P. Este modelo ha sido obtenido usando los tiempos de llegada de terremotos listados en los boletines del International Seismological Centre (ISC), reprocesados usando la metodología EHB (Engdahl et al., 1998). El método de inversión es el mismo de Bijwaard et al. (1998), pero con un significativo aumento datos gracias a la incorporación de tiempos de llegada de terremotos regionales. La figura muestra, además, una proyección de los terremotos ocurridos en la zona en el intervalo 1964-2002, listados en los boletines del ISC.

Serrano et al. (1998) ya indicaron esta asociación entre la sismicidad intermedia en la región de Alborán y una zona de baja velocidad asociada a corteza continental en su estudio de la zona a partir de imágenes tomográficas obtenidas a partir de los tiempos de llegada de las ondas P en terremotos locales.

Las dificultades que plantea conciliar estas observaciones han sido causa de la aparición de muy diferentes hipótesis para explicar el origen del mar de Alborán. Estas hipótesis incluyen la extensión asociada al rejuvenecimiento litosférico generado por procesos de remoción convectiva o de delaminación (presentados con detalle en el capítulo 1 de este trabajo) y la extensión causada por un proceso de verticalización ("roll back") de una litosfera en subducción. Actualmente, existe una fuerte polémica entre los defensores de una evolución de tipo subductivo y los defensores de un esquema de tipo adelgazamiento convectivo (en su versión asimétrica o delaminación o en su versión simétrica o remoción convectiva) para el mar de Alborán. (e.g. Platt y Vissers, 1989; Lonergan y White, 1997; Gutscher et al., 2002).

Así pues, uno de los objetivos de este trabajo es elaborar un modelo dinámico sencillo que permita una comprensión básica de los posibles procesos físicos implicados en la evolución del mar de Alborán. Para esto, evaluaremos cuantitativamente los modelos conceptuales más representativos propuestos para esta región, aplicando nuestro modelo dinámico a fin de reproducir, variando únicamente la geometría inicial, cada uno de esos modelos conceptuales. Pretendemos determinar los observables "clave" que permitan discriminar un modelo de otro a fin de establecer el más adecuado para la región. Compararemos los resultados obtenidos para cada uno de los modelos con imágenes tomográficas disponibles para la zona, la distribución de sismicidad, el adelgazamiento litosférico y cortical que se observa en el mar de Alborán y la aparición de extensión. La validez de nuestros resultados será una demostración práctica de la validez y aplicabilidad de nuestro código.

4.2.- Modelos Conceptuales Propuestos

La evolución de mar de Alborán y zonas circundantes es un tema muy controvertido debido a lo complejo de la región, como ya se ha presentado. Por ello en los últimos años han aparecido diversos modelos conceptuales para intentar explicar esta evolución. Todos ellos tienen en común que ofrecen una explicación para la aparición de extensión en el Mioceno inferior y medio, coexistente con la convergencia de África e Iberia dirección NNW-SSE (figura 4.2).

El primero de estos modelos sería el de "remoción convectiva" ("convective removal"). Entre otros autores, Platt y Vissers (1989) proponen lo que resulta ser una aplicación del modelo propuesto originariamente por Houseman et al. (1981). Su propuesta incluye la ruptura y el desprendimiento de la raíz orogénica hace aproximadamente 20-25 Ma y su hundimiento en la astenosfera (figura 4.2a).

Posteriormente, Calvert et al. (2000) propusieron una modificación del anterior modelo a partir de sus propias imágenes tomográficas. Estos autores proponían una evolución basada en el mecanismo de delaminación por el cual la astenosfera ha desgajado el manto litosférico de la corteza (figura 4.2b).

Un tercer modelo propuesto por varios autores (e. g. Lonergan y White, 1997; Gutscher et al., 2002) explicaría la aparición de la extensión por el mecanismo de roll back -esto es, de una migración hacia el oeste de una zona de subducción oceánica debido a la verticalización del *slab* que subduce (figura 4.2c). Esta migración provocaría extensión en la placa superior, de manera semejante a como se propone que se originan las cuencas de tras-arco (figura 1.6).

Para arrojar cierta luz sobre esta polémica sería deseable evaluar de manera cuantitativa y comparada estos modelos puramente conceptuales. Nuestro algoritmo permite hacer este análisis comparativo mediante la variación de la geometría inicial correspondiente a cada modelo, dado que la física que subyace a los tres modelos es parecida: el balance de fuerzas gravitatorias.

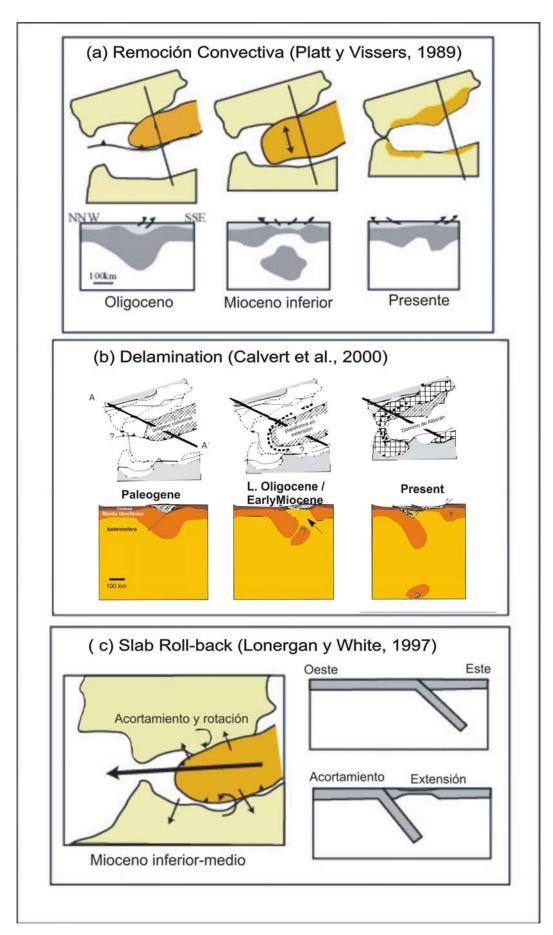


Figura 4.2 – Modelos de evolución propuestos para Alborán. Modificado de Calvert et al., 2000.

4.3.- Modelo aplicado

Hemos aplicado el programa NASCEM que ha sido detalladamente explicado en el capítulo anterior.

Para la modelización de la evolución del mar de Alborán, hemos considerado un fluido estratificado en cuatro capas (corteza superior, corteza inferior, manto litosférico y astenosfera) de viscosidad y densidad constantes dentro de cada capa. Hemos adoptado valores para la viscosidad dentro del rango que usualmente se considera en la literatura (e.g. Schott y Schmeling, 1998; Marotta et al., 1999; Morency y Doin, 2004) y valores medios de la densidad tomados de la modelización térmica y gravitatoria realizada en la zona por Torné et al. (2000). (Tabla 4.1).

Tabla 4.1 - Valores de densidad y viscosidad utilizados

Como	Densidad	Viscosidad (Pa.s)	
Capa	(Kg/m^3)	(logaritmo decimal)	
Astenosfera	3200	20	
Manto litosférico	3250	22	
Corteza inferior	2900	20	
Corteza superior	2800	23	

El modelo tiene unas dimensiones de 1376 km en la dimensión horizontal y 688 km en la dimensión vertical, lo que significa que el modelo alcanza la base del manto superior y, en horizontal, el doble de tamaño para evitar los efectos de borde. El paso de malla es de 16 km, lo que significa que tenemos una malla de 87x44 nodos. El paso temporal elegido en las ejecuciones ha sido de 0.5 Ma, aunque los resultados con pasos de malla superiores e inferiores no variaban cualitativamente. En todas las ejecuciones hemos considerado un tiempo de evolución de 25 Ma, que es compatible con los modelos presentados.

4.4.- Resultados

Presentamos a continuación los resultados obtenidos al reproducir cada uno de los modelos conceptuales propuestos para el Mar de Alborán presentados anteriormente.

4.4.1.- Adelgazamiento convectivo simétrico o remoción convectiva

Comenzaremos intentando reproducir el modelo propuesto por Platt y Vissers (1989) que hemos denominado "Adelgazamiento convectivo simétrico o remoción convectiva". Partimos de un estado inicial con una litosfera de 112 km de espesor compuesta por una corteza superior de 16 km y una corteza inferior de 24 km de espesor, lo que suman 40 km de espesor cortical inicial, y un manto litosférico de 72 km de espesor. Para simular una litosfera orogénica, imponemos una perturbación que dobla el espesor de las tres capas, alcanzando la litosfera los 224 km de profundidad (figura 4.3a).

Dejando evolucionar el modelo 25 Ma, nuestros resultados preliminares muestran que el mecanismo de remoción convectiva no consigue obtener adelgazamiento cortical. La corteza engrosada permanece prácticamente igual que en el estado inicial, mientras que el manto litosférico ha alcanzado los 600 km de profundidad sin que se haya obtenido un adelgazamiento significativo de la litosfera (figura 4.3). Este resultado muestra que este modelo presenta dificultades para explicar el adelgazamiento cortical y litosférico observado en el mar de Alborán (e.g. Torné et al., 2000).

4.4.2.- Adelgazamiento convectivo asimétrico o Delaminación

A fin de reproducir la evolución dinámica del modelo de Calvert et al. (2000) de delaminación, partimos de un estado inicial con idéntica geometría al caso anterior, pero introduciendo un conducto de baja viscosidad de 30 km de anchura en el margen derecho de la perturbación (figura 4.4.a). Con este conducto de baja viscosidad pretendemos simular el conducto astenosférico que permitiría poner en contacto la astenosfera con la base de la corteza, lo cual desencadenaría la delaminación según el modelo original de Bird (1979, figura 1.2). La idea de este conducto proviene de los estudios sobre la ruptura y hundimiento ('detachment') de la raíz litosférica de Marotta et al. (1998, 1999) y es una reducción de la amplísima zona de baja viscosidad de más de 200 km de ancho que proponen Schott y Schmeling (1998).

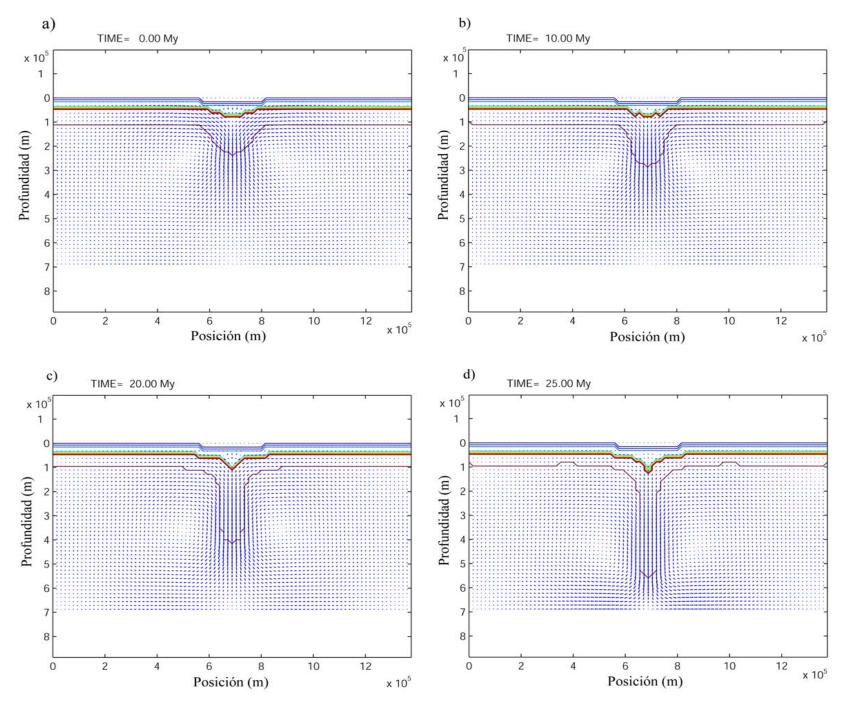


Figura 4.3 – Estado inicial (a) y evolución tras 10 Ma (b), 20Ma (c) y 25 Ma (d) del modelo de adelgazamiento convectivo simétrico o remoción convectiva. Las líneas indican igual densidad.

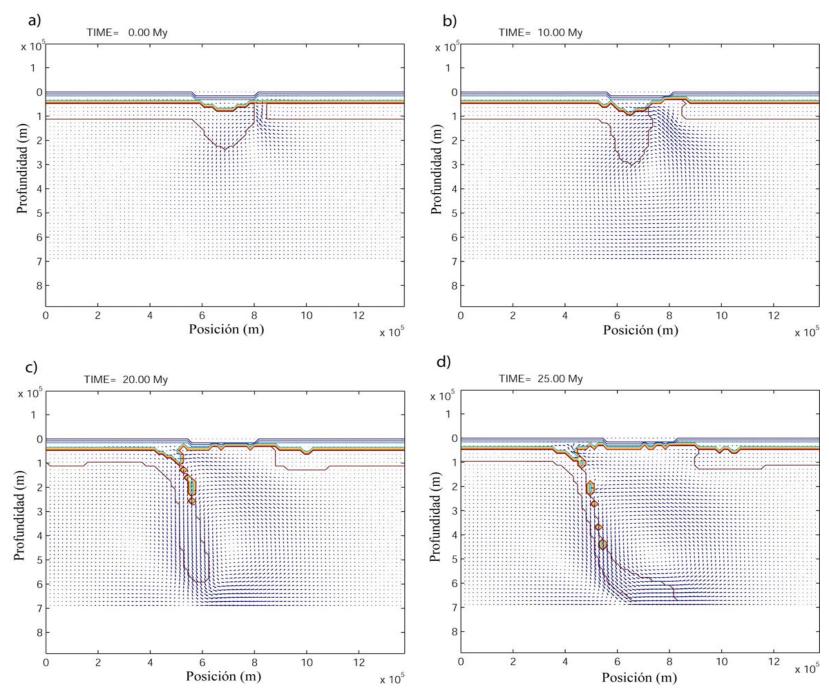
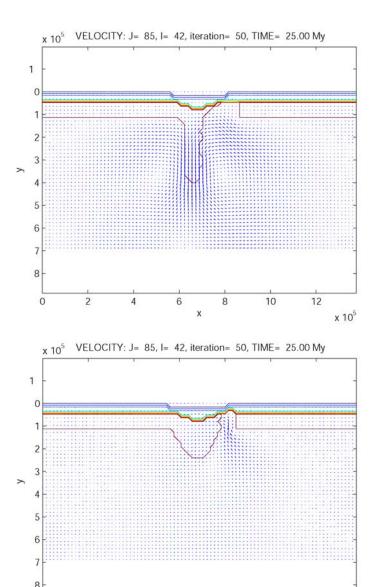


Figura 4.4 - Estado inicial (a) y evolución tras 10 Ma (b), 20Ma (c) y 25 Ma (d) del modelo de adelgazamiento convectivo asimétrico o delaminación. Las líneas indican igual densidad.

