Universidad Politécnica de Madrid

Escuela Técnica Superior de
Ingenieros de Telecomunicación

Técnicas de procesado de datos de georradar y su aplicación al estudio del régimen termodinámico de los glaciares fríos y politérmicos

Tesis Doctoral

por

Javier Jesús Lapazaran Izargain

Ingeniero de Telecomunicación

Año 2004

Departamento de Matemática Aplicada a las Tecnologías de la Información

Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Telecomunicación

Técnicas de procesado de datos de georradar y su aplicación al estudio del régimen termodinámico de los glaciares fríos y politérmicos

Autor:

Javier Jesús Lapazaran Izargain

Ingeniero de Telecomunicación

Director:

Francisco José Navarro Valero

Licenciado en Ciencias Físicas

Año 2004

Tribunal nombrado por el Mgfco. y Excemo. Sr. Rector de la Universidad Politécnica de Madrid, el día ____ de _____ de 2004.

Presidente D. _____

Vocal D. _____

Vocal D. _____

Vocal D. _____

Vocal Secretario D. _____

Realizado el acto de defensa y lectura de la Tesis el día ____ de _____ de 2004, en _____.

Calificación: _____

EL PRESIDENTE LOS VOCALES

EL VOCAL SECRETARIO

A mi familia

Resumen

En esta tesis se aborda el estudio del georradar como herramienta de medida en los glaciares, el procesado de sus datos y la deducción de parámetros físicos del glaciar a partir de ellos. Del procesado de sus datos y del cálculo de estos parámetros se obtienen las condiciones iniciales y de contorno necesarias para la simulación numérica de los glaciares fríos y politérmicos mediante un modelo termomecánico, cuyo submodelo térmico también se desarrolla en esta tesis.

Para ello, se realiza un estudio de los conceptos, las técnicas y las teorías que fundamentan el uso del georradar en los glaciares y su procesado de datos.

Se ha desarrollado un procedimiento propio para procesar los datos de georradar que permite visualizar el interior del glaciar y medir los espesores del hielo. Las imágenes obtenidas tras el procesado desvelan la estructura interna del glaciar y ofrecen datos sobre su hidrología, sobre la disposición de

las grietas y su comunicación con estratos más profundos, sobre la interfaz entre los estratos de hielo frío y templado de los glaciares politérmicos, etc.

También se ha realizado un exhaustivo análisis de los métodos que otros autores han propuesto para la obtención de los parámetros físicos del hielo, comparándolos y concluyendo los más adecuados para cada aplicación. Se han desvelado errores que están extendidos en la aplicación de los métodos y que así han sido puestos de manifiesto, lo que ha llevado al autor al desarrollo de nuevos procedimientos de cálculo.

El estudio de estos parámetros se complementa con el de unos índices energéticos reflectivos, que aportan evidencias de la estructura en el interior y en lecho. El análisis de las definiciones previas y de los usos realizados de estos índices ha llevado al autor tanto a proponer nuevos procedimientos de cálculo, redefiniendo sus expresiones y sus ventanas de cálculo, como nuevos índices, que proporcionan información más precisa sobre el glaciar.

Los métodos desarrollados son aplicados a los datos registrados en varios glaciares, obteniendo representaciones endoglaciares, determinando los espesores de hielo y calculando sus parámetros físicos.

Por último, en esta tesis se desarrolla un submodelo térmico que, junto con los ya existentes submodelos dinámico y de variación temporal de la superficie libre integran un modelo termomecánico completo para la simulación numérica de los glaciares fríos y politérmicos.

En esta tesis se presenta la aplicación de este modelo termomecánico sobre un glaciar politérmico, de cuyos resultados se concluye la necesidad de considerar nuevos procesos físicos en el modelo para que resulte de aplicación en glaciares politérmicos, más complicados desde el punto de vista térmico que los glaciares fríos.

Abstract

This thesis presents a thorough study of the georadar as a measuring tool for glaciers, its data processing and the subsequent inference of the glacier geometry and the physical parameters of the glacier ice. From them we obtain the necessary boundary and initial conditions used as input for the numerical simulation of cold and polythermal glaciers, using a thermo-mechanical model, of which the thermal sub-model has been developed in this thesis.

With this aim, the concepts, techniques and theories which provide the foundations of the use of the georadar on glaciers, and its data processing, are analysed in this thesis.

A special-purpose procedure for processing of georadar data has been developed, which allows us to visualize the interior of the glacier and to measure the ice thickness. After the data processing, the images show the

internal structure of the glacier, including its hydrology, the location of the crevasses, their communication with deeper layers, the interface properties between cold and temperate ice in polythermal glaciers, etc.

It is done a comprehensive analysis of the methods proposed by other authors to obtain the physical parameters of the ice, comparing them and concluding which is the most appropriate method for each case. Some usual errors in the use of these methods are pointed out and some new procedures are proposed in this thesis.

The study of the physical parameters is complemented with the study of reflective-energetic indexes, which give us information about the internal structure of the glacier and the ice-bedrock interface properties. The analysis of the definitions presently in use for such indexes has lead the author to the proposal of new procedures, including some redefinitions of indexes, changes in the corresponding time windows and the addition of some new indexes which provide a more accurate information about the glacier.

The new methodology so developed has been applied to data from several glaciers, providing their endoglacial images, ice thickness and parameters.

Finally, a thermal sub-model has been developed. This, together with the two pre-existing sub-models, dynamical and free surface evolution, constitute a complete thermo-mechanical model for the numerical simulation of cold and polythermal glaciers.

An application of such thermo-mechanical model to a polythermal glacier is presented in this thesis. From its results, the author concludes the need to incorporate new physical processes into the thermal sub-model in order to make it useful for the modelling of polythermal glaciers, which are more complex than cold glaciers.

Índice

Resumen **VII**

Abstract **IX**

Índice **XI**

Prefacio **XIX**

Capítulo 1 Introducción **1**

1.1 Objetivos 2

1.2 Estado del arte 4

1.2.1 Procesado de datos de georradar 4

1.2.2 Determinación de parámetros físicos del hielo 6

1.2.3 Modelo termomecánico 8

1.3 Descripción del contenido de la tesis 13

Capítulo 2 Fundamentos del georradar y su procesado de datos 15

2.1 Conceptos asociados al georradar 16

2.1.1 Georradar 16

2.1.2 Propagación de ondas electromagnéticas. Ecuaciones de Maxwell 18

2.1.3 Propiedades electromagnéticas del medio 19

2.1.4 Parámetros de propagación del medio 27

2.1.5 Uso del georradar en glaciares 34

2.1.6 Perturbación de la señal 41

2.1.7 Reflexión 45

2.1.8 Técnicas de adquisición de datos: disposición de fuentes y receptores 48

2.1.9 Traza 52

2.1.10 Reagrupación de trazas 53

2.1.11 Fichero de registro 55

2.1.12 Formas de visualización. Radargramas. 56

2.1.13 Onda directa y onda aérea 59

2.1.14 Distorsiones geométricas 60

2.2 Términos y conceptos del procesado de datos de georradar 67

2.2.1 Correcciones estáticas 70

2.2.2 Correcciones dinámicas 73

2.2.3 Corrección del desplazamiento DC 78

2.2.4 Filtrado 80

2.2.5 Ganancia 82

2.2.6 Deconvolución 83

2.2.7 Análisis de la velocidad 89

2.2.8 Migración 90

2.3 Procesado típico de datos de georradar. 99

Capítulo 3 Desarrollo de un procedimiento de procesado de datos de georradar mediante ReflexW 105

3.1 Elección del software 106

3.1.1 Software disponible 106

3.1.2 Elección de ReflexW 111

3.2 Funcionalidades de ReflexW-2D data analysis 114

3.2.1 Estructura y modos de procesado 117

3.2.2 Preparación de los datos 126

3.2.2.1 Directorio de trabajo 126

3.2.2.2 Importación de datos. La geometría y los sistemas de coordenadas 127

3.2.2.3 Edición de cabeceras 133

3.2.2.4 Configuración de la visualización 137

3.2.3 Procesado 141

3.2.3.1 Elección de la ventana espacial (perfil) 143

3.2.3.2 Redistribución e interpolación de trazas 145

3.2.3.3 Corrección del desplazamiento DC (supresión de la componente continua) 148

3.2.3.4 Edición de trazas 151

3.2.3.5 Correcciones estáticas y dinámicas 153

3.2.3.6 Elección de la ventana temporal 156

3.2.3.7 Corrección del origen de tiempos 157

3.2.3.8 Filtro de paso bajo 159

3.2.3.9 Escalado de amplitudes 161

3.2.3.10 Deconvolución 166

3.2.3.11 Estudio de velocidades por ajuste de hipérbolas 170

3.2.3.12 Migración 174

3.2.3.13 Conversión a profundidad 183

3.2.3.14 Medida de la profundidad en cada traza 184

3.3 Secuencia de procesado 187

3.3.1 Decisiones previas: rectificación del perfil y sistema de coordenadas 188

3.3.2 Importación de los datos 192

3.3.3 Eliminación de la componente DC 193

3.3.4 Configuración de la geometría del perfil 194

3.3.5 Procesado final 201

Capítulo 4 Determinación de parámetros físicos del hielo a partir de registros georradar 209

4.1 RWV 210

4.1.1 Hipérbolas de difracción 213

4.1.2 CMP / WARR 217

4.1.2.1 Velocidades involucradas 219

4.1.2.2 Medida de la velocidad 222

4.1.3 Medidas en pozos de sondeo 234

4.2 Densidad y contenido en agua 236

4.2.1 Hielo, neviza o nieve secos 242

4.2.1.1 Estimación del error 245

4.2.2 Hielo, neviza o nieve húmedos 249

4.3 Índices energéticos reflectivos 259

Capítulo 5 Aplicación de los métodos descritos a los glaciares Hurd y Hansbreen 277

5.1 Los glaciares Hurd y Hansbreen 278

5.1.1 Glaciar Hurd (Isla Livingston, Antártida) 278

5.1.2 Glaciar Hansbreen (Isla Spitsbergen, Ártico) 281

5.2 Determinación de la geometría del glaciar Hurd 285

5.2.1 Topografía superficial 285

5.2.2 Radioecosondeo 289

5.2.2.1 Equipo utilizado (georradar VIRL) 289

5.2.2.2 Prospección realizada en el glaciar Hurd 291

5.2.3 Procesado de los datos de georradar 295

5.2.4 Mapa de espesores de hielo y topografía del lecho 296

5.3 Determinación de parámetros físicos en los glaciares Hurd y Hansbreen 300

5.3.1 Índices energéticos reflectivos en el glaciar Hansbreen 300

5.3.2 RWV y *W* en el glaciar Hansbreen 306

5.3.3 RWV y *W* en el glaciar Hurd 314

Capítulo 6 Régimen térmico de los glaciares **325**

6.1 Ecuación general de balance térmico 326

6.1.1 Variación de la energía térmica interna 328

6.1.2 Flujo y fuentes de calor 331

6.1.2.1 Flujo térmico conductivo 331

6.1.2.2 Fuentes internas de calor 333

6.1.3 Ecuación general del balance térmico 336

6.2 Ecuación del balance térmico en los glaciares 337

6.2.1 Dependencia de k y C_p con la temperatura 337

6.2.2 Dependencia de k y C_p con la posición y el tiempo 337

6.2.3 Ecuación del balance térmico en los glaciares 339

6.3 Soluciones analíticas en modelos simplificados 341

6.3.1 Régimen estacionario de temperaturas en el centro de un manto de hielo 342

6.3.1.1 Proceso analítico de resolución 345

6.3.1.2 Análisis de los resultados 352

6.3.2 Perfil de temperaturas en la zona de neviza lejos de la divisoria de un manto de hielo 354

Capítulo 7 Simulación numérica de la termomecánica glaciar **361**

7.1 Modelo glaciológico 362

7.1.1 Submodelo dinámico 363

7.1.2 Submodelo térmico 365

7.1.3 Submodelo de evolución de la superficie libre 366

7.1.4 Consideraciones sobre la relación constitutiva 366

7.2 Condiciones de contorno e iniciales 369

7.2.1 Submodelo dinámico 369

7.2.2 Submodelo térmico 375

7.2.3 Submodelo de evolución de la superficie libre 376

7.3 Solución numérica 377

7.3.1 Submodelo dinámico 377

7.3.1.1 Problema de Stokes clásico 377

7.3.1.2 Problema de Stokes en dinámica de glaciares 385

7.3.2 Submodelo térmico 388

7.3.2.1 Ecuación de advección-difusión 388
7.3.2.2 Solución numérica de la ecuación de advección-difusión en glaciología mediante el método de la difusión artificial modificado 394
7.3.3 Submodelo de evolución de la superficie libre 398

Capítulo 8 Estructura y termomecánica del glaciar Aldegondabreen (Spitsbergen) a partir de datos de georradar y simulaciones numéricas 401

8.1 El glaciar Aldegondabreen 402

8.2 Métodos 406

8.2.1 Prospección de georradar y procesado de datos 406

8.2.1.1 Prospección de georradar 406
8.2.1.2 Proceso de datos 407
8.2.2 Simulación numérica 408

8.2.2.1 Ecuaciones del modelo 408
8.2.2.2 Condiciones de contorno 408
8.2.2.3 Solución numérica 409
8.3 Resultados 410

8.3.1 RWV 410

8.3.2 Topografía superficial, espesores de hielo y relieve subglacial 411

8.3.3 Campos de temperatura, velocidad y tensiones 413

8.4 Discusión 417

8.5 Conclusiones 422

Capítulo 9 Conclusiones y líneas de trabajo futuro 423

9.1 Conclusiones 424

9.2 Líneas de trabajo futuro 430

Bibliografía 433

Apéndice A Comparativa entre fórmulas de la permitividad **461**

A.1 Medio glaciar seco 462

A.2 Medio glaciar húmedo 465

Apéndice B Radargramas finales del radioecosondeo del glaciar Hurd **471**

Apéndice C Conceptos básicos en mecánica de fluidos **503**

C.1 Derivada material (*material derivate*) 504

C.2 Teorema del transporte, de Reynolds 505

C.3 Ecuación de continuidad 505

C.4 Teorema de la divergencia, o de Gauss-Ostrogradski 507

C.5 Advección 507

Apéndice D Complementos matemáticos **509**

D.1 Operadores 510

D.2 Norma L^{∞} 511

D.3 Fórmula de Green 511

Prefacio

Durante el último cuarto siglo se ha producido una sensibilización social hacia los problemas que puedan derivarse del cambio climático. Los últimos decenios del recién culminado siglo XX muestran una creciente preocupación por conocer la influencia que este cambio climático pudiera ejercer sobre las masas de hielo del planeta y sobre el nivel medio de los océanos. Algunas teorías catastrofistas aparecidas en el entorno científico (*e.g.*, Mercer, 1978), aun tras haber sido refutadas por basarse en hipótesis excesivamente simplificadoras (*e.g.*, Bentley, 1998), fomentan la periódica aparición en los medios de comunicación de informaciones sensacionalistas. Estas informaciones se unen a las más equilibradas conclusiones de las publicaciones científicas actuales. La simplificación de unos contrasta con la complejidad del problema presentado por los otros. El debate permanece abierto, pero la resolución del problema científico está aún por llegar.

En esta tesis se desarrolla una metodología de procesado y análisis de las señales obtenidas mediante georradar. A partir ellas se determinan los espesores de hielo y los parámetros necesarios para el modelado numérico de glaciares. Finalmente se realiza la simulación numérica de la termomecánica glaciar para glaciares fríos y politérmicos.

La tesis se ha desarrollado dentro del marco de los proyectos del Plan Nacional de Investigación, Desarrollo e Innovación Tecnológica (I+D+I), ANT99-0963, *Modelización numérica de la dinámica y el régimen térmico de los glaciares. Aplicación al sistema glaciar de la Isla Livingston* (2000-02) y REN2002-03199/ANT, *Simulación numérica de procesos termo-mecánicos glaciares* (2003-05), y las Acciones Especiales REN2000-2131-E, *Ampliación de la red de estacas de medida de velocidad y acumulación-ablación del glaciar Hurd* (2000-01) y REN2000-3154-E, *Medidas de velocidad del hielo y de balance de masas en el glaciar Hurd* (2001-02). Estos proyectos están enmarcados dentro del programa *Glaciology of the South Shetland Islands* (GLASS), auspiciado por el *Scientific Committee on Antarctic Research* (SCAR).

Los datos utilizados en esta tesis son fruto de los trabajos de campo desarrollados en diferentes campañas por el grupo de investigación de los proyectos antes mencionados[1], al que pertenecen el autor y el director de esta tesis. Se utilizan datos obtenidos durante las campañas antárticas 2000-01 y 2001-02 en el glaciar Hurd, en la Isla Livingston (Shetland del Sur), al

[1] Grupo de Matemática Numérica del Departamento de Matemática Aplicada a las Tecnologías de la Información, de la Universidad Politécnica de Madrid (Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Telecomunicación), al que nos referiremos, en adelante, como nuestro grupo de investigación.

sur de la Base Antártica Española Juan Carlos I. El director de esta tesis fue responsable *in situ* de las medidas realizadas en la primera de las citadas campañas, mientras que el autor lo fue en la segunda.

Se utilizan también datos de dos glaciares de la Isla Spitsbergen (Svalbard, Ártico), de cuyas medidas fue responsable el director de esta tesis. Éstos son Aldegondabreen y Hansbreen, situados en esta isla, en las zonas Grønfjorden y Hornsund respectivamente. Las campañas de medida en estos glaciares se desarrollaron, respectivamente, durante la primavera de 1999 (abril-mayo) y el verano de 2003 (julio-agosto).

Quisiera mostrar mi afecto y agradecimiento al director de esta tesis, Francisco Navarro Valero por su continuado apoyo; a mis colegas del grupo de glaciología, Carlos Martín, Paco Machío y Jaime Otero; a Beatriz Benjumea, cuya colaboración fue inestimable para mi iniciación en el procesado de los datos de georradar; también a nuestros colaboradores Yury Macheret y Andrey Glazovsky, del Instituto de Geografía de la Academia Rusa de Ciencias y Evgeniy Vasilenko, del Instituto de Instrumentación Científica "Akadempribor" de la Academia Uzbeca de Ciencias. Pero no puedo olvidar al colectivo de "antárticos" con los que conviví durante la Campaña 2001-2002, que incluye a la tripulación del buque Las Palmas, a la dotación de técnicos y científicos de la Base Antártica Española Juan Carlos I, y en particular a los que fueron mis compañeros en los glaciares Hurd y Johnsons, Dominic Font y Xavier Prades.

Esta tesis no habría sido posible sin el incondicional apoyo e inagotable paciencia de Isabel.

Gracias a todos.

Capítulo 1

Introducción

En esta tesis se desarrollan metodologías de procesado y análisis de datos de georradar. De su aplicación se obtienen parámetros y condiciones de contorno que se utilizan para el modelado numérico de glaciares.

Por otro lado se desarrolla un submodelo térmico que, integrado con el preexistente modelo dinámico (Martín, 2003), proporciona un modelo termomecánico para los glaciares fríos y politérmicos.

Estos desarrollos se aplican a glaciares concretos (Hurd, Aldegondabreen y Hansbreen), para los que se dispone de datos de campo provenientes de sucesivas campañas realizadas por nuestro grupo de investigación.