La evolución es completamente diferente. A lo largo del proceso, se puede observar como la astenosfera va penetrando por la corteza inferior, propagando la ruptura hacia la izquierda y generando adelgazamiento en la corteza orogénica (figura 6.4b y 6.4c). Todo el engrosamiento de la corteza migra hacia la izquierda, arrastrado por la succión que ejerce el bloque de litosfera (*slab*) que comienza a descender. Este arrastre se ejerce principalmente sobre la corteza inferior, menos viscosa que la superior, alcanzando altas profundidades (figura 4.4c).

En el tiempo final de evolución que hemos fijado en 25 Ma, (figura 4.4d) podemos comprobar como la astenosfera está en contacto con la corteza inferior, lo que provocará elevación topográfica y extensión. La litosfera orogénica prácticamente ha desaparecido y, aún más, tenemos un adelgazamiento de la corteza en dos zonas concretas: a la izquierda, en la vertical del *slab* aproximadamente; y a la derecha, en la situación inicial del conducto. Este adelgazamiento ocurre, principalmente, en la corteza inferior, como se ha propuesto en trabajos anteriores (e.g. Torné y Banda, 1992). Aunque estamos al límite de nuestra resolución en la corteza, nuestros resultados parecen indicar que la corteza inferior se ve arrastrada por el *slab* litosférico, alcanzando profundidades de hasta 120-130 km de profundidad. Esto podría explicar los terremotos de profundidad intermedia que, según los estudios, alcanzan estas profundidades (e.g. Buforn et al 91). Según las tomografías de Serrano et al. (98) obtenidas a partir de la propagación de ondas P de terremotos locales, esta sismicidad intermedia ocurre en zonas de baja velocidad que estos autores interpretan como corteza continental.

Es notable la gran simetría entre la geometría del *slab* resultante de este modelo de delaminación e imagen tomográfica de Villaseñor et al. (2003, figura 4.1) que muestra, como ya lo hicieron Blanco y Spakman (1992) y otros autores posteriores (e. g. Gutscher et al., 2002; Calvert et al., 2000), la existencia de una región de ata velocidad de ondas P que parece alcanzar los 650 km de profundidad y reposar sobre la base del manto superior. La imagen tomográfica también muestra que los terremotos ocurren en una zona de baja velocidad de ondas P, compatible con nuestras profundidades para la corteza inferior arrastrada en la delaminación.



x 10⁵

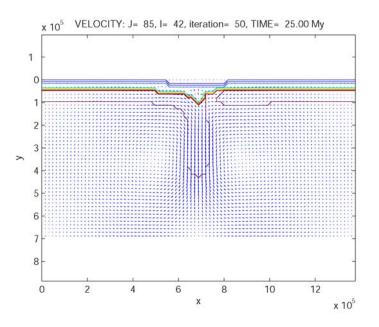


Figura 4.5 – Resultados tras 25 Ma de evolución al reproducir el mecanismo de remoción convectiva con diferentes estructuras de viscosidad. En todos los casos, el estado inicial fue el presentado en la figura 4.4.a. Los valores vienen dados en la Tabla 4.2. a) Modelo 3, con ausencia de corteza inferior de baja viscosidad. La delaminación apenas progresa. b) Modelo 4, con manto litosférico más viscoso. La delaminación no progresa. c) Modelo 5, con astenosfera más viscosa. La delaminación no progresa.

Se han realizado varias ejecuciones de contraste con la misma geometría y tiempos de evolución, variando los valores de la viscosidad en cada capa (tabla 4.2). Hemos comprobado que sin la presencia de una capa de baja viscosidad en la corteza inferior la delaminación no progresa, sino que adopta un aspecto de evolución similar a la remoción convectiva (figura 4.5 a). La presencia de esta capa de baja viscosidad permite un desacoplamiento mecánico entre el manto litosférico más denso y la corteza menos densa y es, por tanto, fundamental para el establecimiento y progreso de la delaminación. Este resultado concuerda con los resultados obtenidos con modelos genéricos de varios autores (e.g. Schott y Schmeling, 1998; Morency y Doin, 2004). Igualmente ocurre si la viscosidad de la astenosfera aumenta, ya que la astenosfera tiene mayor dificultad para extenderse a lo largo de la base de la corteza y opone, además, mayor resistencia al hundimiento del manto litosférico. Incrementar la viscosidad del manto litosférico, sin embargo, ralentiza el proceso, pero no modifica cualitativamente los resultados.

Tabla 4.2 – Modelos utilizados

Modelo	Logaritmo decimal de la viscosidad log(Pa.s)					Figura
	Astenosfera	Manto litosférico	Corteza inferior	Corteza superior		
1	20	22	20	23		4.3
2	20	22	20	23	canal	4.4
3	20	22	23	23	canal	4.5
4	21	22	20	23	canal	4.5
5	20	23	20	23	canal	4.5
6	20	22	20	23		4.6

Nuestro modelo numérico reproduce bien el modelo conceptual propuesto por Calvert et al. (2000) a pesar de que tenemos varias limitaciones. La más importante es que nuestro modelo no incluye los efectos térmicos, por lo que no podemos tener en cuenta la posible reaparición por enfriamiento de manto litosférico, que contrarrestaría la elevación topográfica, que provocaría subsidencia (hundimiento) por contracción térmica. Por otra parte, la fuerte erosión que habría afectado al terreno elevado contribuiría al adelgazamiento de la corteza, con el consiguiente aumento de la subsidencia. Pero este punto queda postergado para posteriores estudios.

4.4.3.- Subducción

Presentamos finalmente los resultados obtenidos al intentar reproducir el mecanismo de roll-back asociado a la subducción propuesto por, entre otros, Lonergan y White, (1997). Partimos de un estado inicial con la litosfera engrosada del mismo modo

que en los casos anteriores, y sustituimos la perturbación de tipo orógeno del manto litosférico por un *slab* que alcance los 300 km de profundidad (figura 4.6a).

Podemos comprobar que tras una evolución de 25 Ma, el *slab* ha alcanzado la base del manto superior pero no ha habido adelgazamiento litosférico ni cortical. De hecho, la perturbación de la corteza permanece como en el estado inicial, con una ligera migración hacia el oeste de unos 50 km, lo que supone una velocidad de migración de la fosa de 0.2 cm/a. El espesor de la corteza aumenta ligeramente, menos de 20 km, en la vertical del *slab* debido al arrastre viscoso que éste ejerce sobre la corteza inferior (figura 5.b).

Otros autores obtienen velocidades de migración para la fosa de entre 0.5 y 4.3 cm/a en modelos genéricos de subducción, para diferentes valores de viscosidad y condiciones de contorno. Estos valores son muy superiores a los encontrados con nuestro modelo (Enns et al., 2005). Estos autores modelizan sólo la litosfera subducente y no consideran la existencia de la placa superior, lo cual elimina los efectos de frenado que la placa superior ejerce. La figura 4.7 muestra un modelo de evolución de una subducción, con la misma geometría y las mismas propiedades físicas que el presentado en la figura 4.5, al que se le ha eliminado la placa superior. En apenas 15 Ma, la fosa ha migrado más de 170 km hacia el interior de la placa oceánica, lo que supone una velocidad de migración de aproximadamente 1.2 cm/a, velocidad que se mantiene constante a lo largo de la evolución. Estos valores son más acordes con los resultados de Enns et al. (2005) lo que indica que la eliminación de la placa superior sobreestima las velocidades de migración de la fosa.

La comparación entre los resultados obtenidos considerando subducción y delaminación ilustra que ambos escenarios son compatibles con las imágenes tomográficas y también con la distribución de terremotos (figura 4.1). Sin embargo, las diferencias en la estructura de la corteza y del manto litosférico superficial son muy grandes, dado que el mecanismo de subducción no es capaz de obtener ni adelgazamiento litosférico ni adelgazamiento cortical. Por tanto, aunque en profundidad ambos modelos parecen semejantes, los efectos en superficie son muy diferentes en ambos mecanismos.

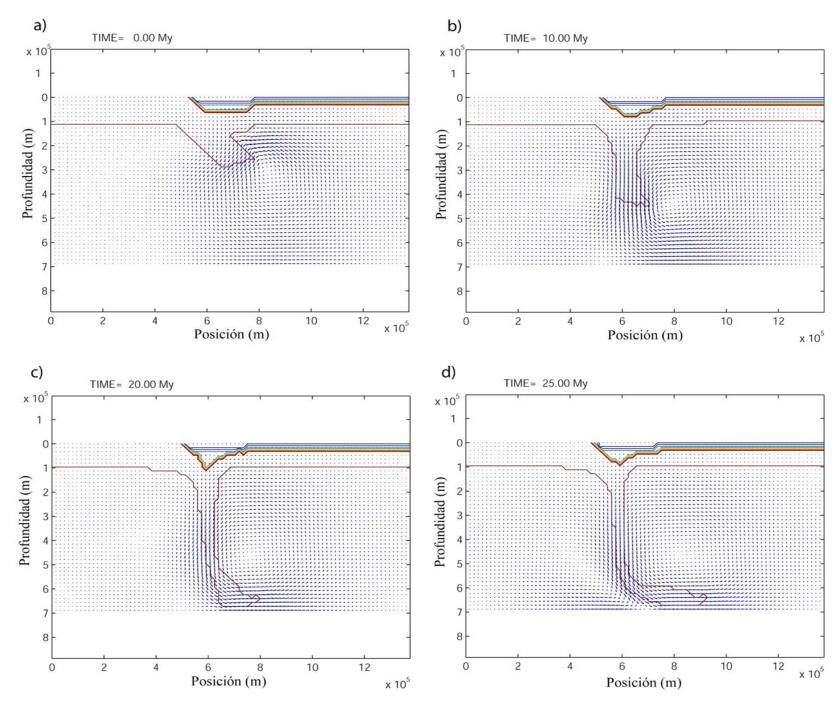


Figura 4.6 - Estado inicial (a) y evolución tras 10 Ma (b), 20Ma (c) y 25 Ma (d) del modelo de subducción. Las líneas indican igual densidad.

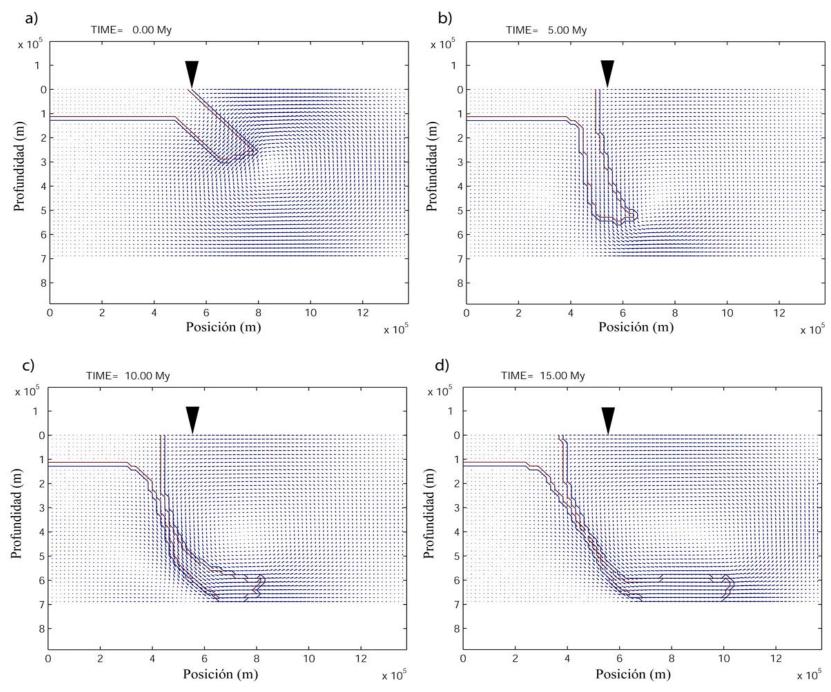


Figura 4.7 - Estado inicial (a) y evolución tras 5 Ma (b), 10Ma (c) y 15 Ma (d) del modelo de subducción sin placa superior. Las líneas indican igual densidad.

4.5.- Conclusiones

Nuestro modelo, a pesar de ser simplemente un enfoque dinámico, reproduce bastante bien las características más prominentes de los modelos conceptuales propuestos para el Mar de Alborán. Esto nos hace pensar que, para comprender bien los procesos físicos implicados en la evolución, es necesario evaluar los efectos que introduce la temperatura y los que son únicamente dinámicos. La obtención de estos resultados permite, además, comprobar la aplicabilidad del código elaborado.

Posteriores trabajos para esta zona deberán incluir en el modelo no sólo el efecto térmico sino la consideración de una reología no lineal así como aumentar la resolución en superficie, en los 100 primeros kilómetros, pues es en esa zona donde las diferencias entre los modelos de subducción y delaminación son más destacadas.

Nuestros resultados preliminares apuntan a que el mecanismo de delaminación es más eficaz que el de subducción para obtener adelgazamiento litosférico y cortical en la zona de la cuenca. Incluso con el mecanismo de delaminación, para obtener un adelgazamiento en tiempos de evolución compatibles con Alborán es necesaria la existencia de una corteza inferior de baja viscosidad y un manto litosférico y astenosfera de baja viscosidad. Ni el mecanismo de remoción convectiva ni el mecanismo de rollback asociado a subducción producen un adelgazamiento en los tiempos de evolución característicos de Alborán y, por tanto, no parecen adecuados para explicar la evolución de la zona.

A pesar de la similitud en la geometría en los procesos de subducción y delaminación, los efectos en superficie (calor superficial, espesor cortical, profundidad del moho, etc.) son muy diferentes y su modelización es clave a fin de distinguir un mecanismo de otro.

5.- Estudio analítico y numérico de la ecuación térmica.

5.1.- Introducción

Tras el estudio de la ecuación de movimiento y el desarrollo de un programa numérico capaz de resolverla y ofrecer resultados aceptables, comenzaremos el estudio de la ecuación del calor. Seguiremos aproximadamente el mismo esquema en el desarrollo: obtención analítica y análisis numérico. Pero no estudiaremos la aplicación de la ecuación térmica en sí misma a casos de interés, sino que consideraremos ya el acoplamiento entre la ecuación de movimiento estudiada anteriormente y la ecuación térmica. La resolución simultánea de ambas ecuaciones es de sumo interés para poder considerar modelos en los que la densidad y la viscosidad, entre otros parámetros dinámicos, puedan depender de la temperatura.

5.2.- Estudio analítico de la ecuación térmica

La aplicación de la segunda ley de la termodinámica a un elemento de fluido de densidad ρ exige considerar todas las posibles fuentes de calor que producen un aumento en la entropía. La ecuación completa es:

$$\rho T \frac{Ds}{Dt} = \Phi + \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \rho H \tag{5.1}$$

donde se expresa que el aumento de entropía con el tiempo (término de la izquierda) es la suma de las aportaciones realizadas por el calor generado en la disipación viscosa (primer término de la derecha, Φ), el calor perdido por la conducción térmica (segundo término de la derecha) y el calor generado internamente en el fluido (tercer término de la derecha).

El término de la disipación viscosa Φ o función disipación se calcula a partir del tensor de esfuerzos viscosos y la velocidad

$$\Phi = \tau_{ij} \frac{\partial u_{ij}}{\partial x_i} \tag{5.2}$$

El término de la conducción se calcula a partir de la ley de Fourier para la conducción del calor *q*:

$$q_i = -k \frac{\partial T}{\partial x_i} \tag{5.3}$$

donde k es la conductividad térmica y T la temperatura; mientras que H es el coeficiente de producción radiactiva de calor.

Vamos a desarrollar la ecuación (5.1). Aplicando las leyes termodinámicas, podemos desarrollar la entropía, para un fluido con dos fases:

$$ds = \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_{P,\beta} dT + \left(\frac{\partial s}{\partial P}\right)_{T,\beta} dP + \left(\frac{\partial s}{\partial \beta}\right)_{P,T} d\beta \tag{5.4}$$

donde β es el coeficiente que nos indica qué porcentaje de un componente ha cambiado de fase, en este caso, de olivino a espinela. Con este desarrollo de la entropía estamos introduciendo la *Aproximación de Boussinesq extendida*. Esta aproximación modifica la *Aproximación de Boussinesq* enunciada en el capítulo 2 incluyendo los efectos térmicos de la compresión (e.g. Schott y Schmeling, 1998). Dado que sólo tiene consecuencias térmicas, esta "aproximación extendida" no tiene ningún efecto sobre la ecuación de movimiento presentada en el capítulo 3.

Estas derivadas parciales son relaciones de Maxwell conocidas en las que:

$$\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_{P,\beta} = \frac{C_p}{T} \tag{5.5}$$

$$\left(\frac{\partial s}{\partial P}\right)_{T,\beta} = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{P,\beta} = -\frac{\alpha}{\rho} \tag{5.6}$$

$$\left(\frac{\partial s}{\partial \beta}\right)_{P,T} = \frac{L_T}{T} \tag{5.7}$$

donde C_p es el calor específico medio de la litosfera y del manto, V es el volumen, α es el coeficiente de expansión térmica y L_T es el calor latente liberado en la transición de fase; por lo que el desarrollo de la entropía (5.4) queda:

$$ds = \frac{C_P}{T}dT - \frac{\alpha}{\rho}dP + \frac{L_T}{T}d\beta \tag{5.8}$$

Calculando entonces la derivada total, obtenemos:

$$\frac{Ds}{Dt} = \frac{C_p}{T} \frac{DT}{Dt} - \frac{\alpha}{\rho} \frac{DP}{Dt} + \frac{L_T}{T} \frac{D\beta}{Dt}$$
(5.9)

Si sustituimos las ecuaciones (5.2), (5.3) y (5.9) en la ecuación (5.1) obtenemos:

$$\rho T \left(\frac{C_P}{T} \frac{DT}{Dt} - \frac{\alpha}{\rho} \frac{DP}{Dt} + \frac{L_T}{T} \frac{D\beta}{Dt} \right) = \tau_{ij} \frac{\partial u_{ij}}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \rho H$$
 (5.10)

Podemos desarrollar aún más los dos primeros términos de la derecha a fin de clarificar su significado.

Usando la definición de derivada total, podemos escribir esos términos de la siguiente manera:

$$\rho C_{P} \frac{DT}{Dt} - T\alpha \frac{DP}{Dt} = \rho C_{P} \left(\frac{DT}{Dt} - \frac{T\alpha}{\rho C_{P}} \frac{DP}{Dt} \right) =$$

$$\rho C_{P} \left\{ \frac{\partial T}{\partial t} + u \left(\nabla \cdot T \right) - \frac{T\alpha}{\rho C_{P}} \left[\frac{\partial P}{\partial t} + u \left(\nabla \cdot P \right) \right] \right\}$$
(5.11)

en donde hemos sacado factor común el término ρC_p

Vamos a considerar una presión hidrostática constante. Eso significa que la presión sólo tiene variación en la componente vertical (componente *z*, con la dirección de la aceleración gravitatoria) y depende sólo de la gravedad:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \rho g; \qquad \frac{\partial P}{\partial t} = 0; \qquad \frac{\partial P}{\partial x} = 0$$
 (5.12)

Aplicando esta hipótesis en (5.11) obtenemos:

$$\rho C_{P} \frac{DT}{Dt} - T\alpha \frac{DP}{Dt} = \rho C_{P} \left[\frac{DT}{Dt} - \frac{T\alpha}{\rho C_{P}} \left(\frac{\partial P}{\partial t} + u_{z} \frac{\partial P}{\partial z} \right) \right] = \rho C_{P} \left(\frac{DT}{Dt} - \frac{\alpha T u_{z} g}{C_{P}} \right)$$
(5.13)

Pasamos ahora a desarrollar el tercer término de la izquierda de la ecuación (5.10), relacionado con la transición de fase.

Consideraremos que β sólo depende de la temperatura y la profundidad. El desarrollo de su derivada total será, por tanto:

$$\frac{D\beta}{Dt} = \frac{\partial\beta}{\partial T}\frac{DT}{Dt} + \frac{\partial\beta}{\partial z}\frac{Dz}{Dt} = \frac{\partial\beta}{\partial T}\frac{DT}{Dt} + \frac{\partial\beta}{\partial z}u_z$$
 (5.14)

Así pues, el término de la ecuación (5.10) que estamos considerando resulta ser:

$$\rho L_T \left(\frac{D\beta}{Dt} \right) = \rho L_T \left(\frac{\partial \beta}{\partial T} \frac{DT}{Dt} + \frac{\partial \beta}{\partial z} u_z \right)$$
 (5.15)

Introduciendo las expresiones obtenidas en (5.13) y (5.15) en la ecuación (5.10) obtenemos:

$$\rho C_{p} \left(\frac{DT}{Dt} - \frac{\alpha T u_{z} g}{C_{p}} \right) + \rho L_{T} \left(\frac{\partial \beta}{\partial T} \frac{DT}{Dt} + \frac{\partial \beta}{\partial z} u_{z} \right) = \tau_{ij} \frac{\partial u_{ij}}{\partial x_{i}} - \frac{\partial}{\partial x_{i}} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_{i}} \right) + \rho H \quad (5.16)$$

que, reagrupando términos, puede escribirse como:

$$\left(1 + \frac{L_T}{C_P} \frac{\partial \beta}{\partial T}\right) \frac{DT}{Dt} = \left(\frac{\alpha Tg}{C_P} - \frac{L_T}{C_P} \frac{\partial \beta}{\partial z}\right) u_z + \frac{\tau_{ij}}{\rho C_P} \frac{\partial u_{ij}}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho C_P} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i}\right) + \frac{H}{C_P} \tag{5.17}$$

Esta ecuación puede desarrollarse más si aplicamos algunas hipótesis. Hemos visto ya que vamos a considerar la *Aproximación de Boussinesq extendida*. Esta

aproximación incluye todo lo que se ha desarrollado ya en el capítulo 3 para la *Aproximación de Boussinesq*. Vamos a seguir considerando despreciables las fuerzas inerciales y, por tanto, un resultado del capítulo anterior es que la *Aproximación de Boussinesq*, considerando fuerzas inerciales nulas, implica considerar fluido incompresible (ecuación 2.6).

Podemos, pues, aplicar las ecuaciones (2.6) y (2.10) en la ecuación (5.17) y desarrollar la derivada material para obtener:

$$\left(1 + \frac{L_T}{C_P} \frac{\partial \beta}{\partial T}\right) \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u_x \frac{\partial T}{\partial x} + u_z \frac{\partial T}{\partial z}\right) =$$

$$\frac{H}{C_P} - \frac{1}{\rho C_P} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i}\right) + \left(\frac{\alpha g}{C_P} T - \frac{L_T}{C_P} \frac{\partial \beta}{\partial z}\right) u_z + \frac{\mu}{\rho C_P} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \tag{5.18}$$

Los términos de la izquierda de la igualdad representan el cambio de calor debido al cambio de temperatura en un punto fijo y la advección. El primer término de la derecha expresa el calentamiento de origen radiogénico; el segundo término de la derecha representa la conducción de calor; el término con la gravedad describe el calentamiento adiabático (considerar este término no despreciable es un efecto de aplicar la Aproximación de Boussinesq extendida frente a la estándar); el que contiene L_T representa el calor latente liberado en la transformación de fase de olivino a espinela y el último término expresa el calentamiento viscoso o por rozamiento, proveniente de la función de disipación. Nótese que para obtener esta ecuación no hemos hecho ninguna hipótesis sobre la viscosidad; y que las hipótesis realizadas sobre la densidad son las mismas que se aplicaron en la ecuación de movimiento. Por tanto, sigue siendo válido poder considerar viscosidades y densidades variables, exactamente igual que vimos para la ecuación de movimiento-. En nuestro caso, la variación en la densidad es aproximadamente del 6% en la transformación de fase de olivino a espinela: $\Delta \rho_{ol\text{-}sp}$ =181 kg m⁻³ frente a un valor de referencia para la litosfera de ρ_L =3300 kg m⁻³ (Tetzlaff y Schmeling, 2000). Y tanto la ecuación térmica (5.18) como la ecuación de movimiento (2.16) son compatibles y pueden resolverse simultáneamente.

La necesidad de resolución simultánea de ambas ecuaciones viene dada por que hay ciertas variables que son resueltas en la ecuación de movimiento (las velocidades) que intervienen en la ecuación térmica; y variables de la ecuación térmica (las temperaturas) que condicionan los valores de ciertos parámetros de la ecuación de movimiento (la densidad y, en su caso, la viscosidad). Podemos llamar a estas variables comunes (la densidad, la viscosidad y la velocidad) las variables *acopladas*.

La presencia de estas tres variables acopladas complica la resolución del sistema. Por simplicidad, vamos a considerar despreciable el calentamiento por rozamiento y consideraremos constante a conductividad térmica k. Este último parámetro ha sido habitualmente considerado constante en la literatura y en los modelos publicados. Los últimos estudios consideran que debe aumentar con la profundidad, especialmente en el manto inferior, aunque aún no está demasiado clara la forma de esa dependencia (Schmeling y Bussod, 1996; Schubert et al., 2001).

De este modo, la ecuación térmica que resolveremos numéricamente será:

$$\left(1 + \frac{L_T}{C_P} \frac{\partial \beta}{\partial T}\right) \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_z \frac{\partial T}{\partial z}\right) = \frac{H}{C_P} - \frac{k}{\rho C_P} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial T}{\partial x_i}\right) + \left(\frac{\alpha g}{C_P} T - \frac{L_T}{C_P} \frac{\partial \beta}{\partial z}\right) u_z$$
(5.19)

5.3.- El estado térmico inicial y la transición olivino-espinela

La distribución inicial de temperaturas para una litosfera continental se calcula con una geoterma inicial para la corteza T_{cort} y el manto litosférico T_{mlit} dada por la solución estacionaria de la ecuación del conducción del calor (ecuación (5.19), considerando L_T nulo y temperatura nula en superficie).

$$T_{corr}(Z) = -\frac{H}{2k}z^{2} + \left(\frac{T_{L}}{L} - \frac{H}{2kL}h_{c}^{2} + \frac{H}{k}h_{c}\right)z$$
 (5.20)

donde h_c es el espesor de la corteza, T_L indica la temperatura en la base de la placa litosférica, y L es el espesor de la litosfera. Esta relación considera una producción de calor limitada a la corteza y con una temperatura T=0 °C en la superficie. La temperatura inicial para el manto litosférico en el caso continental viene dada por:

$$T_{mlit}(z) = \left(\frac{T_L}{L} - \frac{H}{2kL}h_c^2\right)z + \frac{H}{2k}h_c^2$$
(5.21)

El programa también incluye la posibilidad de simular la evolución de litosfera oceánica, que se calcula con el *modelo térmico de placa* GDH1 de Stein y Stein (1992).

$$T_{lit}(z,t') = T_L \left(\frac{z}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2 k t'}{\rho c_p L^2}\right) \right)$$
 (5.22)

donde t' es el tiempo transcurrido desde la formación de la litosfera en la dorsal oceánica -es decir, la edad de la litosfera-.