1.1 Objetivos

El objetivo final de los trabajos desarrollados en esta tesis se resume en su título, *"técnicas de procesado de datos de georradar y su aplicación al estudio del régimen termodinámico de los glaciares fríos y politérmicos"*. Pero su puesta en práctica implica la consecución de dos objetivos fundamentales, que a continuación se detallan:

El primero es la simulación numérica del régimen termodinámico de los glaciares fríos (a temperaturas inferiores a la de fusión) y politérmicos (con estratos de hielo frío y de hielo templado[2]). Para ello se utiliza como punto de partida la tesis doctoral de Martín (2003). En ella se desarrolla un modelo numérico del régimen dinámico de los glaciares templados, constituido por dos submodelos, uno dinámico y otro de variación temporal de la superficie libre. Pero no se incluía un submodelo térmico, dado que una característica propia y definitoria de los glaciares templados (aunque se trate de una situación ideal) consiste en que el hielo glaciar se encuentra en todo punto a la temperatura de fusión propia de esa presión, lo que simplifica la descripción termodinámica de estos glaciares. Este primer objetivo se concreta en el desarrollo de un submodelo que incorpora el régimen térmico al preexistente modelo dinámico, para juntos completar un modelo del régimen termomecánico de los glaciares fríos y politérmicos.

El segundo objetivo consiste en el desarrollo de una metodología de procesado y análisis de los datos del georradar obtenidos sobre el glaciar. Este objetivo es necesario para la consecución del anterior, ya que al estar

[2] Hielo templado es aquél cuya temperatura está próxima a la de fusión. Más adelante se describen con mayor detalle los tipos de hielo y de glaciares en §2.1.5.

interrelacionados la temperatura del hielo, sus parámetros físicos y la dinámica del glaciar, la simulación numérica de la termomecánica del glaciar exige la obtención previa de los parámetros que lo caracterizan, así como de las condiciones de contorno. Pero además, este segundo objetivo tiene entidad en sí mismo. No sólo se pretende la obtención de los parámetros que requiera el modelo térmico, sino el procesado y análisis general de los datos de campo.

La consecución de los anteriores objetivos ha generado tres líneas de trabajo nítidamente diferenciadas:

- Como primera línea de trabajo se desarrolla un método de procesado de los datos de georradar, que conduce a la obtención de los espesores del glaciar. Este proceso se complementa con la obtención de la topografía superficial del glaciar a partir de medidas realizadas con GPS Diferencial (DGPS). De su combinación de resultados se obtiene el relieve subglaciar.
- Con la segunda línea de trabajo se pretende la determinación de parámetros físicos del glaciar, como pueden ser la velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas en el hielo, el contenido en agua del hielo templado, su densidad, información sobre el tipo de lecho,
- En la tercera y última línea de trabajo se desarrolla un submodelo térmico, que se integra con los preexistentes submodelos dinámico y de variación temporal de la superficie libre, para constituir un modelo numérico de la termomecánica de los glaciares fríos y politérmicos.
- Finalmente, estos desarrollos se aplican sobre glaciares concretos, tanto de la Antártida (Hurd), como del Ártico (Aldegondabreen, Hansbreen), cuyos datos han sido obtenidos previamente por nuestro grupo de investigación en campañas de medida en campo.

1.2 Estado del arte

1.2.1 Procesado de datos de georradar

La primera aplicación que el autor conoce de un georradar se produce en Austria, en 1929 (Stern, 1929, 1930) y su objetivo fue la medida del espesor de un glaciar. El uso de esta tecnología quedó en desuso durante largos años, hasta que, finalizando la década de los cincuenta, las fuerzas aéreas de EE.UU. se dieron cuenta de que el radar de sus aviones atravesaba el hielo y medía mal la altitud del suelo, en Groenlandia, estrellándose contra el hielo [Olhoeft, G.R. http://www.g-p-r.com. (visitada el 23/12/2003)]. Esto hizo que comenzaran las investigaciones para utilizar el radar para observar el subsuelo, *i.e.*, el georradar. El uso del georradar en entornos no relacionados con el hielo nace a principio de los años setenta (Annan, 2001). En 1972 nace la primera empresa fabricante de georradares (*Geophysical Survey Systems Inc.*, GSSI). Rápidamente se comenzaron a realizar aplicaciones sobre suelos de *permafrost*[3] (Annan y Davis, 1976). Su aplicación comienza a abarcar mayor espectro, como indican, *e.g.*, Morey (1974), o Benson *et al.* (1984). El uso del georradar en la actualidad se encuentra muy extendido, con gran variedad de aplicaciones en campos muy diversos, como la exploración de minerales y agua subterráneos (*e.g.*, Davis y Annan, 1989), las investigaciones arqueológicas (*e.g.*, Pérez, 2001), la detección de minas (Arcone *et al.*, 2000), etc., además de la prospección de glaciares, aplicación que es objeto de esta tesis.

[3] Terreno congelado durante todo el año.

Como ya indica Maijala (1992), el procesado de los datos de georradar se basa en el ya muy desarrollado procesado de datos sísmicos (*e.g.*, Yilmaz, 1987)[4]. La diferencia entre las disposiciones de fuentes y receptores en sísmica y en georradar es uno de los motivos que hace que sólo una pequeña parte de los métodos de procesado de datos sísmicos, correspondiente a la sísmica de reflexión monocanal, sea de aplicación en el procesado de datos de georradar. Sin embargo, ha habido intentos de trabajo con el georradar como establecen las técnicas multicanal de sísmica, sin que dicha línea de trabajo haya tenido continuidad (Fisher *et al.*, 1992).

Tanto el uso del georradar como su procesado han sufrido grandes avances con la aparición del ordenador personal y más tarde el portátil. La adquisición de datos mediante registro digital en el georradar ha agilizado su procesado. Previamente ha sido habitual realizar la captura de los registros fotografiando la pantalla de un osciloscopio en el receptor. En la actualidad, existe en el mercado un gran número de paquetes de software, cuyo desarrollo avanza con rapidez, *e.g.*, ReflexW, RADAN, Visual_SUNT, GRADIX, etc.

Parece claro que el futuro del procesado de datos de georradar continuará en esta línea, con la visualización en campo de los registros y perfiles, y tratando de conseguir la automatización en la elección de parámetros y procesos. También el actual desarrollo de perfiles tridimensionales, por agrupación de perfiles paralelos, proporciona nuevas fuentes de información en el procesado de los datos, acotando en mayor medida las ambigüedades que el procesado bidimensional no resuelve.

---

[4] Existe una segunda edición de este libro, de dos tomos, con cambio de título (Yilmaz, 2001), cuyo primer tomo se corresponde, a efectos prácticos, con el contenido de la primera edición.

1.2.2 Determinación de parámetros físicos del hielo

La velocidad de propagación de una onda en el medio mediante técnicas de reflexión se estudia inicialmente en el ámbito de la sísmica. Ya en 1938, Green estudia el cálculo de la velocidad de propagación en un medio a partir de perfiles de sísmica de reflexión (Green, 1938), obteniendo métodos de cálculo aún utilizados hoy en día. En 1955, Dix calcula la velocidad en un estrato, a partir de las velocidades desde superficie (Dix, 1955), y en 1971 se contempla la influencia que la pendiente del lecho tiene en el cálculo de la velocidad (Levin, 1971). Pero ya en 1969 se desarrollan los métodos de análisis de la velocidad mediante espectros de velocidad (Taner y Koehler, 1969; Neidel y Taner, 1971). En la actualidad se utilizan su métodos, con leves modificaciones (*e.g.*, Yilmaz, 1987).

El cálculo de la permitividad en el medio glaciar se realiza directamente, por medios electromagnéticos, o a través de sus relaciones con otros parámetros En el caso de los glaciares, habitualmente se utiliza la permitividad del aire, del agua y del hielo puro, como medidas de laboratorio, obteniendo la permitividad del medio por medidas indirectas, como la velocidad de propagación, la densidad o el contenido en agua.

Debye (1929) estudió los fenómenos de relajación en el agua, determinantes para el uso del georradar en la mayor parte de medios y en particular en los glaciares. Sus estudios fueron seguidos por Cole y Cole (1941), y Onsager y Runnels (1969) los estudian para el caso del hielo.

Los estudios de la permitividad del hielo (*e.g.*, Cumming, 1952; Evans,1965; Koh, 1992, 1997; Mätzler, 1996; Mätzler y Wegmüller, 1987; Mätzler *et al.*, 1984; etc.), junto con los de la permitividad de la mezcla de medios (*e.g.*, Evans, 1965; Glen y Paren, 1972; Looyenga, 1965; Paren, 1970; Tiuri *et al.*, 1984; Kovacs, Gow, y Morey, 1995; Frolov y Macheret, 1999; etc.), derivan en

gran número de expresiones y valores cuyo uso no ha sido estandarizado y depende en gran medida de la experiencia de cada autor y del tipo de hielo sobre el que trabaje.

De similar manera ocurre con la medida del contenido en agua en la nieve o en el hielo del glaciar, que se estudia habitualmente a partir de la mezcla de hielo, agua y aire, en diferentes formas. Los estudios de la permitividad suelen estudiar de manera independiente la permitividad de la mezcla seca y la de la mezcla húmeda. De éstos últimos se extrae la información del contenido en agua, por lo que surge el problema antes indicado. Adicionalmente, estudios como los de Colbeck (1973, 1982) o Denoth (1982, 2003) apuntan hacia la dificultad de la medida del contenido en agua, por la variación que en su comportamiento tiene la concentración de agua en los poros del medio que lo soporta (i.e., dependencia de los regímenes pendular y funicular con la saturación, explicados más adelante).

Recientemente (Gades, 1998, 2000; Copland, 2001; Pattyn *et al.*, 2003) ha sido planteada la medida de ciertos índices energéticos de la señal reflejada como medida de las características del subsuelo y sus interfaces. En esta tesis se continúa y se proponen variaciones a este planteamiento.