Consideramos el siguiente perfil adiabático para la temperatura inicial en la astenosfera:

$$T(z) = T_L \exp\left(\frac{g\alpha}{c_p} \left(z - z_a\right)\right) \qquad z_{tr2} < z \le z_a$$
 (5.23)

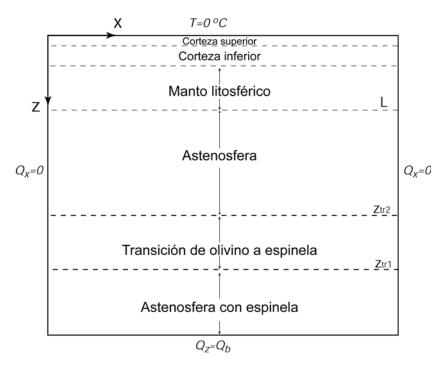


Figura 5.1. Estructura del material y condiciones de contorno que se aplican en TEMSPOL2.

Además incluimos un incremento total de temperatura ΔT causado por el calor latente liberado durante la transición olivino-espinela, que comienza a una profundidad que llamaremos z_{tr2} y termina a z_{tr1} (figura 5.1). En este intervalo, el incremento de temperatura viene dado por (Turcotte y Schubert, 2002):

$$\Delta T = \frac{L_T}{c_p} \tag{5.24}$$

Aceptaremos que este incremento sucede de manera lineal desde la temperatura T_{ztr2} a la profundidad z_{tr2} hasta T_{ztr1} a z_{tr1} :

$$T(z) = \frac{\Delta T}{z_{tr2} - z_{tr1}} (z_{tr2} - z) + T_{ztr2} \qquad z_{tr1} \le z \le z_{tr2}$$
 (5.25)

En la zona subyacente a la transición, la temperatura inicial viene dada por:

$$T(z) = \left(T_{ztr2} + \Delta T\right) \exp\left(\frac{g\alpha}{c_p} \left(z - z_{tr1}\right)\right) \qquad 0 \le z \le z_{tr1}$$
 (5.26)

El código tiene en cuenta la reacción exotérmica de transición de fase entre olivino y espinela que se produce por término medio en la astenosfera a unos 400 km de profundidad. Para introducir este cambio de fase en el modelo, no resolvemos las ecuaciones de cinética de la reacción como hicieron Dässler y Yuen (1996) pues se obtiene una ecuación no lineal de cuarto orden acoplada a la ecuación térmica. Por el contrario, seguimos el enfoque que propusieron Schmeling et al. (1999) y utilizamos sus diagramas de fase simplificados a partir de datos de Akaogi et al. (1989) (Figura 5.2).

Como se puede ver en la figura 5.2, las líneas 1% (β =0.01) y 99% (β =0.99) separan los regímenes controlados por el olivino y la espinela. Las líneas verticales representan la transición desde el olivino en estado metaestable a espinela y sólo son atravesadas por la geoterma de un bloque litosférico frío que se esté hundiendo en el manto (bien por subducción, bien por adelgazamiento convectivo). El límite superior del intervalo de transición de fase en el manto no perturbado por la subducción (z_{tr2}) viene dada por la intersección entre la geoterma inicial de la astenosfera y la línea

superior del diagrama de fase. Se observa que corresponde al valor esperado de unos 400 km de profundidad. z_{tr1} podemos ahora calcularlo sustituyendo $T_{ztr2} + \Delta T$ en la ecuación de la línea inferior de la transición de fase.

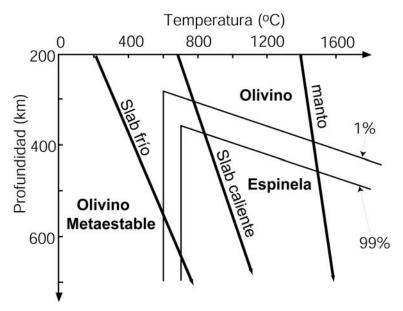


Fig. 5.2: Diagrama simplificado de equilibrio de fases de la transición olivino-espinela. Las líneas grises muestran la fracción de espinela β expresada en porcentajes de 1 % y 99 %. Las líneas negras gruesas representan geotermas (relaciones temperatura-profundidad) características de una lámina que subduce fría, caliente y del manto. Modificado de Schmeling et al. (1999).

A partir de este diagrama simplificado podemos calcular, en función de la temperatura y de la profundidad, la fracción de espinela β así como sus derivadas parciales de temperatura y profundidad. Por simplicidad, β se considera que también aumenta linealmente desde β =0 (no hay espinela) en la zona de olivino y olivino metaestable, hasta β =1 (sólo espinela) en la región de espinela.

Puesto que la espinela es más densa que el olivino, provoca variaciones de densidad. Consideraremos que la densidad vendrá dada por

$$\rho = \rho_0 (1 - \alpha T) + \Delta \rho_{ol-sp} \beta \tag{5.27}$$

donde ρ_0 es la densidad de referencia a temperatura cero y $\Delta \rho_{ol-sp}$ es el incremento de densidad debido a la transición de fase. No tendremos en cuenta otros cambios en la densidad, puesto que estamos aplicando la *Aproximación de Boussinesq extendida*.

Las condiciones de contorno que consideramos en el programa (figura 5.1) son:

- \Box T=0°C en la superficie.
- □ Flujo horizontal nulo en las fronteras laterales.
- □ Flujo vertical constante en la base del modelo.

Este último flujo se calcula como el producto entre el gradiente vertical de la geoterma inicial en la base del modelo y la conductividad térmica, según la ley de Fourier.

5.4.- Estudio numérico de la ecuación térmica

Para resolver la ecuación de la energía (5.19) numéricamente hemos utilizado el algoritmo TEMSPOL2, una profunda modificación del algoritmo TEMSPOL (Valera, 2003; Negredo et al, 2004) aplicado ya con éxito a la región de Italia (Carminati et al., 2005) que aplica el Método Implícito de Direcciones Alternantes (ADI) y la ecuación resultante se resuelve por el Método de Doble Recorrido o Algoritmo de Thomas (Morton y Mayers, 1994). La modificación consistió en una completa reestructuración del programa para permitir que las velocidades viniesen dadas por el algoritmo NASCEM. Esto permite una mayor versatilidad del programa, permitiendo evoluciones más complejas, en lugar de estar limitados a la subducción de ángulo constante como exigía TEMSPOL.

De manera esquemática, el método funciona dividiendo el paso temporal en dos subpasos. En el primer subpaso, se mantiene constante la coordenada vertical y se resuelve en la coordenada horizontal. En el segundo, se procede al revés, fijando la coordenada horizontal y resolviendo la vertical. En ambos casos, se obtiene un sistema de ecuaciones que puede resolverse por el Algoritmo de Thomas (Morton y Mayers 1994). Este algoritmo recorre la malla dos veces: en la primera, expresa cada solución en función de las soluciones anteriores hasta llegar a la última, en la que aplica la

condición de contorno para resolverla y volver a recorrer la malla en dirección contraria resolviendo cada solución.

A continuación procederemos a detallar el método y la formulación en diferencias finitas. En lo que sigue, el subíndice i corresponderá a la coordenada horizontal x, el subíndice j se referirá a la coordenada vertical z y el superíndice p al tiempo.

5.4.1.- Formulación en diferencias finitas de la ecuación de la energía.

Como se ha comentado, el Método bidimensional Implícito de Direcciones Alternantes es un esquema en el que se resuelve la variable dependiente en una dirección en un paso de tiempo p+1 y luego en la otra dirección en un tiempo p+2. Vamos a usar la siguiente convención para la descripción de la malla:

$$x=i\Delta x \qquad i=1,2,...,I$$

$$z=j\Delta z \qquad j=1,2,...,J$$

$$t=p\Delta t \qquad p=1,2,...,P$$

$$T_{i,j}^{p}=T_{i\Delta x,j\Delta z}^{p\Delta t} \qquad (5.28)$$

Consideremos la expresión en diferencias finitas de la ecuación (5.19) en la que las derivadas de la temperatura respecto a x son evaluadas en el paso temporal p+1 y las derivadas respecto de z en el p. Utilizaremos la expresión de diferencias centradas para las derivadas en las coordenadas espaciales y diferencias adelantadas para las derivadas temporales. Así, en el punto de malla i, j la ecuación que resulta es:

$$R_{i,j}^{p} \left(\frac{T_{i,j}^{p+1} - T_{i,j}^{p}}{\Delta t} + v_{xi,j}^{p} \frac{T_{i+1,j}^{p+1} - T_{i-1,j}^{p+1}}{2\Delta x} + v_{zi,j}^{p} \frac{T_{i,j+1}^{p} - T_{i,j-1}^{p}}{2\Delta z} \right) = \frac{H_{i,j}^{p}}{\rho_{i,j}^{p} c_{p}} + \frac{K}{\rho_{i,j}^{p} c_{p}} \left(\frac{T_{i+1,j}^{p+1} - 2T_{i,j}^{p+1} + T_{i-1,j}^{p+1}}{\Delta x^{2}} + \frac{T_{i,j+1}^{p} - 2T_{i,j}^{p} + T_{i,j-1}^{p}}{\Delta z^{2}} \right) - v_{zi,j}^{p} \left(\frac{L_{T}}{c_{p}} \left(\frac{\partial \beta}{\partial z} \right)_{i,j}^{p} + \frac{\alpha g T_{abs\,i,j}^{p}}{c_{p}} \right)$$

$$(5.29)$$

donde

$$R_{i,j}^{p} = 1 + \frac{L_{T}}{c_{p}} \left(\frac{\partial \beta}{\partial T}\right)_{i,j}^{p} \tag{5.30}$$

Tras agrupar términos en la expresión anterior, se obtiene:

$$A_{i}T_{i-1,i}^{p+1} + B_{i}T_{i,i}^{p+1} + C_{i}T_{i+1,i}^{p+1} = D_{i}$$

$$(5.31)$$

en donde los coeficientes son:

$$A_{i} = -\frac{R_{i,j}^{p}}{2\Delta x} v_{xi,j}^{p} - \frac{K}{\rho_{i,j}^{p} c_{p} \Delta x^{2}},$$
(5.32)

$$B_{i} = \frac{R_{i,j}^{p}}{\Delta t} + \frac{2K}{\rho_{i,j}^{p} c_{n} \Delta x^{2}},$$
(5.33)

$$C_{i} = \frac{R_{i,j}^{p}}{2\Delta z} v_{zi,j}^{p} - \frac{K}{\rho_{i}^{p} c_{p} \Delta x^{2}}$$
 y (5.34)

$$D_{i} = \frac{R_{i,j}^{p}}{\Delta t} T_{i,j}^{p} - \frac{R_{i,j}^{p}}{2\Delta z} v_{zi,j}^{p} \left(T_{i,j+1}^{p} - T_{i,j-1}^{p} \right) + \frac{K}{\rho_{i,j}^{p} c_{p} \Delta z^{2}} \left(T_{i,j+1}^{p} - 2T_{i,j}^{p} + T_{i,j-1}^{p} \right) - v_{zi,j}^{p} \left(\frac{L_{T}}{c_{p}} \left(\frac{\partial \beta}{\partial z} \right)_{i,j}^{p} + \frac{\alpha g T_{absi,j}^{p}}{c_{p}} \right) + \frac{H_{i,j}^{p}}{\rho_{i,j}^{p} c_{p}}$$

$$(5.35)$$

Obtendremos una ecuación como ésta en cada punto de la j-ésima fila, completando un juego de I ecuaciones. Este conjunto de ecuaciones da una temperatura en cada paso temporal p+1 en cada punto de la j-esima fila en función de variables conocidas en el paso de tiempo p. Aplicamos entonces el Algoritmo algebraico de Thomas para resolver este conjunto de ecuaciones. El desarrollo de este algoritmo viene detallado en la siguiente sección.

De manera análoga, consideremos ahora la expresión en diferencias finitas de la ecuación (5.19) en la que las derivadas de la temperatura respecto a x son evaluadas en el paso temporal p+1 y las derivadas respecto de z en el p+2. Al igual que en el paso anterior, utilizaremos la expresión de diferencias centradas para las derivadas en las coordenadas espaciales y diferencias adelantadas para las derivadas temporales. Así, en el punto de malla i, j la ecuación que resulta es:

$$R_{i,j}^{p} \left(\frac{T_{i,j}^{p+2} - T_{i,j}^{p+1}}{\Delta t} + v_{xi,j}^{p} \frac{T_{i+1,j}^{p+1} - T_{i-1,j}^{p+1}}{2\Delta x} + v_{zi,j}^{p} \frac{T_{i,j+1}^{p+2} - T_{i,j-1}^{p+2}}{2\Delta z} \right) = \frac{H_{i,j}^{p}}{\rho_{i,j}^{p} c_{p}} + \frac{K}{\rho_{i,j}^{p} c_{p}} \left(\frac{T_{i+1,j}^{p+1} - 2T_{i,j}^{p+1} + T_{i-1,j}^{p+1}}{\Delta x^{2}} + \frac{T_{i,j+1}^{p+2} - 2T_{i,j}^{p+2} + T_{i,j-1}^{p+2}}{\Delta z^{2}} \right) - v_{zi,j}^{p} \left(\frac{L_{T}}{c_{p}} \left(\frac{\partial \beta}{\partial z} \right)_{i,j}^{p+1} + \frac{\alpha g T_{absi,j}^{p+1}}{c_{p}} \right)$$

$$(5.36)$$

que, tras agrupar términos, vuelve a tener una expresión del tipo:

$$A_{i}T_{i,j-1}^{p+2} + B_{i}T_{i,j}^{p+2} + C_{i}T_{i,j+1}^{p+2} = D_{i}$$

$$(5.37)$$

donde

$$A_{j} = -\frac{R_{i,j}^{p}}{2\Delta z} v_{xi,j}^{p} - \frac{K}{\rho_{i}^{p} c_{p} \Delta z^{2}},$$
(5.38)

$$B_{j} = \frac{R_{i,j}^{p}}{\Delta t} + \frac{2K}{\rho_{i,j}^{p} c_{p} \Delta z^{2}},$$
(5.39)

$$C_{j} = \frac{R_{i,j}^{p}}{2\Delta z} v_{zi,j}^{p} - \frac{K}{\rho_{i,j}^{p} c_{p} \Delta z^{2}}$$
 y (5.40)

$$D_{j} = \frac{R_{i,j}^{p}}{\Delta t} T_{i,j}^{p+1} - \frac{R_{i,j}^{p}}{2\Delta x} v_{xi,j}^{p} \left(T_{i+1,j}^{p+1} - T_{i-1,j}^{p+1} \right) + \frac{K}{\rho_{i,j}^{p} c_{p} \Delta x^{2}} \left(T_{i+1,j}^{p+1} - 2T_{i,j}^{p+1} + T_{i-1,j}^{p+1} \right) - v_{zi,j}^{p} \left(\frac{L_{T}}{c_{p}} \left(\frac{\partial \beta}{\partial z} \right)_{i,j}^{p+1} + \frac{\alpha g T_{absi,j}^{p+1}}{c_{p}} \right) + \frac{H_{i,j}^{p}}{\rho_{i,j}^{p} c_{p}}$$

$$(5.41)$$

Obtendremos una ecuación como esta en cada punto de la i-ésima columna, completando un juego de J ecuaciones simultáneas. Los I conjuntos de J ecuaciones obtenidas en el tiempo p+2 se resuelven aplicando el Algoritmo de Thomas.

De este modo, la temperatura en el tiempo p+2 se obtiene de la temperatura en el tiempo p en dos pasos temporales. Una ecuación implícita en x (ecuación (5.31)) es la que se usa para el primer paso temporal y una ecuación implícita en z (ecuación (5.37)) para el segundo.

5.4.2.- Aplicación del Algoritmo de Thomas al esquema ADI de la ecuación de la energía.

Consideremos el sistema de ecuaciones obtenidas en el paso temporal p+1:

$$A_i T_{i-1, i} + B_i T_{i, i} + C_i T_{i+1, i} = D_i$$
 $i = 1, 2, ..., I - 1$ (5.42)

donde para aligerar la notación hemos omitido los superíndices temporales. El Algoritmo de Thomas actúa reduciendo este sistema de ecuaciones a una forma matricial triangular superior, mediante la eliminación de T_{i-1} en cada ecuación. Consideremos que las primeras k ecuaciones del sistema anterior (5.42) han sido reducidas a la forma:

$$T_{i,j} - w_i T_{i+1,j} = g_i$$
 $i = 1, 2, ..., k$ (5.43)

La última de estas ecuaciones será:

$$T_{k,j} - w_k T_{k+1,j} = g_k (5.44)$$

y la siguiente ecuación, expresada en su forma original sería:

$$A_{k+1}T_{k,j} + B_{k+1}T_{k+1,j} + C_{k+1}T_{k+1,j} = D_{k+1}$$
(5.45)

Despejamos $T_{k,j}$ de estas dos últimas ecuaciones (5.44) y (5.45) y, reagrupando términos, obtenemos:

$$T_{k+1,j} - \frac{-C_{k+1}}{B_{k+1} + A_{k+1} w_k} T_{k+2,j} = \frac{D_{k+1} - A_{k+1} g_k}{B_{k+1} + A_{k+1} w_k}$$
(5.46)

Si comparamos esta ecuación con la expresión simplificada (5.43) resulta que podemos obtener los coeficientes w_i y g_i a partir de las siguientes relaciones de recurrencia:

$$w_{i} = \frac{-C_{i}}{B_{i} + A_{i}w_{i-1}} \qquad g_{i} = \frac{D_{i} - A_{i}g_{i-1}}{B_{i} + A_{i}w_{i-1}} \qquad i = 2,3,...,I$$
 (5.47)

Los valores iniciales pueden obtenerse aplicando en la ecuación simplificada (5.43) la condición de flujo de calor horizontal nulo en las fronteras laterales, $T_{1,j} = T_{2,j}$, luego:

$$w_1 = 1$$
 $g_1 = 0$

Podemos usar estos valores iniciales para, a través de las relaciones de recurrencia (5.47), calcular todos los coeficientes w_i y g_i . Luego podemos calcular el último valor de T aplicando de nuevo la condición de contorno en la otra frontera $T_{I,j} = T_{I-1,j}$ en la ecuación (5.42):

$$T_{I,j} = \frac{g_{I-1}}{1 - w_{I-1}} \tag{5.48}$$

De este modo, a partir del valor ya conocido de $T_{I,j}$, la ecuación (5.43) nos permite calcular los valores $T_{I-1,j}$, $T_{I-2,j}$, en orden, terminando con $T_{1,j}$. Este cálculo es estable siempre que se cumpla que $|w_i| < 1$.

En el siguiente paso temporal p+2, las derivadas de la temperatura con respecto a z son evaluadas en p+2, y las derivadas con respecto a x son evaluadas en el intervalo temporal p+1. Ahora tenemos que aplicar las condiciones de contorno en las fronteras inferior y superior del modelo. Consideramos un flujo de calor basal constante Q_b y obtenemos:

$$T_{i,2} = T_{i,1} - \frac{Q_b}{K} \Delta z \tag{5.49}$$

Aplicando ahora la ecuación (5.43) obtenemos:

$$T_{i,1} - w_1 \left(T_{i,1} - \frac{Q_b}{K} \Delta z \right) = g_1$$
 (5.50)

por lo que, si w_I =1, entonces tenemos que

$$g_1 = \frac{Q_b}{K} \Delta z . ag{5.51}$$

Podemos aplicar ahora las ecuaciones de recurrencia (5.47) para encontrar sucesivamente todos los demás coeficientes w_i y g_i . Finalmente, con la condición de temperatura superficial constante de 0°C, por lo que $T_{i,J}=0$, podemos aplicar de nuevo la ecuación (5.43) para calcular las temperaturas $T_{i,J-1},...,T_{i,1}$.

6.- Acoplamiento termomecánico

6.1.- Descripción del acoplamiento

Una vez presentado el algoritmo dinámico NASCEM en los capítulos 2 y 3 y el algoritmo térmico TEMSPOL2 en el capítulo 5, pasaremos ahora a describir brevemente como funciona el programa TESCH elaborado en MATLAB que resuelve el esquema acoplado y presentaremos unas primeras aplicaciones del esquema.

Como se ha mencionado anteriormente, la ecuación térmica (5.19) y la ecuación de movimiento (2.16) deben resolverse simultáneamente debido a que existen variables acopladas. Esto es, hay ciertas variables que son resueltas por la ecuación de movimiento (las velocidades) que intervienen en la ecuación térmica (en el término advectivo y en el de calentamiento adiabático). Y variables de la ecuación térmica (las temperaturas) que condicionan los valores de ciertos parámetros de la ecuación de movimiento (la densidad y, en su caso, la viscosidad).

Comparando las ecuaciones (5.19) y (2.16), podemos indicar exactamente donde aparecen esas variables acopladas:

- En la ecuación térmica: la velocidad, que interviene explícitamente en el término advectivo y en el término del calentamiento adiabático de la ecuación (5.19)
- En la ecuación de movimiento: la densidad (y, en su caso, la viscosidad) dependen de la temperatura. Nosotros vamos a estudiar casos en los que la densidad tendrá una dependencia con la temperatura

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \alpha T \right) \tag{6.1}$$

donde ρ_0 es la densidad de referencia a temperatura cero y α es el coeficiente de expansión térmica; y casos en los que incluiremos también

el término debido al incremento de densidad de la transición de fase del olivino a espinela (ecuación 5.27):

$$\rho = \rho_0 (1 - \alpha T) + \Delta \rho_{ol-sp} \beta \tag{5.27}$$

Vamos a considerar tres leyes para la viscosidad: viscosidad constante en todo el medio; viscosidad dependiente del material considerado (corteza superior, corteza inferior, litosfera o astenosfera); y viscosidad dependiente de la temperatura. La ley de dependencia para la viscosidad es una ley de tipo exponencial (Schubert et al., 2002):

$$\mu = \mu_0 \exp(-\gamma T) \tag{6.2}$$

donde μ_0 es una viscosidad de referencia para cada capa y γ es un parámetro reológico.

Además, el propio movimiento del material, dado por la resolución de la ecuación de movimiento, cambia la distribución de masas que entra en la ecuación térmica en cada iteración temporal.

6.2.- Descripción general del programa TESCH

El programa hereda las posibilidades combinadas de NASCEM y TEMSPOL2. Es decir, es un programa que permite el estudio de muy diferentes escenarios, desarrollando una evolución auto-consistente al resolver internamente las ecuaciones acopladas de la temperatura y el movimiento. Su sencillez de manejo y de modificación hace que pueda ser fácilmente aplicado para evaluar diferentes modelos de evolución.

El programa acoplado utiliza también dos mallas (una fija de nodos y otra flexible de marcadores) como las descritas en el capítulo 3 para el programa NASCEM. Igualmente, la estructura de interpolación y gestión de las propiedades físicas es idéntica al programa dinámico, y ha sido ya extensamente comentada en el capítulo 3.

El programa TESCH calcula un estado térmico inicial en función del tipo de material presente en cada nodo y su posición, utilizando las geotermas descritas en el capítulo anterior (ecuaciones 5.20 a 5.26). Con estas temperaturas, y con la densidad y viscosidad iniciales, resuelve la ecuación de movimiento para obtener las velocidades iniciales. Interpola a los marcadores la velocidad y las temperaturas, junto con el resto de propiedades físicas (densidad, viscosidad). Se mueven los marcadores según los valores de las componentes de la velocidad, arrastrando consigo los valores de densidad y viscosidad. Acto seguido se interpolan nuevamente las propiedades físicas de los marcadores a los nodos más cercanos y se vuelve a resolver la ecuación térmica. Con las nuevas temperaturas obtenidas se calculan unos nuevos valores para densidad y viscosidad que se introducen en la ecuación de movimiento, para calcular los nuevos valores de velocidad en cada nodo. Los nuevos valores se interpolan otra vez a los marcadores y hacemos avanzar el paso temporal. Este proceso se repite hasta alcanzar el tiempo final de evolución.

Se ha comprobado la convergencia de los resultados variando los parámetros temporales y geométricos de la malla. Los resultados obtenidos conservan las propiedades de convergencia presentados en la descripción del programa NASCEM y verifican que el programa es estable. Los límites de capacidad física que el algoritmo de resolución de la ecuación de movimiento nos imponía siguen siendo los mismos, dado que el algoritmo térmico es muy eficiente y no genera matrices grandes.

Los mayores problemas de estabilidad se han encontrado para contrastes muy fuertes de viscosidad con pasos de malla y pasos temporales grandes, heredados de los idénticos problemas de interpolación del programa dinámico.

6.3.- Diagrama de flujo

El diagrama de flujo del código acoplado TESCH es el presentado en la figura (6.1). Si se compara con el diagrama de flujo del programa NASCEM, se puede comprobar que la estructura es muy similar.

Para mayor brevedad y para evitar repeticiones, indicaremos únicamente las diferencias más significativas con el diagrama de flujo del programa NASCEM.

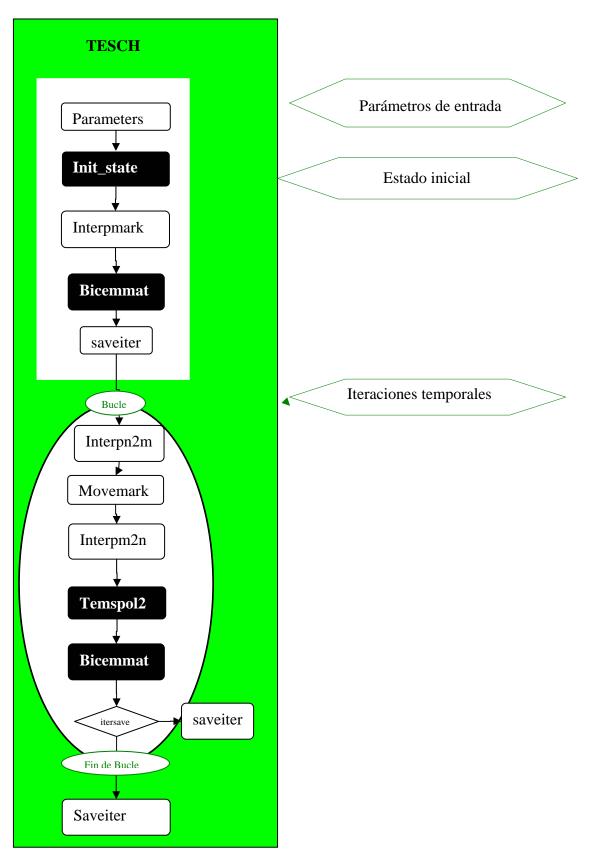


Figura 6.1 Diagrama de flujo del programa TESCH

Los parámetros de entrada que se dan en la subrutina *Parameters* incluyen parámetros físicos y parámetros numéricos y son las viscosidades y densidades de cada material, sus espesores, el número de nodos en horizontal y en vertical, los pasos de malla espaciales (en horizontal y en vertical) y temporal, el número de iteraciones temporales y algunos parámetros físicos como la aceleración de la gravedad, la conductividad térmica, la edad de la litosfera -necesaria para las ecuaciones del estado térmico inicial de la litosférica oceánica (ecuación 5.22).

La subrutina *Init_state* es una generalización de la subrutina interna *Cwave* que en el programa NASCEM era parte de *Bicemmat*. Ahora, la subrutina, además de dibujar la geometría inicial del programa, y asignar las propiedades físicas en función de los materiales, calcula un estado térmico inicial en función de la posición de cada nodo y del tipo de material presente, utilizando las geotermas descritas en el capítulo anterior (ecuaciones 5.20 a 5.26). El programa está preparado para generar un estado inicial de tipo remoción convectiva. Esto es, una perturbación de densidad de tipo Rayleigh-Taylor. Sin embargo, al igual que en el programa NASCEM, se incluye también una subrutina (*DesignC*) que permite diseñar un estado inicial cualquiera. De este modo, puede aplicarse también el programa a situaciones de *delaminación* o de tipo subductivo y estudiar así, por ejemplo, fenómenos como la ruptura de la raíz litosférica o el inicio y la evolución del roll-back, a fin de poder realizar estudios comparativos con los resultados obtenidos sólo resolviendo la ecuación de movimiento.