1.2.3 Modelo termomecánico

El estudio de la dinámica de glaciares tiene antecedentes que se remontan a mediados del siglo XVIII (*e.g.*, Paterson, 1994, cap. 1), pero la modelización físico-matemática rigurosa de su régimen termodinámico no se inició hasta las década de los cincuenta. Dada la reología no lineal del hielo, sólo los modelos geométricamente muy simples o que incluyen hipótesis simplificadoras muy fuertes respecto a su comportamiento termodinámico pueden ser resueltos analíticamente. Tal es el caso del modelo de Nye (1957) para el problema dinámico y del modelo de Robin (1955) para el problema térmico. De hecho, ni siquiera existe una solución analítica que combine los aspectos dinámico y térmico.

La complejidad de las ecuaciones que gobiernan el régimen termodinámico de los glaciares y la irregular geometría de gran número de ellos requiere la resolución numérica de los problemas de valores iniciales y de contorno correspondientes.

Entre las técnicas numéricas a utilizar se incluyen las de elementos finitos (Zienkiewicz y Taylor, 1993, 1994; Brenner y Scott, 1994) y las de diferencias finitas (Smith, 1985; Morton y Mayers, 1994; Thomas, 1995). Pueden encontrarse en la literatura distintas aplicaciones de ambos métodos a la modelización de glaciares. Muchas de ellas, aprovechando las simetrías de ciertos glaciares, limitan el problema al caso bidimensional (*e.g.*, Hanson, 1990), mientras que la geometría irregular de otros exige la utilización de modelos tridimensionales (*e.g.*, Hanson, 1995).

Algunas de estas aplicaciones sólo tratan el problema dinámico (*e.g.*, Sikonia, 1982; Hodge, 1985), mientras que otras tratan los problemas dinámico y térmico conjuntamente (*e.g.*, Nixon *et al.*, 1985; Hanson, 1990). En general, las primeras se limitan al problema dinámico por dirigir sus aplicaciones al

caso de glaciares templados (definidos como aquellos que se encuentran, en cada uno de sus puntos, a la temperatura de fusión del hielo correspondiente a la presión del punto en cuestión), por lo que el estado térmico se presupone conocido. Los segundos, sin embargo, han sido diseñados para su aplicación a glaciares fríos o politérmicos.

Desde el punto de vista de la dependencia temporal, algunos de los modelos se limitan a considerar el estado estacionario (*e.g.*, Hanson, 1995; Gudmundsson, 1999), siendo su interés fundamental la determinación del campo de velocidades y el estado de tensiones, mientras que los únicos utilizables para efectuar predicciones de evolución del régimen termodinámico de los glaciares son, por supuesto, los que incluyen dependencia temporal (*e.g.*, Sikonia, 1982; Hodge, 1985; Nixon *et al.*, 1985; Hanson, 1990).

Además de la diferencias apuntadas, el tipo de glaciar objeto del estudio implica diferencias importantes en lo que respecta a la propia formulación de las ecuaciones dinámicas del modelo:

- Para los grandes mantos de hielo (*ice sheets*) que cubren la Antártida y Groenlandia, el enfoque tradicional es el de plantear y resolver la ecuación de conservación de masa en términos de variación del espesor del glaciar, considerado éste como una función del espacio y del tiempo, incorporando la ecuación de conservación del momento a través de una solución analítica para la variación de la velocidad con la profundidad (Hooke, 1998; van der Veen, 1999). Dos grandes familias de modelos se ajustan a este planteamiento: los modelos planos (*plan-form*, *map-plane*), en los que se considera al espesor del glaciar como una función de las coordenadas horizontales y el tiempo (*e.g.*, Fastook y Chapman, 1989), y los modelos de línea, plano o banda de flujo (*flowline, flowplane, bandplane*), que

consideran una sección del glaciar a lo largo de una línea de flujo (una coordenada horizontal, en la dirección del flujo de hielo, y otra vertical; se asume, por lo tanto, que la velocidad en la dirección horizontal transversal es nula) y que el comportamiento del glaciar en cualquier plano de flujo paralelo al descrito es idéntico a éste, es decir, se considera el glaciar como infinito en la dirección transversal (*e.g.*, Fastook, 1987). Tanto en uno como en otro caso, en la modelización de mantos de hielo suele utilizarse la denominada "aproximación de hielo superficial" (Hutter, 1983; Morland, 1984; Fowler, 1997), en la que se considera que el hielo se deforma únicamente por cizalla en planos horizontales y que las tensiones desviadoras longitudinales pueden despreciarse. Aunque en la modelización de mantos de hielo es habitual el empleo de métodos de diferencias finitas tanto para las dicretizaciones espaciales como temporales (Huybrechts *et al.*, 1996), también en ocasiones se emplean los métodos de elementos finitos para la discretización espacial (*e.g.*, Fastook, 1987, 1989).

- Para los glaciares de valle y para pequeños glaciares de casquete (*ice caps*), suele resolverse el conjunto de las ecuaciones dinámicas (conservación del momento y conservación de masa) sin hipótesis simplificadoras adicionales. Tal es el caso, por ejemplo, de los ya aludidos modelos de Hanson (1990, 1995) y de Gudmundsson (1999). Si bien esta aproximación es más realista, lógicamente implica un coste computacional mucho más elevado. Conviene también tener presente que gran parte de los glaciares de valle tienen una geometría que no aconseja la utilización de modelos bidimensionales, salvo que presenten simetrías apreciables respecto al plano de flujo a lo largo de la línea de flujo central, en cuyo caso podrían aplicarse las correcciones estudiadas por Nye (1965). Un modelo dinámico bidimensional para estado estacionario ha sido desarrollado recientemente en el Departamento de Matemática Aplicada a

las Tecnologías de la Información (DMATI) de la Universidad Politécnica de Madrid (Navarro *et al.*, 1999; Corcuera *et al.*, 2002), al que ha seguido un modelo dinámico tridimensional y con evolución temporal (Martín, 2003). En esta tesis se ha incorporado al modelo los aspectos térmicos.

En modelos evolutivos, el carácter no estacionario de la superficie del glaciar implica que se trata de un problema de frontera móvil (Crank, 1984). En glaciología, existe un tratamiento simplificado de este tipo de problemas cuando los modelos no incorporan cambio de fase hielo-agua o hielo-vapor de agua, sino que se limitan a considerar, además de la evolución de la superficie del glaciar debida al propio movimiento del hielo, los aportes o pérdidas de masa en superficie a través de un término de acumulación-ablación preestablecido. La aproximación, empleada, entre otros, por Nixon *et al.* (1985), consiste en utilizar el campo de velocidades obtenido en un instante dado para proyectar la superficie, usando diferencias finitas progresivas, a una nueva posición en un instante posterior. Esto, sin embargo, limita considerablemente la longitud de paso temporal (debido a consideraciones de convergencia y estabilidad), por lo que no es realista si se persiguen simulaciones para periodos de tiempo largos. En general, resulta más adecuado resolver, mediante métodos de diferencias finitas que combinen discretizaciones espaciales y temporales, la ecuación de tipo advectivo que establece la caracterización cinemática de la superficie libre (véase, *e.g.*, van der Veen, 1999, §8.2 y 8.3). Esta aproximación puede encontrarse en modelos como el de Hvidberg (1996) o los reportados en Huybrechts (1996). Pero resulta todavía más apropiado el uso de métodos semilagrangianos (Staniforth y Côté, 1991), como se ha puesto de manifiesto en aplicaciones recientes de esta técnica (Martín, 2003).

La aproximación más completa, considerando posibilidades de cambio de fase en la superficie del glaciar (es decir, un problema de Stefan propiamente dicho), pero también en el lecho para glaciares donde se produce fusión basal, e incluso considerando como una frontera móvil la interfaz entre los estratos de hielo frío y templado para glaciares politérmicos, puede encontrarse ampliamente desarrollada en Hutter (1983). Otros trabajos a destacar en esta línea son, entre otros, los de Fowler y Larson (1978), Schiavi (1999, cap. 5), que incluye un detallado análisis de condiciones para existencia y unicidad de soluciones, Calvo *et. al.* (1999) y Calvo (2000). Merecen asimismo mención los trabajos de Rodrigues y Santos (1996) y Díaz y Schiavi (1999). Se ha considerado incluso el problema de frontera móvil asociado a la interfaz entre hielo y sedimentos deformables (dell'Isola y Hutter, 1999). Destaquemos además que los estudios de frontera móvil no se han limitado al caso de mantos de hielo, sino que también han sido aplicadas estas técnicas a glaciares de montaña (*e.g.*, Rodrigues y Urbano, 1999).

Merecen una última mención aquellos modelos que incorporan además los aspectos hidráulicos, algunos de los cuales ofrecen una posible explicación de los fenómenos de surgencia (*surges*) que experimentan determinados glaciares, o el proceso de formación de corrientes rápidas de hielo (*ice streams*). Entre estos trabajos se encuentran los de Fowler (1987), Fowler y Johnson (1995, 1996), Fowler y Schiavi (1998), Muñoz *et al.* (2002) y Muñoz (2003).

Por último, es interesante destacar que el estudio del régimen termodinámico de los glaciares puede ser abordado en otros marcos distintos del de la mecánica de los medios continuos. Existen otras posibles descripciones del problema, un ejemplo de las cuales son las simulaciones de flujo de glaciares realizadas por Bahr y Rundle (1995), en el contexto de la mecánica estadística, utilizando la técnica de las redes de Boltzmann.

1.3 Descripción del contenido de la tesis

Para finalizar esta introducción, se describe sintéticamente el contenido de los temas tratados en cada capítulo.

El *capítulo 1* presenta, a modo de introducción, la descripción del trabajo a realizar y los objetivos que se pretenden alcanzar con esta tesis.