La ley de dependencia para la viscosidad también se fija en esta subrutina. Los parámetros reológicos μ_0 y γ de la ley (6.2), de usarse, se calculan automáticamente imponiendo que a T=1000°C la viscosidad sea el valor de referencia introducido en la subrutina *Parameters* para el manto litosférico y a T=1600°C la viscosidad sea el valor de referencia introducido en la subrutina *Parameters* para la astenosfera.

Las subrutinas de interpolación (Interpmark, interpn2m e interpn2m) así como la subrutina de movimiento (*Movemark*) son una adaptación directa de las subrutinas de NASCEM y utilizan los mismos métodos ya descritos en el capítulo 3.

Las dos subrutinas centrales son *Bicemmat* y *Temspol2*. *Bicemmat* ya ha sido descrita, en tanto en cuanto es la subrutina nuclear del programa NASCEM. La

subrutina *Temspol2* es la implementación del *algoritmo de Thomas* para resolver la ecuación térmica, tal y como se ha explicado con detalle en el capítulo 5. El programa *Temspol2* calcula la distribución de temperaturas, y con estas temperaturas, calcula los valores de densidad y viscosidad que utilizará después *Bicemmat* para resolver la ecuación de movimiento. En función de si estamos considerando o no dependencia con la temperatura, se utilizarán las expresiones (6.1), (6.2) para calcular los valores de densidad y viscosidad o se utilizarán valores constantes en cada material.

Por último, la subrutina Saveiter salva las variables de ejecución del programa en un formato que puede luego recuperarse con otras subrutinas externas para su tratamiento gráfico y escribe en un fichero *model.dat* los parámetros geométricos y físicos más importantes, así como el tiempo real de cómputo (medido como tiempo de uso de la CPU del ordenador) de toda la evolución estudiada.

6.4.- Simulaciones

Presentamos, a continuación, algunas ejecuciones del programa que ilustran los resultados obtenidos. Este conjunto de simulaciones no pretende ser exhaustivo ni proponer modelos realistas aplicables a sitios concretos. Simplemente utilizaremos estas simulaciones para mostrar la versatilidad del programa y sugerir algunas posibles aplicaciones.

Con esta intención, se presentarán ejecuciones que parten de una geometría inicial idéntica a la estudiada en el capítulo 4 para el mar de Alborán, pero sin ánimo de presentar nuevos modelos compatibles con la evolución de la región. La aplicación concreta del programa a la zona queda para posteriores estudios. Así pues, partimos de un estado inicial con una litosfera de 112 km de espesor compuesta por una corteza superior de 16 km y una corteza inferior de 24 km de espesor, lo que suman 40 km de espesor cortical inicial, y un manto litosférico de 72 km de espesor. Para simular una litosfera orogénica, imponemos una perturbación que dobla el espesor de las tres capas, alcanzando la litosfera los 224 km de profundidad.

En la tabla 6.1 aparecen los valores de los parámetros físicos comunes a todas las simulaciones.

Tabla 6.1 Parámetros de entorno usuales utilizados en el programa

Símbolo	Significado	Valor
k	Conductividad térmica	3.2 W m ⁻¹ K ⁻¹
C_p	Calor específico	$1.3 \times 10^3 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$
α	Coeficiente de expansión térmica	3.7×10 ⁻⁵ K ⁻¹
$\Delta ho_{ol ext{-}sp}$	Incremento de densidad debido a la transición olivino- espinela	181 kg m ⁻³
L_T	Calor latente liberado en la transición olivino-espinela	90 kJ kg ⁻¹
T_0	Temperatura en la base de la litosfera	1450 °C
g	Aceleración de la gravedad	9.8 m s ⁻²

6.4.1.- Simulaciones isoviscosas

Una primera comparación interesante a realizar sería comparar los resultados entre un modelo isoviscoso calculado con NASCEM y un modelo isoviscoso calculado con TESCH. Si anulamos también el efecto de la producción de calor y del incremento de densidad debido a la transición de fase de olivino a espinela, las diferencias entre ambos serán debidas únicamente al acoplamiento térmico.

Para hacer este análisis, reproduciremos la geometría y los valores que se usaron para el modelo isoviscoso calculado con NASCEM (figura 3.3), y ejecutaremos el programa TESCH sobre esta geometría. Compararemos una ejecución del programa TESCH considerando el acoplamiento y una ejecución del programa TESCH sin considerar acoplamiento. Las densidades utilizadas en esta segunda ejecución serán valores medios de los utilizados en la primera ejecución. La tabla 6.2 muestra los valores de densidad y viscosidad utilizados. En el caso de considerar acoplamiento, los valores son los valores de referencia que se utilizan en la ecuación (6.1). En las ejecuciones mostradas no se ha considerado el efecto de la transición olivino-espinela, que produciría un aumento de la densidad en el material a partir de los 400 km de profundidad. Consideraremos una única capa de corteza. Nos interesa aislar el efecto que produce el acoplamiento térmico.

Tabla 6.2 – Valores para las simulaciones isoviscosas

Modelo	Densidad (kg.m ⁻³)				Log (viscosidad) (log(Pa.s))
	Astenosfera	Manto litosférico	Corteza inferior	Corteza superior	
Considerando acoplamiento	3400	3400	2900	2900	22
Sin considerar acoplamiento	3200	3250	2900	2900	22

La figura 6.2 presenta la evolución de los resultados presentando las distribuciones de densidad superpuestas a la distribución de velocidad. Las líneas en color indican diferencias de densidad. Los valores de las líneas no son iguales, pues la variación en densidades que impone el acoplamiento no es visible si forzamos que las isolíneas de densidad se dibujen con los mismos valores que el modelo no acoplado. Sin embargo, las líneas son útiles para evidenciar la evolución.

En primer lugar cabe destacar que el proceso considerando acoplamiento térmico es más lento que sin considerar acoplamiento (figura 6.2, a-f). El intercambio de calor entre el material litosférico que se hunde, frío y más denso, con la astenosfera, más caliente y menos densa, produce un reequilibrio térmico que reduce la densidad de la litosfera por calentamiento y, por tanto, se frena el hundimiento del material litosférico.

Este mismo efecto de reequilibrio térmico causa que la litosfera no se adelgace significativamente en comparación con el adelgazamiento obtenido en el caso no acoplado (figura 6.2 a, b, d, e)

Además, el acoplamiento térmico produce dos modificaciones en la corteza: un fuerte efecto de flotabilidad sobre la perturbación en la corteza (figura 6.2d), pues los valores de las densidades en esa perturbación son aún menores que los valores que se tienen en el caso no acoplado; y la aparición de una capa de menor densidad correspondiente a la corteza inferior.

En conclusión, comprobamos que el programa TESCH que incluye el acoplamiento térmico funciona correctamente y este efecto produce efectos significativos que deben ser evaluados más detenidamente.

6.4.2.- Simulaciones con viscosidad dependiente de la temperatura

La posibilidad que permite el programa de introducir leyes de dependencia de la viscosidad con la temperatura se ilustra muy claramente si consideramos el efecto que tiene sobre un modelo de tipo *delaminación*.

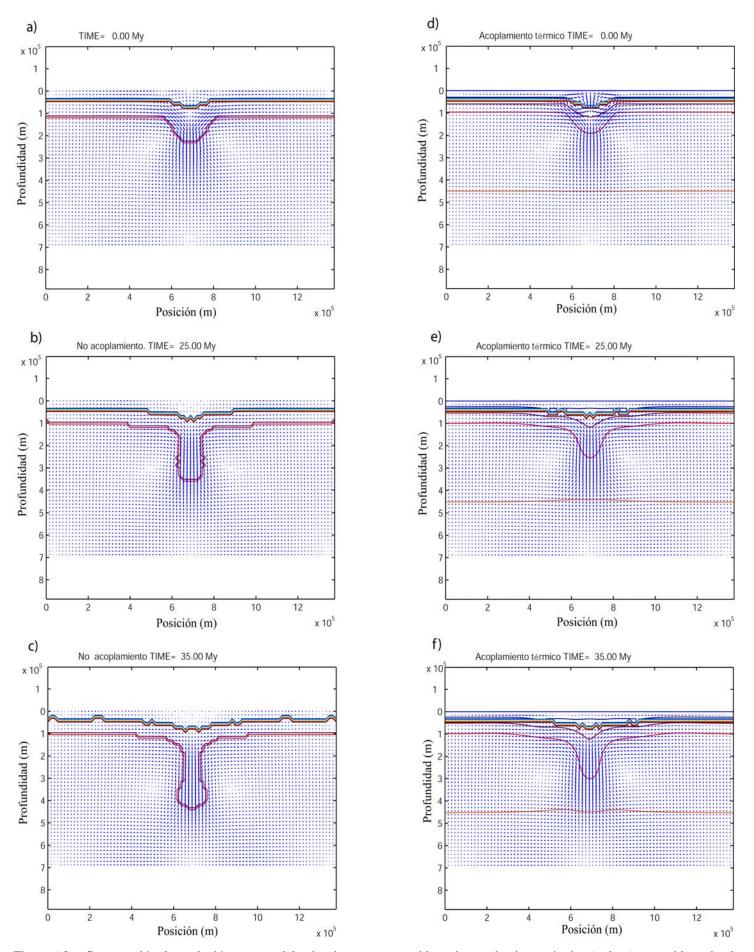


Figura 6.2 – Comparación de evolución para modelos isoviscosos no considerando acoplamiento térmico (a, b, c) y considerando el acoplamiento térmico (d, e, f) para tiempo de 0 Ma (a, d), 25 Ma (b, e) y 35 Ma (c, f). Comentarios en el texto.

Para ello, vamos a considerar una geometría inicial idéntica a la considerada en el modelo de delaminación presentado en el capítulo 4 para el mar de Alborán. El modelo aquí presentado no pretende ser un modelo de evolución de la cuenca de Alborán. Sólo pretendemos ilustrar las fuertes diferencias que el acoplamiento térmico y la dependencia de la viscosidad con la temperatura introducen en la evolución del modelo respecto a los modelos previos presentados en el capítulo 4 en los que no se consideran ambos efectos. El estudio paramétrico detallado que sería necesario para estudiar la evolución de la cuenca de Alborán con nuestro modelo queda postergado para posteriores estudios. La tabla 6.3 muestra los valores de referencia utilizados en cada capa de este modelo. Hemos considerado dependencia de la viscosidad con la temperatura sólo para el caso de la astenosfera. En el resto de capas la viscosidad es constante e igual a la indicada en la tabla. Las densidades en todas las capas sí que dependen de la temperatura, pero se muestran los valores de referencia utilizados. Este acoplamiento genera una capa de menor densidad en la corteza inferior como se ha indicado en el apartado anterior. No se ha considerado el efecto de la transición olivinoespinela.

Tabla 6.3 – Valores para el modelo de viscosidad dependiente de la temperatura.

	Astenosfera	Manto litosférico	Corteza inferior	Corteza superior
Densidad (kg.m ⁻³)	3300	3400	2900	2900
Log (viscosidad) (log(Pa.s))	20	22	20	23

La evolución de este modelo la presentamos en dos figuras. La primera (6.3) presenta la evolución mostrando las distribuciones de densidad superpuestas a la distribución de velocidad. Las líneas en color indican diferencias de densidad. La figura (6.4) presenta los gráficos de temperatura para los mismos momentos.

Resulta muy destacable el efecto que la presencia del canal produce ya en el estado inicial. Al entrar en contacto la corteza inferior (fría) con el material astenosférico (caliente) el aumento de la temperatura en la corteza hace disminuir su densidad.

A lo largo de toda la evolución se puede observar como la astenosfera va penetrando por la corteza inferior, propagando la ruptura hacia la izquierda y generando adelgazamiento en la corteza orogénica. (figura 6.3 b, c y 6.4 b, c) Todo el engrosamiento de la corteza migra hacia la izquierda, arrastrado por la succión que ejerce el bloque de litosfera (*slab*) que comienza a descender. Este arrastre se ejerce principalmente sobre la corteza inferior, menos viscosa que la superior, alcanzando altas profundidades, que llegan a ser de 120 km en el tiempo final de evolución, que hemos dejado en 12 Ma (figura 6.3d y 6.4d).

Se han realizado ejecuciones (no se muestran) que ilustran que si la viscosidad de la astenosfera es un orden de magnitud superior a la considerada, se alcanza rápidamente un equilibrio térmico que cierra el canal, desarrollándose una evolución de tipo remoción convectiva.

Esta evolución presentada es muy interesante, en tanto que reproduce las características de primer orden que aparecían en el modelo dinámico del mar de Alborán presentado en el capítulo 4. El tiempo, sin embargo, es mucho menor, en gran medida debido a que la viscosidad de la astenosfera es inferior, y disminuye con la profundidad. La aplicación detallada de este modelo con acoplamiento termomecánico a la evolución de la cuenca de Alborán será motivo de posteriores estudios.

Estas ejecuciones muestran que el programa TESCH resuelve correctamente las ecuaciones acopladas de la temperatura y la densidad, incluso considerando densidades y viscosidades dependientes de la temperatura. Esto permite que sea un programa útil para el estudio de la evolución de zonas concretas.