En el *capítulo 2* se realiza una presentación descriptiva de los términos y conceptos más relevantes en el ámbito de la prospección mediante georradar y su posterior procesado de señales. Esto incluye los conceptos de electromagnetismo, sísmica de reflexión, procesado de señales, etc., que se consideran necesarios para la correcta comprensión de lo que sigue.

En el *capítulo 3* el autor desarrolla un procedimiento para procesar los datos obtenidos de la prospección de glaciares realizada con el georradar. Para ello se justifica en primer lugar la elección del software comercial de procesado sísmico ReflexW, pasando a continuación a desarrollar con él dicho procedimiento para el caso glaciar que nos ocupa, sobre un perfil del glaciar Hansbreen.

El *capítulo 4* contiene un estudio de las bases técnicas y el desarrollo de un procedimiento de análisis relativo a la segunda línea de trabajo, que consiste en la determinación de los diferentes parámetros físicos del hielo a partir de los registros obtenidos mediante el georradar.

En el *capítulo 5* se presenta la aplicación práctica del procesado de los datos de georradar medidos sobre el glaciar Hurd y del análisis y obtención de los parámetros físicos del hielo en los glaciares Hurd y Hansbreen, siendo así la

puesta en práctica de las dos primeras líneas de trabajo. Los espesores obtenidos del glaciar Hurd se complementan con su topografía superficial, medida con DGPS, para calcular el relieve subglaciar.

La tercera y última línea de trabajo se presenta en los siguientes capítulos.

En el *capítulo 6* se realiza un estudio teórico del régimen térmico de los glaciares, que finaliza con la obtención de su ecuación de balance térmico. Se estudian también dos casos simplificados, que permiten reducir esta ecuación hasta proporcionar solución analítica.

En el *capítulo 7* se desarrolla el modelo de simulación termomecánica glaciar, que se descompone en tres submodelos, dinámico, térmico, y de evolución temporal de la superficie libre, y se presentan las técnicas matemáticas de simulación que se utilizan.

El *capítulo 8* concluye la tesis con la simulación numérica de la termomecánica glaciar de Aldegondabreen, utilizando para ello los parámetros físicos y condiciones de contorno en él obtenidos.

En el *capítulo 9* se resumen las conclusiones obtenidas en la tesis y se establecen las líneas de trabajo futuro que de ésta se derivan.

Capítulo 2

Fundamentos del georradar y su procesado de datos

En este capítulo se presentan los conceptos y términos más usuales en la prospección con georradar y su procesado de señales. No se pretende ser exhaustivo. Tan sólo se describen en la medida necesaria para la comprensión de los capítulos posteriores. También se realizará una breve descripción de las etapas requeridas para obtener una sección de georradar o radargrama a partir de los datos de campo.

A pesar de que este estudio no incluye trabajo con datos obtenidos por métodos sísmicos, aquí se pueden encontrar términos utilizados tanto en el ámbito de la sísmica de reflexión como del georradar. Esto se debe a que muchas técnicas de adquisición de datos y del procesado de los mismos provienen históricamente de la sísmica de reflexión, siendo comunes en muchos casos las referencias y apareciendo conceptos propios de cada disciplina confundidos entre los

comunes a ambas. Por ello se tratará de diferenciar qué procesos podrán ser utilizados para el georradar y cuáles son exclusivos de la sísmica.

Ciertos términos aquí presentados incluyen también su vocablo anglosajón, dado que hoy en día el grueso de la bibliografía sobre procesado de señales se encuentra redactada en inglés.

2.1 Conceptos asociados al georradar

2.1.1 Georradar

El radar de subsuelo es un sistema no destructivo para la prospección del mismo. Basado en la técnica radar (*RAdio Detection And Ranging*), explora el subsuelo desde el exterior de su superficie, mediante la emisión y posterior recepción de un pulso electromagnético. El sistema se conoce habitualmente como georradar o GPR (*Ground Penetrating Radar*, e incluso *Ground Probing Radar*), si bien tiene otras denominaciones anglosajonas de menor uso como *subsurface radar*, o *earth sounding radar*, y, para el caso de utilización sobre el hielo, también se emplea el término específico IPR (*Ice Penetrating Radar*).

Se trata de un tipo de radioecosonda (RES) que habitualmente opera con onda monopulso a frecuencias entre los 10 y los 1.000 MHz (Davis y Annan, 1989, p. 532). Si bien de naturaleza y tecnologías diferentes, tiene gran similitud con las técnicas de sísmica de reflexión, tanto en la obtención de los datos como en su posterior procesado.

La prospección con georradar consiste en la emisión y propagación por un medio dado (en este caso glaciar) de ondas electromagnéticas, con la posterior recepción y registro de las señales reflejadas o difractadas en discontinuidades en el glaciar. La Figura 2-1 muestra la configuración de un sistema georradar típico para prospección glaciar.

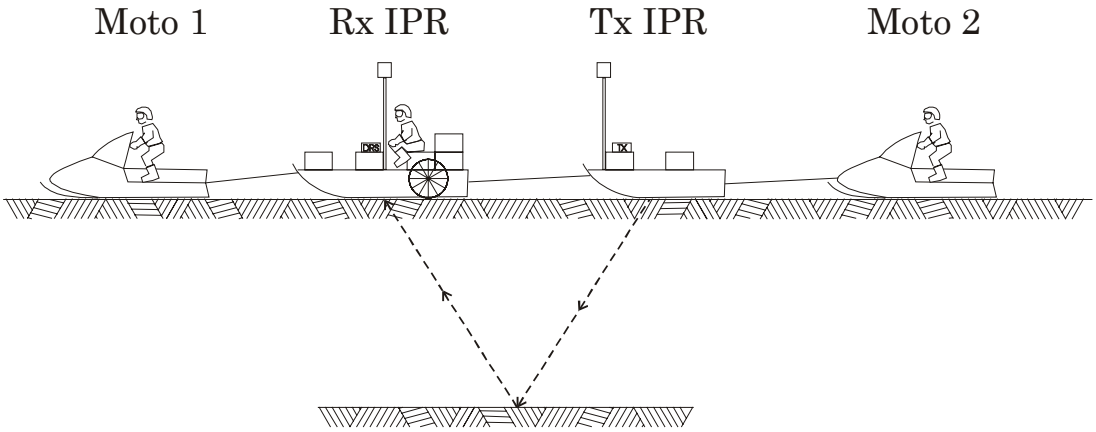

Figura 2-1 Configuración de uso de georradar sobre glaciar (IPR).

El georradar consta de un sistema transmisor sincronizado con otro receptor y un sistema de registro de datos.

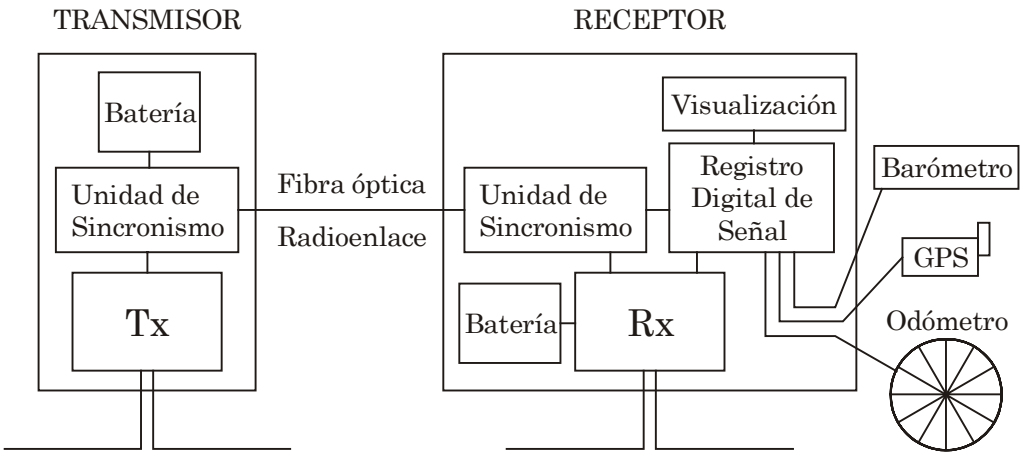

Figura 2-2 Diagrama de bloques de un georradar.

Como puede apreciarse en la Figura 2-2, a esta composición principal se le unen entradas auxiliares, como la entrada para registro de GPS, o la entrada para registro de un odómetro, e incluso otra para registro de un barómetro. Es necesario un elemento de visualización, situado preferiblemente en la unidad de recepción, que permita verificar que el sistema funciona con corrección y que la elección de los parámetros instrumentales ha sido la adecuada. En ocasiones el sistema incorpora un ordenador portátil, que puede asumir las funciones de visualización y registro.

2.1.2 Propagación de ondas electromagnéticas. Ecuaciones de Maxwell

La propagación se rige por las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \tag{2.1}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}; \tag{2.2}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = q; \tag{2.3}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0; \tag{2.4}$$

donde

E es el vector intensidad de campo eléctrico,

D es el vector inducción eléctrica,

H es el vector intensidad de campo magnético,

B es el vector inducción magnética,

J es el vector densidad de corriente,

q es la densidad de carga eléctrica.

La ecuación (2.1) representa la ley de Faraday-Henry, que describe la relación entre las variaciones de los campos eléctrico y magnético.

La ley de Ampere-Maxwell viene expresada por la ecuación (2.2), y muestra la existencia de un campo magnético asociado al desplazamiento de cargas eléctricas, ya sea en forma de corriente eléctrica o por polarización dieléctrica.

Por su parte, las otras dos ecuaciones muestran las leyes de Gauss para los campos eléctrico y magnético, donde la ecuación (2.3) contempla la existencia de cargas eléctricas que actúan como fuente o sumidero de campo eléctrico, mientras que en la ecuación (2.4), ante la inexistencia de cargas magnéticas (nunca encontradas), se obliga a que las líneas de campo magnético sean cerradas.

2.1.3 Propiedades electromagnéticas del medio

La caracterización electromagnética del medio se realiza a través de tres parámetros:

ε es la permitividad (o constante dieléctrica);

ε_0 del vacío; ε_r relativa del medio

μ es la permeabilidad (o constante magnética);

μ_0 del vacío; μ_r relativa del medio

σ es la conductividad del medio.

Estos parámetros se definen mediante las denominadas ecuaciones constitutivas (IEEE, 1998; Mohr y Taylor, 2002),

$$\mathbf{J} = \sigma\,\mathbf{E} \qquad \text{(ley de Ohm)}, \tag{2.5}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon\,\mathbf{E}, \qquad \varepsilon = \varepsilon_0\,\varepsilon_r, \qquad \varepsilon_0 = 8'854\,187\,817\ 10^{-12}\ \mathrm{F\,m^{-1}}, \tag{2.6}$$

$$\mathbf{B} = \mu\,\mathbf{H}, \qquad \mu = \mu_0\,\mu_r, \qquad \mu_0 = 4\pi\,10^{-7}\ \mathrm{H\,m^{-1}}, \tag{2.7}$$

que describen macroscópicamente[5] la respuesta del medio ante un campo.

En general, σ, ε y μ son tensores, que además pueden depender de los campos anteriores (*e.g.*, $\sigma = \sigma(E)$), dando lugar a relaciones no lineales. En las aplicaciones del georradar los medios se consideran isótropos, quedando estos tensores reducidos a cantidades escalares complejas.

La ley de Ohm, representada por la ecuación (2.5), describe la corriente eléctrica producida por el movimiento de las cargas libres en presencia de un campo eléctrico, y de las pérdidas asociadas a dicha conducción. Se habla de materiales conductores en referencia a su elevada capacidad para generar una corriente eléctrica ante un campo eléctrico. La conductividad σ es la medida de esta capacidad. La clasificación de los materiales en conductores, aislantes y semiconductores no es sólo cuantitativa. Sin embargo la conductividad de los primeros es muy elevada, del orden de $10^9\ \mathrm{mS\,m^{-1}}$ o superior (*e.g.*, 60 $10^9\ \mathrm{mS\,m^{-1}}$ para el cobre[6]), mientras que en el extremo opuesto de la escala de conductividades se encuentran los dieléctricos, con valores inferiores a $10^{-5}\ \mathrm{mS\,m^{-1}}$ (*e.g.*, ~10^{-10} para la mica), situándose en la zona intermedia los semiconductores (Pavlov y Jojlov, 1992, §7.1).

---

[5] Describen la respuesta del conjunto de electrones, átomos, iones, etc., que forman el medio.

[6] $\mathrm{mS\,m^{-1}} = 10^{-3}\ \mathrm{Siemens/m} = 10^{-3}\ \Omega^{-1}\,\mathrm{m^{-1}}$

Bajo la acción de un campo eléctrico externo, además de la conducción producida por las cargas móviles, las partículas que componen el material (átomos, moléculas, iones, etc) tienden a orientarse con el campo, en función de su polaridad. Este efecto genera dipolos en el interior del material, distanciando entre sí las cargas ligadas de signos opuestos, lo que produce un campo eléctrico interno que hace disminuir el del exterior. Este fenómeno se denomina polarización dieléctrica. Los efectos de almacenamiento de energía por polarización dieléctrica del medio aparecen en la ecuación (2.6), junto con las pérdidas asociadas.

La capacidad que cada material tiene de soportar este efecto se describe mediante un parámetro, la permitividad dieléctrica ε. La polarización almacena energía en el interior del material, en la forma de un campo interno. Por contra, mientras se mueven y orientan las cargas se disipa energía. En medios isótropos, la descripción de estos efectos de almacenamiento de energía y desplazamiento de carga precisa de un valor complejo para la permitividad dieléctrica.

$$\varepsilon = \varepsilon' - j\varepsilon'' \quad = \varepsilon_0 \varepsilon_r \quad = \varepsilon_0 \left(\varepsilon_r' - j\varepsilon_r'' \right) \tag{2.8}$$

La parte real de la permitividad dieléctrica describe la capacidad del material para la polarización y el almacenamiento de energía; su parte imaginaria ($j = \sqrt{-1}$), la capacidad para perder energía durante el desplazamiento polar de las cargas.

Ante un campo eléctrico sinusoidal $E = E_0 e^{j\omega t}$, a través del dieléctrico circula una densidad de corriente J_T, igual a la suma de la densidad de corriente de conducción debida a las cargas libres J, más la de desplazamiento J_D, debida a la polarización de las cargas ligadas (Pavlov y Jojlov, 1992, §8.14).

$$J_T = J + J_D \,, \tag{2.9}$$

siendo

$$J_D = \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{\partial(\varepsilon E)}{\partial t} = j\omega\varepsilon E = j\omega(\varepsilon' - j\varepsilon'')E \,, \tag{2.10}$$

según lo expresado por el segundo miembro de (2.2), y por (2.6) y (2.8), y

$$J = \sigma E = (\sigma' - j\sigma'')E \,, \tag{2.11}$$

como indica la ley de Ohm (2.5), y habiendo tenido en cuenta la naturaleza compleja de la conductividad en los medios isótropos y homogéneos.

La densidad de corriente total inducida en el medio será de la forma

$$J_T = (\sigma + j\omega\varepsilon)E = (\sigma' + \omega\varepsilon'')E + j(-\sigma'' + \omega\varepsilon')E = J_A + jJ_R \,, \tag{2.12}$$

quedando descompuesta en sus partes real e imaginaria, componentes activa y reactiva, J_A y J_R, respectivamente, de dicha densidad de corriente.

$$J_A = (\omega\varepsilon'' + \sigma')E \,, \tag{2.13}$$

$$J_R = (\omega\varepsilon' - \sigma'')E \,. \tag{2.14}$$

Como puede observarse, los efectos de las partes reales e imaginarias de la permitividad y de la conductividad se cruzan, confundiéndose. De hecho, en la práctica, las mediciones de laboratorio de las permitividades y conductividades no diferencian estos efectos cruzados (Turner y Siggins, 1994). Por ello se definen la conductividad y permitividad aparentes $\tilde{\sigma}$ y $\tilde{\varepsilon}$, respectivamente (*e.g.*, Daniels, 2004, §4.2).

$$\tilde{\sigma} = \sigma'_a - j\sigma''_a , \tag{2.15}$$

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon'_a - j\varepsilon''_a . \tag{2.16}$$

Pero su definición es redundante, debido a que están relacionados según

$$\tilde{\sigma} = j\omega\tilde{\varepsilon} , \tag{2.17}$$

de modo que la densidad de corriente inducida pueda expresarse utilizando exclusivamente la conductividad aparente, o bien la permitividad aparente

$$J_T = \tilde{\sigma}E \quad = j\omega\tilde{\varepsilon}E . \tag{2.18}$$

Igualando las expresiones (2.12) y (2.18), y haciendo uso de (2.15) y (2.16), la densidad de corriente inducida puede expresarse como

$$J_T = \left(\omega\varepsilon'' + \sigma'\right)E + j\left(\omega\varepsilon' - \sigma''\right)E \quad = \sigma'_a E - j\sigma''_a E , \tag{2.19}$$

o también como

$$J_T = \left(\omega\varepsilon'' + \sigma'\right)E + j\left(\omega\varepsilon' - \sigma''\right)E \quad = j\omega\left(\varepsilon'_a - j\varepsilon''_a\right)E \quad = \omega\varepsilon''_a E + j\omega\varepsilon'_a E . \tag{2.20}$$

Así, las relaciones entre las conductividades y permitividades, y sus respectivos parámetros aparentes son

$$\sigma'_a = \sigma' + \omega\varepsilon'' , \qquad \sigma''_a = \sigma'' - \omega\varepsilon' , \tag{2.21}$$

$$\varepsilon'_a = \varepsilon' - \frac{\sigma''}{\omega} , \qquad \varepsilon''_a = \varepsilon'' + \frac{\sigma'}{\omega} . \tag{2.22}$$

Las expresiones cruzadas de las partes reales e imaginarias de la conductividad y permitividad aparentes son redundantes ($\sigma'_a = \omega\varepsilon''_a$, y $\varepsilon'_a = -\sigma''_a/\omega$), motivo por el que sus partes reales (σ'_a y ε'_a), conocidas como permitividad y conductividad efectivas, son suficientes para caracterizar los parámetros permitividad y conductividad complejos.

$$\sigma_{ef} = \sigma'_a = \sigma' + \omega\varepsilon'' \ , \qquad \varepsilon_{ef} = \varepsilon'_a = \varepsilon' - \frac{\sigma''}{\omega} \ , \qquad \varepsilon_{efr} = \frac{\varepsilon_{ef}}{\varepsilon_0} \ . \tag{2.23}$$

Son estos parámetros efectivos los que se usan en la práctica para caracterizar eléctricamente los medios (Turner y Siggins, 1994).