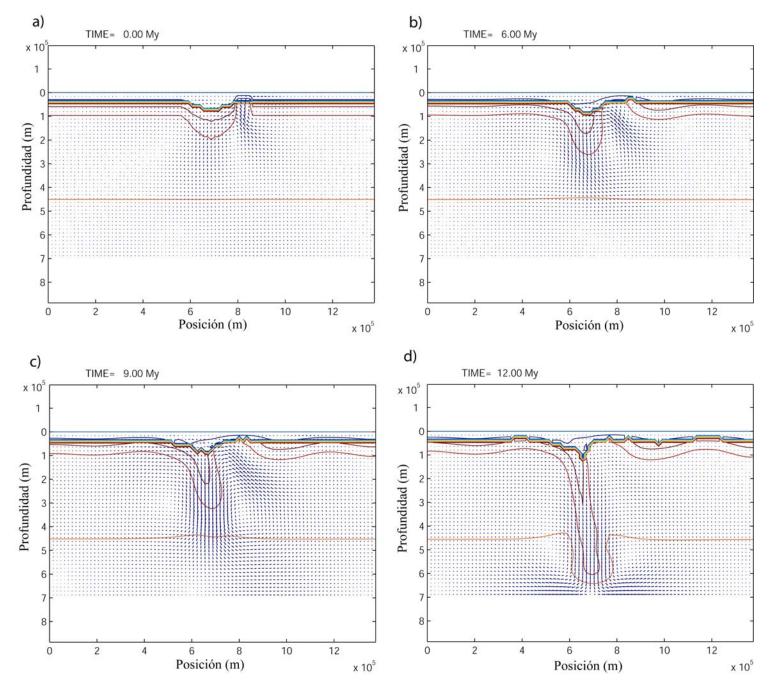


Figura 6.3 – Distribución de velocidad del estado inicial (a) y evolución tras 6 Ma (b), 9 M a (c) y 12 Ma (d) del modelo con viscosidad dependiente de la temperatura. Las líneas indican igual densidad. Comentarios en el texto.

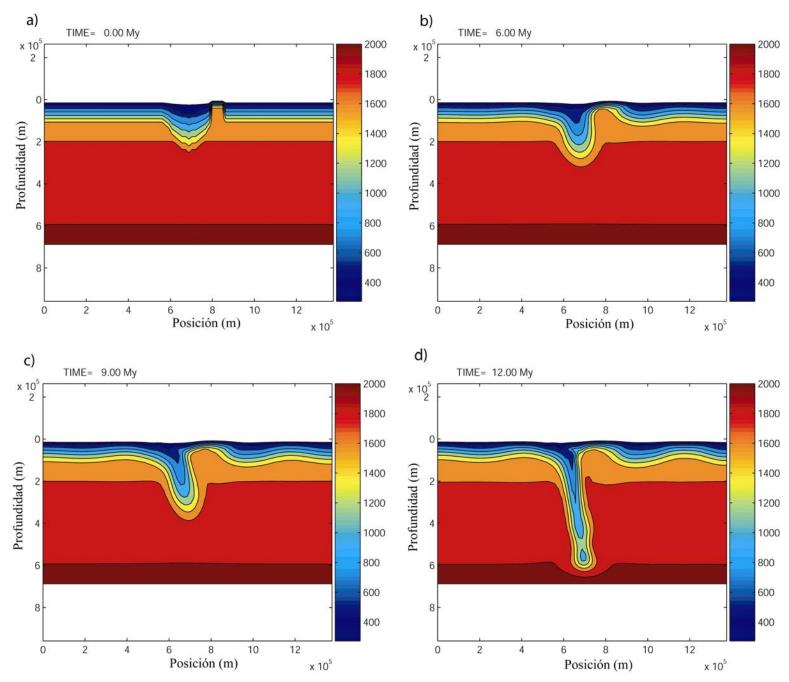


Figura 6.4 – Distribución de temperatura del estado inicial (a) y evolución tras 6 Ma (b), 9 M a (c) y 12 Ma (d) del modelo con viscosidad dependiente de la temperatura. Las líneas indican igual densidad. Comentarios en el texto.

7.- Conclusiones y líneas abiertas de investigación

El trabajo que se ha realizado ha consistido fundamentalmente en la elaboración de un modelo termomecánico y el desarrollo de un código numérico en entorno MATLAB que permita una comprensión básica de los más importantes procesos físicos que se han propuesto para explicar aparición de la extensión en zonas sometidas a un régimen de convergencia. Estos procesos son los procesos de roll-back asociado a subducción y adelgazamiento convectivo simétrico (remoción convectiva) o asimétrico (delaminación). El estudio cuantitativo y comparado de los diferentes procesos, utilizando un mismo código y adaptando las condiciones iniciales según el posible proceso es la principal aportación de este trabajo.

En un primer paso, se elaboró el código NASCEM que resolvía la ecuación de movimiento de un fluido. Es, por tanto, un modelo puramente dinámico en el sentido de que se incluyen en el cálculo las fuerzas debidas a contrastes de densidad, suponiendo que la viscosidad y la densidad no dependen de la temperatura. Hemos incluido en el programa la posibilidad de estratificación en la densidad y en la viscosidad como parámetros clave, según se desprende de la literatura.

Este modelo dinámico tiene interés en sí mismo, ya que nos permite comprobar, de un modo sencillo, si las evoluciones presentadas por diferentes modelos conceptuales para explicar la aparición de extensión son dinámicamente consistentes.

La posibilidad de utilizar un mismo código para estudiar diferentes procesos ha permitido hacer una evaluación cuantitativa preliminar de diferentes modelos conceptuales propuestos para explicar la evolución del mar de Alborán. Nuestros resultados preliminares muestran que el mecanismo de delaminación muestra ser más efectivo en producir adelgazamiento cortical y litosférico en la zona de la cuenca. Ni el mecanismo de remoción convectiva ni el mecanismo de roll-back asociado a subducción producen un adelgazamiento en los tiempos de evolución característicos de Alborán y, por tanto, no parecen adecuados para explicar la evolución de la zona.

De modo general, con esta aplicación se ha ilustrado que el nuevo código es una herramienta útil, que permite hacer modelos de evolución realistas aplicables a zonas de estudio específicas.

En un segundo paso, se elaboró el programa TESCH que incluye el código anterior y lo mejora al incluir el acoplamiento térmico. Este nuevo programa resuelve de manera acoplada la ecuación de movimiento para un fluido y la ecuación térmica. En este acoplamiento se tienen en cuenta las principales fuentes de calor que afectan a la evolución de la litosfera: el calentamiento conductivo, el calentamiento advectivo, la producción radiogénica de calor, el calentamiento adiabático y la liberación de calor latente en cambios de fase. La necesidad de resolución simultánea de ambas ecuaciones viene dada por que el campo de velocidades, que se calcula con la ecuación de movimiento, interviene en la ecuación térmica. A su vez, en la ecuación de movimiento intervienen la densidad y la viscosidad, que dependen de la temperatura.

El nuevo código elaborado reproduce una evolución auto-consistente al resolver internamente las ecuaciones acopladas de la temperatura y el movimiento. Su sencillez de manejo y de modificación hace que pueda ser fácilmente aplicado para evaluar diferentes modelos de evolución.

Con el modelo termomecánico se han presentado unas primeras ejecuciones que ilustran que el modelo es una herramienta útil para el estudio de la evolución geodinámica de la litosfera y del manto subyacente, y que permite su aplicación a muy diferentes escenarios.

Estos códigos pueden aún ser mejorados y esa es una línea de investigación que sigue abierta. Sería adecuado profundizar en el estudio de los algoritmos de interpolación, a fin de mejorar la estabilidad de los resultados y disminuir el tiempo de cómputo, y en el algoritmo de inversión de la matriz, para intentar superar las limitaciones que con el algoritmo actual nos imponen las capacidades de un ordenador personal. También podría ser muy interesante comparar el efecto de considerar otras condiciones de contorno en los márgenes del modelo. Posteriores trabajos deberán también estudiar los efectos de considerar una reología no lineal.

Después de estas mejoras, pretendemos publicar los algoritmos para que puedan ser utilizados y modificados por la comunidad científica.

Una vez creados y puestos a punto los algoritmos necesarios, el siguiente paso consistirá en la aplicación concreta del programa TESCH a la evolución del mar de Alborán y la comparación de los resultados con los resultados obtenidos con el modelo dinámico.

8.- Referencias

- Anderson, J. D. (1995): "Computational fluid dynamics". McGraw Hill, Inc.
- Akaogi M., Ito, E. y Navrotsky (1989): "Olivine-modified spinel-spinel transitions in th system Mg₂SiO₄-Fe₂SiO₄: calorimetric measurements, thermochemical calculation and geophysical application", Journal of Geophysical Research, 94, 15671-15685.
- Beaumont, C., P. Fullsack y J., Hamilton (1994): "Styles of crustal deformation caused by subduction f the underlying lithosphere", *Tectonophysics*, 232, 119-132.
- Bijwaard, H., W. Spakman, E.R. and Engdahl (1998): "Closing the gap between regional and global travel time tomography", *Journal of Geophysical Reserch*. 103, 30055-30078
- Bird, P. (1979): "Continental Delamination and the Colorado Plateau". *Journal of Geophysical Research*, 84, B13, 7561-7571.
- Blanco, M.J. y W. Spakman, (1993): "The P-wave velocity structure of the mantle below the Iberian peninsula: evidence for subducted lithosphere below southern Spain", *Tectonophysics*, 221, 13–34.
- Buforn, E., A. Udias, and R. Madariaga (1991): "Intermediate and deep earthquakes in Spain", *Pure and Applied Geophysics*, 136, 375–393
- Calvert, A., E. Sandvol, D. Seber, M. Barazangi, S. Roecker, T. Mourabit, F. Vidal, G. Alguacil y N. Jabour (2000): "Geodynamic Evolution of the Lithosphere and Upper Mantle Beneath the Alboran Region of the Western Mediterranean: Constraints from Travel Time Tomography", *Journal of Geophysical Research*, 105, 10871-10898.
- Carnahan, B., H. A. Luther y J. O. Wilkes (1979): "Calculo numérico. Métodos y aplicaciones". Ed. Rueda.
- Comas, M. C., V. García-Dueñas, y M. J. Jurado (1992): "Neogene tectonic evolution of the Alboran Basin from MCS data", *Geo-Marine Letters*, 12, 157–164
- Conrad, C. y P. Molnar (1997): "The growth of Rayleigh-Taylor-type instabilities in the lithosphere for various rheological and density structures". *Geophysical Journal International*, 129, 95-112.

- Dässler, R. y Yuen, D.A. (1996): "The metastable olivine wedge in fast subducting slabs; constraints from thermo-kinetic coupling", Earth Planetary Science Letters, 137, 109-118, 1996.
- Engdahl, E.R., R. van der Hilst, y R.P. Buland (1998): "Global teleseismic earthquake relocation with improved travel times and procedures for depth determination" *Bulletin of the Seismological Society of America*, 88, 3295-3314.
- Enns, A., T. W. Becker y H. Schmeling (2005): "The dynamics of subduction and trench migration for viscosity stratification". *Geophysical Journal International*, 120, 2, 761-775.
- Gutscher, M.-A., J. Malod, J.-P. Rehault, I. Contrucci, F. Klingelhoefer, L. Mendes-Victor y W. Spakman. (2002): "Evidence for active subduction beneath Gibraltar", *Geology*, 30, 12, 1071-1074.
- Houseman, G., D. Mackenzie y P. Molnar (1981): "Convective instability of a thickened boundary layer and its relevance for the thermal evolution of continental belts". *Journal of Geophysical Research*, 86, B7, 6115-6132.
- Houseman, G.A. & Molnar, P.: (1997): "Gravitational (Rayleigh–Taylor) instability of a layer with non-linear viscosity and convective thinning of continental lithosphere", Geophysical Journal International., **128**, 125–150.
- Houseman G., E. Neil y M. Kohler (2000): "Lithospheric instability beneath the Transverse Ranges of California". *Journal of Geophysical Research*, 105, B7, 16237-16250.
- Houseman, G. y P. Molnar (2001): "Mechanisms of lithospheric rejuvenation associated with continental orogeny". Continental Reactivation and Reworking, Eds. Miller, J.A., Holdsworth, R.E., Buick, I.S., y Hand, M., Geological Society, London, Special Publications, 184, 13-38.
- Lliboutry, L. A. (1997): "Very slow flows of solids". Martinus Nijhoff Publishers.
- Lonergan, L., and N. White, (1997): "Origin of the Betic-Rif mountain belt", *Tectonics*, 16, 504–522.
- Marotta, A. M., M. Fernández y R. Sabadini (1998): "Mantle unrooting in collisional settings", *Tectonophysics*, 296, 31-46
- Marotta, A. M., M. Fernández, R. Sabadini (1999): "The onset of extension during lithospheric shortening: a two-dimensional thermomechanical model for lithospheric unrooting". *Geophysical Journal International*, 139, 98-114.

- Molnar, P., G. Houseman y C. P. Conrad (1998): "Rayleigh–Taylor instability and convective thinning of mechanically thickened lithosphere: effects of non-linear viscosity decreasing exponentially with depth and of horizontal shortening of the layer", *Geophysical Journal International*, 133, 568–584.
- Molnar, P. y G. Houseman (2004): "The effects of buoyant crust on the gravitational", *Journal of Geophysical Research*, 109, B03410, doi: 10.1029/2003JB002414.
- Morency, C., and M.-P. Doin (2004), "Numerical simulations of the mantle lithosphere delamination", *Journal of Geophysical Research*, 109, B03410, doi:10.1029/2003JB002414.
- Morton, K. W., y D. F. Mayers (1994): "Numerical Solution of partial differential equations". *Cambrige University Press*.
- Negredo, A. M., P. Bird, C. Sanz de Galdeano, y E. Buforn (2002): "Neotectonic modeling of the Ibero-Maghrebian region", *Journal of Geophysical Research.*, 107(B11), 2292, doi:10.1029/2001JB000743.
- Negredo, A. M., J.L. Valera y E. Carminati (2004): "TEMSPOL: a MATLAB thermal model for deep subduction zones including major phase transformations", *Computers and Geosciences*, 30, 249–258
- Platt, J. P., and R. L. M. Vissers (1989): "Extensional collapse of the thickened continental lithosphere: A working hypothesis for the Alboran Sea and Gibraltar Arc", *Geology*, 17, 540–543
- Platt, J.P., J. I. Soto, M. C. Comas y Leg 161 Shipboard Scientists, (1996): "Decompression and high-temperature—low-pressure metamorphism in the exhumed floor of an extensional basin, Alboran Sea, western Mediterranean", *Geology*, 24, 447–450.
- Royden, L. H., F. Horváth y B. C. Burchfield (1982): "Transform faulting extension and subduction in the Carpathian-Pannonian region". *Geological Society of America Bulletin*, 93, 715-725
- Sandwell, D. T. (1987.): "Biharmonic Spline Interpolation of GEOS-3 and SEASAT Altimeter Data", *Geophysical Research Letters*, 2, 139-142.
- Schmeling, H. y G. Marquart, (1991): "The influence of second-scale convection on the thickness on continental lithosphere and crust", *Tectonophysics* 189, 281–306.
- Schmeling, H. yG. Y. Bussod (1996): "Variable viscosity convection and partial melting in the continental asthenosphere", Journal of Geophysical Research, 101, 5411-5423.