Introduciendo los parámetros efectivos en las partes activa y reactiva de la densidad de corriente inducida, la expresión (2.13) se simplifica, quedando

$$J_A = \left(\omega\varepsilon'' + \sigma'\right)E = \sigma_{ef}E \ , \qquad J_R = \left(\omega\varepsilon' - \sigma''\right)E = \omega\varepsilon_{ef}E \ , \tag{2.24}$$

y (2.18) como

$$J_T = \tilde{\sigma}E \quad = j\omega\tilde{\varepsilon}E \quad = \sigma_{ef}E + j\omega\varepsilon_{ef}E \ , \tag{2.25}$$

Las pérdidas eléctricas se producen por el desfase entre los vectores de intensidad de campo **E**, y densidad de corriente **J**, *i.e.*, por el ángulo que define la obtenida en (2.12). Las pérdidas producidas por la conducción de cargas libres reciben el nombre de pérdidas óhmicas (calor de Joule), mientras que aquéllas producidas por la polarización de cargas ligadas se denominan pérdidas dieléctricas. Su medida se realiza, por conveniencia, a través de la tangente del ángulo de pérdidas eléctricas.

$$\mathrm{tg}\delta_e = \frac{J_A}{J_R} = \frac{\omega\varepsilon'' + \sigma'}{\omega\varepsilon' - \sigma''} = \frac{\varepsilon''_a}{\varepsilon'_a} = \frac{\sigma'_a}{\omega\varepsilon'_a} = \frac{\sigma_{ef}}{\omega\varepsilon_{ef}} \ . \tag{2.26}$$

En los buenos dieléctricos la propagación de la onda se produce con bajas pérdidas, como es en el caso del vacío. Sin embargo la conducción produce un efecto disipativo sobre la onda propagada.

En los buenos dieléctricos la conductividad es baja, por lo que la ecuación (2.26) se puede simplificar, quedando

$$\mathrm{tg}\delta_e = \frac{J_A}{J_R} = \frac{\varepsilon''_a}{\varepsilon'_a} \simeq \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} = \frac{\varepsilon''_r}{\varepsilon'_r} \ . \tag{2.27}$$

Pero si bien esta expresión es muy frecuente en la literatura, es más útil su predecesora (2.26), por referirse a los parámetros efectivos.

Las propiedades magnéticas se describen de manera similar a las eléctricas, salvo por la inexistencia de cargas magnéticas, lo que impide la conducción magnética, no existiendo un equivalente magnético de la ley de Ohm. Los efectos producidos en el material por el campo magnético son protagonizados por el espín de los electrones, y quedan totalmente descritos por la ecuación (2.7). En medios isótropos la permeabilidad magnética es un escalar complejo, cuya parte imaginaria representa la componente de pérdidas, caracterizadas mediante la tangente del ángulo de pérdidas magnéticas:

$$\mu = \mu' - j\mu'' = \mu_0\mu_r = \mu_0\left(\mu'_r - j\mu''_r\right) \ , \tag{2.28}$$

$$\mathrm{tg}\delta_m = \frac{\mu''}{\mu'} = \frac{\mu''_r}{\mu'_r} \ . \tag{2.29}$$

El parámetro que caracteriza electromagnéticamente el medio de forma global es la impedancia intrínseca, que se define como (Neff, 1991, §4.5)

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon - j\frac{\sigma}{\omega}}} \ . \tag{2.30}$$

Es de demostración inmediata su expresión con parámetros efectivos,

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_{ef} - j\frac{\sigma_{ef}}{\omega}}} \ . \tag{2.31}$$

Y, para el caso de materiales dieléctricos, en que la conducción pueda despreciarse, la ecuación (2.31) puede aproximarse por

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_{ef}}} \ , \tag{2.32}$$

donde, aplicando (2.6) y (2.7), se obtiene la impedancia intrínseca del vacío

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 376'73\,\Omega \ . \tag{2.33}$$

2.1.4 Parámetros de propagación del medio

La solución de las ecuaciones de Maxwell en un medio homogéneo, lineal, isótropo y sin fuentes, depende del tiempo y de una coordenada de translación (ondas planas), y representa la propagación del pulso emitido por el georradar, que en el dominio de la frecuencia toma la forma (Page y Camacho, 1985, §2.1)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},\omega) = \mathbf{E}_0(\omega) e^{-\gamma \hat{\mathbf{n}}\mathbf{r}}, \tag{2.34}$$

y en el dominio del tiempo, para un campo monocromático de pulsación ω,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathrm{Re}\left[\mathbf{E}(\mathbf{r},\omega) e^{j\omega t}\right], \tag{2.35}$$

donde $\hat{\mathbf{n}}$ es el vector unitario en la dirección de propagación de la onda (con sentidos positivo y negativo); $\mathbf{r}$ es el vector de posición del punto donde se calcula el campo; $\mathbf{E}(\mathbf{r},\omega)$ la transformada de Fourier del campo $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$, dada por (2.34); y $\mathbf{E}_0(\omega)$, por tanto, las amplitudes del campo en el origen.

La propagación tiene como parámetro fundamental

$$\gamma = \alpha + i\beta, \qquad \gamma = jk, \tag{2.36}$$

donde

γ es la constante de propagación,

k es el número de onda,

α es la constante de atenuación,

β es la constante de fase.

El cuadrado de la constante de propagación se puede expresar (Page y Camacho, 1985, §2.1)

$$\gamma^2 = -\omega^2 \mu\varepsilon \,. \tag{2.37}$$

Habitualmente trabajamos con medios sin pérdidas magnéticas, en los que la permeabilidad magnética toma valor real[7]. En medios dieléctricos como el agua o el hielo, con $\mu_r \simeq 1$ (Bogorodsky *et al.*, 1985, p. 11) y baja conductividad ($\sigma = 0'01\ \mathrm{mS\,m^{-1}}$), desarrollando (2.37)

$$\gamma^2 = (\alpha + j\beta)^2 = -\omega^2 \mu_0 \varepsilon = -\omega^2 \mu_0 \varepsilon' \left(1 - j\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right) = -\omega^2 \mu_0 \varepsilon' \left(1 - j\mathrm{tg}\delta_e\right). \tag{2.38}$$

Desarrollando los miembros segundo y quinto, e igualando sus partes reales e imaginarias, se obtiene un sistema cuya solución toma la forma (Page y Camacho, 1985, §2.3.2)

$$\alpha = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\varepsilon_r'}{2}\left(\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\delta_e} - 1\right)}\,, \tag{2.39}$$

$$\beta = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\varepsilon_r'}{2}\left(\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\delta_e} + 1\right)}\,, \tag{2.40}$$

donde c es la velocidad de la luz en el vacío (Mohr y Taylor, 2002),

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \simeq 2'99\,792\,458\ \ 10^8\,\mathrm{m\ s^{-1}}\,. \tag{2.41}$$

[7] Véase Powers y Olhoeft (1995), o bien Olhoeft (1998), para otro caso.

En buenos dieléctricos las pérdidas son bajas, $\mathrm{tg}\delta_e \ll 1$, y $\varepsilon_{efr} \simeq \varepsilon'_r$, quedando

$$\beta = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_{efr}}\,, \tag{2.42}$$

$$\alpha = \frac{\omega}{c}\,\frac{\mathrm{tg}\delta_e}{2}\sqrt{\varepsilon_{efr}}\,. \tag{2.43}$$

De donde se obtiene, recordando (2.26), junto con (2.23), (2.33) y (2.41),

$$\alpha = \frac{\omega}{c}\,\frac{\mathrm{tg}\delta_e}{2}\sqrt{\varepsilon_{efr}} = \frac{\sigma_{ef}}{2c\,\varepsilon_0\sqrt{\varepsilon_{efr}}} = \frac{\eta_0}{2}\,\frac{\sigma_{ef}}{\sqrt{\varepsilon_{efr}}} = 188'365\,\frac{\sigma_{ef}}{\sqrt{\varepsilon_{efr}}}\,. \tag{2.44}$$

Por otro lado, la velocidad de propagación[8], caracterizada mediante la velocidad de fase, que se define como la velocidad a la que se propaga la superficie de fase, perpendicular a la dirección de propagación, puede calcularse a partir de éstos,

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{c}{\sqrt{\frac{\varepsilon'_r}{2}\left(\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\delta_e}+1\right)}}\,. \tag{2.45}$$

En buenos dieléctricos las pérdidas son bajas, $\mathrm{tg}\delta_e \ll 1$, y $\varepsilon_{efr} \simeq \varepsilon'_r$, quedando

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon'_r}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_{efr}}}\,. \tag{2.46}$$

[8] En medios dispersivos, donde la velocidad dependa de la frecuencia, debe hablarse de velocidad de grupo. Si las pérdidas no son elevadas, la dependencia es suave, y la velocidad de grupo difiere levemente de la velocidad de fase (Page y Camacho, 1985, §3.2.2; Pérez, 2001, §4.2.3).

La permitividad y la velocidad de propagación muestran dependencias con la frecuencia de sentidos opuestos. Nótese que la velocidad de propagación de la onda electromagnética (RWV - *Radio Wave Velocity*) depende únicamente de la permitividad relativa del medio $\varepsilon_r' \simeq \varepsilon_{efr}$.

Un concepto estrechamente relacionado con el de constante de fase es el de longitud de onda (λ), que se define como la distancia mínima para la que se cumple la relación (Page y Camacho, 1985)

$$e^{-j\beta z} = e^{-j\beta(z+\lambda)}. \tag{2.47}$$

Consecuentemente,

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}. \tag{2.48}$$

Esto supone, relacionándolo con la velocidad de fase a través de (2.45),

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi v}{\omega} = \frac{v}{f}, \tag{2.49}$$

donde puede observarse que para una misma frecuencia (una misma onda electromagnética), la longitud de onda es proporcional a la velocidad de propagación en el medio, y varía con ella.

La longitud de onda en el vacío se determina con

$$\lambda_0 = \frac{c}{f}. \tag{2.50}$$

Así,

$$\lambda = \lambda_0 \frac{v}{c}. \tag{2.51}$$

En medios con bajas pérdidas ($\mathrm{tg}\delta_e \ll 1$), según (2.49) y (2.46), puede escribirse

$$\lambda = \frac{c}{f\sqrt{\varepsilon_{efr}}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon_{efr}}}, \tag{2.52}$$

donde puede apreciarse que, al igual que la velocidad de propagación, la longitud de onda disminuye al aumentar la permitividad relativa del medio.