- Schmeling, H., Monz, R. y Rubie, D.C., The influence of olivine metastability on the dynamics of subduction, Earth Planet. Sci. Lett., 165, 55-66, 1999.
- Schott, B., y H. Schmeling (1998): "Delamination and detachment od a lithospheric root", *Tectonophysics*, 296, 225-247.
- Schott, B., D. A. Yuen y H. Schmeling (1999): "Viscous heating in heterogeneous media as applied to the thermal interaction between the crust ad mantle", Geophysical Research Letter, 26, 4, 513-516
- Schott, B., D. A. Yuen y H. Schmeling (2000a): "The diversity of tectonics from fluid-dynamical modeling of the lithosphere-mantle system", *Tectonophysics*, 322, 35-51.
- Schott, B., D. A. Yuen y H. Schmeling (2000b): "The significance of shear heating in continental delamination", Physics of the Earth and Planetary Interiors, 18, 273-290.
- Schubert, G., D. L. Turcotte y P. Olson (2001): "Mantle convection in the Earth and Planets". Cambridge University Press.
- Serrano I., J. Morales, D. Zhao, F. Torcal y F. Vidal, (1998): "P-wave tomographic images in the Central Betics-Alborán Sea (South Spain) using local earthquakes: contribution for a continental collision", *Geophysical Research Letters*, 25, 21, 4031-4034.
- Stein, C.A. y S. A. Stein (1992): "A model for the global variation in oceanic depth and heat flow with lithospheric age", *Nature*, 359, 123-129, 1992.
- Tezlaff, M. y H. Schmeling (2000): "The influence of olivine metastability on deep subduction of oceanic lithosphere", *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 120, 29-38.
- Torné, M., y E. Banda, (1992): "Crustal thinning from the Betic Cordillera to the Alboran Sea", Geo-Marine Letters, 12:76–81.
- Torne, M., M. Fernández, M. C. Comas y J. I. Soto (2000): "Lithospheric structure beneath the Alboran Basin: results from 3D Gravity modeling and tectonic relevance", *Journal of Geophysical Research*, 105, B2, 3209-3228.
- Tritton, D. J. (1988): "Physical fluid dynamics". Oxford Science Publications. 2nd Edition.
- Turcotte, L. y G. Schubert (2002): "Geodynamics". Cambridge Univerity Press. 2nd Edition.

- Valera, (2003): "Reología en zonas de subducción". Trabajo académicamente dirigido.

 Departamento de Física de la Tierra, Astronomía y Astrofísica I. Universidad

 Complutense de Madrid.
- Valera J.L, y A. M. Negredo (2006): "Modelización dinámica del adelgazamiento convectivo: aplicación al mar de Alborán y la cordillera Bético-Rifeña". V Asamblea Hispano-lusa de Geodesia y Geofísica. Libro de resúmenes. (*enviado*)
- van der Meulen, M. J., J. E. Meulenkamp y M. J. R. Wortel (1998): "Lateral shift of Apenninic foredeep depocenters reflecting detachment of subducted lithosphere". *Earth and Planetary Science Letters*, 154, 203-219.
- Villaseñor, A., W. Spakman, and E.R. Engdahl, Influence of regional travel times in global tomographic models. *Geophysical Research Abstracts*, vol. 5, EAE03-A-08614, EGS-AGU-EUG Joint Assembly, April 6-11, 2003, Nice, France.
- von Blaceknburg, F. y J. H. Davies (1995): "Slab breakoff: a model for syncollisional magmatism and tectonics in the Alps", *Tectonics*, 14, 120-131.
- Willet, S. D. y C. Beaumont (1994): "Subduction of Asian lithosphere mantle beneath Tibet inferred from models of continental collision", *Nature*, 369, 642-645.

Anexo: Esquema alternativo de discretización

En el capítulo 2 se ha presentado un esquema para discretizar la ecuación (2.16), aplicando primero los esquemas de discretización y desarrollando luego la regla del producto sobre los operadores discretizados. Como se ha comentado, ese es un método menos corriente en la literatura, pero utilizado con gran éxito por Schmeling & Marquart (1981). De este modo, el esquema de discretización sólo requiere términos de hasta orden dos, lo cual hace que el esquema sea más estable.

Un método más corriente y habitual sería desarrollar primero todos los términos de la ecuación (2.16) De este modo, la ecuación (2.16) se transforma en la ecuación (A.1):

$$-\frac{\partial}{\partial x}(\rho g) = 4\frac{\partial^{2}\mu}{\partial x \partial y}\frac{\partial^{2}\Psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^{2}\mu}{\partial x^{2}}\frac{\partial^{2}\Psi}{\partial y^{2}} + \frac{\partial^{2}\mu}{\partial x^{2}}\frac{\partial^{2}\Psi}{\partial x^{2}} + \frac{\partial^{2}\mu}{\partial y^{2}}\frac{\partial^{2}\Psi}{\partial y^{2}} - \frac{\partial^{2}\mu}{\partial y^{2}}\frac{\partial^{2}\Psi}{\partial x^{2}} + \frac{\partial^{2}\mu}{\partial x^{2}}\frac{\partial^{2}\Psi}{\partial x^{2}} + \frac{\partial^{2}\mu}{\partial y^{2}}\frac{\partial^{2}\Psi}{\partial x^{2}} + \frac{\partial^{2}\mu}{\partial y^{2}}\frac{\partial^{2}\Psi}{\partial x^{2}} + \frac{\partial^{2}\mu}{\partial y^{2}}\frac{\partial^{2}\Psi}{\partial x^{2}} + \frac{\partial^{2}\mu}{\partial x^{2}}\frac{\partial^{2}\Psi}{\partial x^{2}} + 2\frac{\partial^{2}\mu}{\partial y^{2}}\frac{\partial^{3}\Psi}{\partial x^{2}} + 2\frac{\partial^{2}\mu}{\partial x^{2}}\frac{\partial^{3}\Psi}{\partial x^{2}} + 2\frac{\partial^{2}\mu}{\partial x^{2}}\frac{\partial^{2}\Psi}{\partial x^{2$$

Esta ecuación no aparece en la literatura. No obstante, si aplicamos la hipótesis de considerar la viscosidad sólo dependiente de la profundidad $\mu=\mu(y)$, concuerda con Schubert et al (2001).

Si queremos aplicar ahora un esquema de diferencias finitas, necesitamos discretizar términos de hasta orden 4. El esquema será el siguiente:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{1}{2\Delta x} \left(\Psi_{i+1,j} - \Psi_{i-1,j} \right) + O(h^{2})$$

$$\frac{\partial^{2} \Psi}{\partial x^{2}} = \frac{1}{\Delta x^{2}} \left(\Psi_{i+1,j} - 2\Psi_{i,j} + \Psi_{i-1,j} \right) + O(h^{2})$$

$$\frac{\partial^{2} \Psi}{\partial x \partial y} = \frac{1}{4\Delta x^{2}} \left(\Psi_{i+1,j+1} + \Psi_{i-1,j-1} - \Psi_{i-1,j+1} - \Psi_{i+1,j-1} \right) + O(h^{2})$$

$$\frac{\partial^{3} \Psi}{\partial x^{3}} = \frac{1}{2\Delta x^{3}} \left(\Psi_{i+2,j} - 2\Psi_{i+1,j} + 2\Psi_{i-1,j} - \Psi_{i-2,j} \right) + O(h^{2})$$
(A.2)

$$\begin{split} &\frac{\partial^{3}\Psi}{\partial x\partial y^{2}} = \frac{1}{2\Delta x^{3}} \Big(\Psi_{i+1,j+1} - 2\Psi_{i+1,j} + \Psi_{i+1,j-1} - \Psi_{i-1,j+1} + 2\Psi_{i-1,j} - \Psi_{i-1,j-1} \Big) \\ &\frac{\partial^{3}\Psi}{\partial x^{2}\partial y} = \frac{1}{2\Delta x^{3}} \Big(\Psi_{i+1,j+1} - 2\Psi_{i,j+1} + \Psi_{i-1,j+1} - \Psi_{i+1,j-1} + 2\Psi_{i,j-1} - \Psi_{i-1,j-1} \Big) \\ &\frac{\partial^{4}\Psi}{\partial x^{4}} = \frac{1}{\Delta x^{4}} \Big(\Psi_{i+2,j} - 4\Psi_{i+1,j} + 6\Psi_{i,j} - 4\Psi_{i-1,j} + \Psi_{i-2,j} \Big) \\ &\frac{\partial^{4}\Psi}{\partial x^{2}\partial y^{2}} = \frac{1}{\Delta x^{4}} \Big(\Psi_{i+1,j+1} - 2\Psi_{i,j+1} + \Psi_{i-1,j+1} - 2\Psi_{i+1,j} + 4\Psi_{i,j} - 2\Psi_{i-1,j} + \Psi_{i+1,j-1} - 2\Psi_{i,j-1} + \Psi_{i-1,j-1} \Big) \end{split}$$

Por simplicidad, imponemos $\Delta x = \Delta y$ y obtenemos la ecuación:

$$-\Delta x^{4} g \frac{\partial \rho}{\partial x} = AA\Psi_{i,j} + A\Psi_{i+2,j} + B\Psi_{i+1,j+1} + C\Psi_{i+1,j} + D\Psi_{i+1,j-1} + E\Psi_{i,j+2} + F\Psi_{i,j+1} + G\Psi_{i,j-1} + H\Psi_{i,j-2} + I\Psi_{i-1,j+1} + J\Psi_{i-1,j} + K\Psi_{i-1,j-1} + L\Psi_{i-2,j}$$
(A.3)

donde

$$\begin{split} &AA = 20\mu_{i,j} \\ &A = \frac{1}{2} \Big(\mu_{i+1,j} + 2\mu_{i,j} - \mu_{i-1,j} \Big) \\ &B = \frac{1}{4} \Big(\mu_{i+1,j+1} + 2\mu_{i+1,j} - \mu_{i+1,j-1} + 2\mu_{i,j+1} + 8\mu_{i,j} - 2\mu_{i,j-1} - \mu_{i-1,j+1} - 2\mu_{i-1,j} + \mu_{i-1,j-1} \Big) \\ &C = \Big(-\mu_{i+1,j} - \mu_{i,j+1} - 8\mu_{i,j} - \mu_{i,j-1} + 3\mu_{i-1,j} \Big) \\ &D = \frac{1}{4} \Big(-\mu_{i+1,j+1} + 2\mu_{i+1,j} + \mu_{i+1,j-1} - 2\mu_{i,j+1} + 8\mu_{i,j} + 2\mu_{i,j-1} + \mu_{i-1,j+1} - 2\mu_{i-1,j} - \mu_{i-1,j-1} \Big) \\ &E = \frac{1}{2} \Big(\mu_{i,j+1} + 2\mu_{i,j} - \mu_{i,j-1} \Big) \\ &F = \Big(-\mu_{i+1,j} - \mu_{i,j+1} - 8\mu_{i,j} + 3\mu_{i,j-1} - \mu_{i-1,j} \Big) \\ &G = \Big(-\mu_{i+1,j} + 3\mu_{i,j+1} - 8\mu_{i,j} - \mu_{i,j-1} - \mu_{i-1,j} \Big) \\ &H = \frac{1}{2} \Big(-\mu_{i,j+1} + 2\mu_{i,j} + \mu_{i,j-1} \Big) \\ &I = \frac{1}{4} \Big(-\mu_{i+1,j+1} - 2\mu_{i+1,j} + \mu_{i+1,j-1} + 2\mu_{i,j+1} + 8\mu_{i,j} - 2\mu_{i,j-1} + \mu_{i-1,j+1} + 2\mu_{i-1,j} - \mu_{i-1,j-1} \Big) \\ &J = \Big(3\mu_{i+1,j} - \mu_{i,j+1} - 8\mu_{i,j} - \mu_{i,j-1} - \mu_{i-1,j} \Big) \\ &K = \frac{1}{4} \Big(\mu_{i+1,j+1} - 2\mu_{i+1,j} - \mu_{i+1,j-1} - 2\mu_{i,j+1} + 8\mu_{i,j} + 2\mu_{i,j-1} - \mu_{i-1,j+1} + 2\mu_{i-1,j} + \mu_{i-1,j-1} \Big) \\ &L = \frac{1}{2} \Big(-\mu_{i+1,j} + 2\mu_{i,j} + \mu_{i-1,j} \Big) \end{aligned}$$

Cuando, de modo análogo a como se ha hecho en el capítulo 2, se construye la Matriz M con los coeficientes de la ecuación (A.3), se obtiene una matriz que, para el caso de viscosidad constante, es diagonalmente dominante y está bien condicionada, idéntica a la obtenida con el método anterior e idéntica a la que se obtendría discretizando directamente la ecuación biharmónica (ecuación 2.17).

Pero para viscosidad variable, la matriz M es fuertemente no simétrica, no diagonalmente dominante y está mal condicionada. Los modelos obtenidos con esa expresión son muy inestables.

Esto demuestra que es la viscosidad variable la que introduce las mayores perturbaciones en los esquemas de modelización del manto.

Por estos resultados, el esquema utilizado en el programa elaborado y en los modelos numéricos es el esquema presentado en la ecuación (2.20).