Por otro lado, la atenuación que sufre la onda, en dB, en su propagación hasta un reflector situado a una profundidad h y posterior regreso hasta el receptor, en un medio homogéneo, viene caracterizada por

$$N_A = 2\left(20\log\left|\frac{E_0}{E(h)}\right|\right) = 2\left(20\log\left|\frac{E_0}{E_0 e^{-\alpha h}}\right|\right) = 2h\ 20\alpha\log e \simeq 2h\ 8'686\alpha\,. \tag{2.53}$$

Es más habitual mostrar la atenuación por unidad de longitud, también conocida como atenuación específica,

$$\Gamma = \frac{N_A}{2h}. \tag{2.54}$$

Por tanto,

$$\Gamma \simeq 8'686\alpha, \tag{2.55}$$

que representa las pérdidas en la onda electromagnética debidas a la absorción del medio, en dB/m. Nótese que hay que tener en cuenta el camino de ida y vuelta para obtener la atenuación hasta el receptor.

Recordando la expresión (2.39), puede expresarse (2.55) como

$$\Gamma = 8'686 \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\varepsilon_r'}{2}\left(\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\delta_e} - 1\right)} \text{ [dB/m]}, \tag{2.56}$$

o, para el caso de medios con bajas pérdidas ($\mathrm{tg}\delta_e \ll 1$), recordando (2.44),

$$\Gamma = 1'636 \ 10^3 \frac{\sigma_{ef}}{\sqrt{\varepsilon_{efr}}} \text{ [dB/m]}. \tag{2.57}$$

Es de destacar que la absorción decrece con el aumento de la permitividad y crece de forma proporcional a la conductividad.

En la Tabla 1 se resume el valor aproximado de ciertos parámetros de interés para el aire, diferentes estados físicos del agua, y algunos medios representativos del lecho glaciar. En ella puede observarse que los valores extremos[9] de ε_{efr} se dan en el aire (1) y en el agua (es habitual utilizar el valor 86), con velocidades que varían entre 300 y 30 m μs^{-1} (10 m μs^{-1} en el caso de agua salada), respectivamente. Los valores de la permitividad para el hielo se sitúan entre 3 y 4, con respectivas velocidades entre 170 y 150 m μs^{-1}, salvo que sea marino, cuya velocidad puede ser inferior ($\varepsilon_{efr} \simeq 2'5 - 8$). Por su parte,

[9] Se hace referencia a los valores extremos en la Tabla 1, que representa un conjunto de materiales de aparición habitual en los glaciares. Existen minerales con permitividades muy superiores a la del agua, como pueda ser la montmorillonita, con $\varepsilon_{efr} = 210$ (Martínez y Byrnes, 2001)

las rocas tienen valores de permitividad que oscilan entre 5 y 15 (seca-húmeda), con velocidades en torno a 140 m μs^{-1} para las rocas secas, descendiendo a valores cercanos a 80 m μs^{-1} estando húmedas, como es el caso de un lecho glaciar. Por último, las tierras muestran gran dependencia con su contenido en agua, siendo su permitividad variable entre 4 y 50, mayor cuanto más húmedas o saturadas estén, y sus velocidades, de manera inversa, oscilan entre 150 y 60 m μs^{-1}, respectivamente.

Puede consultarse Pérez (2001, §6.2), para mayor detalle y valores de parámetros de otros tipos de substrato. En todos los casos presentados la permeabilidad magnética relativa puede aproximarse por la unidad.

Material	ε_{efr}	σ (mS m^{-1})	v (m μs^{-1})
Aire	1	0	300
Agua destilada	80-88	0'01	33
Agua dulce	80 - 88	0'1 - 10	33
Agua salada (y marina)	80 - 88	4000	10
Nieve polar	1'4 - 3	-	190 - 250
Hielo polar	3 - 3'2	0'02 - 0'003	>168
Hielo templado	3'2 - 4	5 10^{-4} - 8 10^{-6}	<168
Hielo puro	3'17 - 3'19		168 - 169
Hielo marino	2'5 - 8		78 - 157
Permafrost	1 - 10	0'01 - 15	80 - 300
Piedra caliza seca-húmeda	4 - 16	10^{-5} - 25	75 - 150
Esquisto seco-húmedo	5 - 15	1 - 100	77 - 134
Granito seco-húmedo	4 - 15	10^{-9} - 1	110 - 130
Arena seca-saturada	3 - 30	10^{-7} - 1	55 - 174
Morrena	9 - 25	-	60 - 100
Limo seco-saturado	5 - 30	1 - 100	63 - 100
Arcilla seca-saturada	4 - 50	0'25 - >1000	60 - 170

Tabla 1 Intervalos aproximados de los valores de los parámetros de diferentes medios (modificado a partir de Ramac, 2003, Appendix 3; Annan, 2001, §3.6; Pérez, 2001, §6.2; Martínez y Byrnes, 2001; Benson *et al.*, 1984, §IV; y Bogorodsky *et al.*, 1985, §6.10).

2.1.5 Uso del georradar en glaciares

Watts y England (1976) ya calificaban al hielo glaciar como el mejor de los materiales geológicos para ser explorado por métodos electromagnéticos. En ausencia de fenómenos hidrológicos, el hielo glaciar resulta un medio muy transparente para la transmisión de las ondas electromagnéticas.

En los glaciares pueden despreciarse todos los efectos magnéticos, debido a la ausencia de pérdidas magnéticas del agua y el hielo, cuya permeabilidad magnética relativa es real y de valor unitario (Bogorodsky *et al.*, 1985, p. 11).

El hielo es un dieléctrico con bajas pérdidas ($\mathrm{tg}\delta \ll 1$) (Bogorodsky *et al.*, 1985, p. 11; Frolov y Macheret, 1999). Las conductividades del agua y del hielo puros son muy bajas y similares (del orden de $\sigma = 0'01\ \mathrm{mSm^{-1}}$ o inferiores). Sin embargo, la conductividad del agua suele tomar valores superiores, en función de los elementos que contenga en solución. Por otro lado, la permitividad del agua es siempre muy superior a la del hielo. Estos valores pueden observarse en la Tabla 1, junto con los de otros materiales. Para un estudio y descripción en mayor detalle de las propiedades eléctricas del hielo y la nieve que aquí se resumen, consúltese, *e.g.*, Glen y Paren (1975) y Frolov y Macheret (1999).

En primera aproximación, por su temperatura, el hielo glaciar puede dividirse en dos grandes tipos: el hielo que se encuentra a la temperatura de fusión propia de su presión, o cercana a ella, denominado hielo templado, y el conocido como hielo frío, cuya temperatura es inferior a aquélla. El hielo templado contiene agua en su interior, entre los cristales, en sus fracturas, en cavidades internas, circulando en canales, etc. El hielo frío no suele contener agua líquida y su cantidad decrece con la temperatura. El hielo templado se encuentra en los glaciares templados y en los politérmicos. Estos últimos contienen también hielo frío.

La presencia de agua, adsorbida o ligada en los poros de un material, o libre[10] en espacios intersticiales del mismo, influye determinantemente en sus parámetros característicos (Annan, 2001, §3.6; Fabregat-Santiago *et al.*, 1999; Martínez y Byrnes, 2001). Esto mismo ocurre con el agua contenida en el hielo. Puede observarse que el hielo es relativamente transparente para las ondas de radar (Γ bajo). Lo mismo puede observarse en el agua, si está en estado puro; sin embargo, la presencia de agua en el glaciar genera gran número de heterogeneidades, disminuyendo la profundidad de penetración de la onda. En un glaciar templado, tanto la profundidad de penetración de la onda, como la permitividad, como consecuentemente la velocidad de propagación, son fuertemente dependientes de su contenido en agua.

La molécula polar del agua es capaz de rotar orientándose con el campo eléctrico, cuando éste varía a una frecuencia moderada. Sin embargo, ante una frecuencia demasiado elevada, la molécula de agua no puede seguir las variaciones del campo. Este fenómeno se denomina relajación dieléctrica del agua. En las frecuencias intermedias se produce la transición del elevado valor de la permitividad estática, ε_S, correspondiente con la alta capacidad de polarización que existe a bajas frecuencias, a un valor bajo, ε_∞, que se corresponde con su incapacidad de polarización a frecuencias elevadas. Este proceso fue modelado por Debye (1929) (*cit.* por Bogorodsky *et al.*, 1985, §3.2; Fabregat-Santiago *et al.*, 1999; Olhoeft, 1998), según la ecuación

$$\varepsilon_r = \varepsilon_\infty + \frac{\varepsilon_S - \varepsilon_\infty}{1 + j\omega\tau}, \tag{2.58}$$

[10] El agua que impregna un medio se divide en agua *adsorbida* o *ligada* y agua *libre*, en función de la movilidad de sus moléculas dentro del medio que la contiene. En ambos casos se trata de agua líquida, y ambas situaciones coexisten en mayor o menor medida, dependiendo, entre otros motivos, del tamaño de los poros, del tipo de material, de la proporción de agua presente, etc.

donde la constante de tiempo de relajación, τ, es una medida del tiempo necesario para la reorientación de la molécula de agua (relajación), una vez que el campo desaparece. Este parámetro presenta dependencia con la temperatura a través de una función de Arrhenius (Agmon, 1996; Bogorodsky *et al.*, 1985, §3.2). La frecuencia a la que se produce un máximo en las pérdidas se denomina frecuencia característica de relajación y su valor es $f_C = (2\pi\tau)^{-1}$. Consecuentemente,

$$\varepsilon_r' = \varepsilon_\infty + \frac{\varepsilon_S - \varepsilon_\infty}{1+\omega^2\tau^2}, \qquad \varepsilon_r'' = \frac{(\varepsilon_S - \varepsilon_\infty)\omega\tau}{1+\omega^2\tau^2}, \qquad \mathrm{tg}\delta = \frac{(\varepsilon_S - \varepsilon_\infty)\omega\tau}{\varepsilon_S + \varepsilon_\infty\omega^2\tau^2}. \tag{2.59}$$

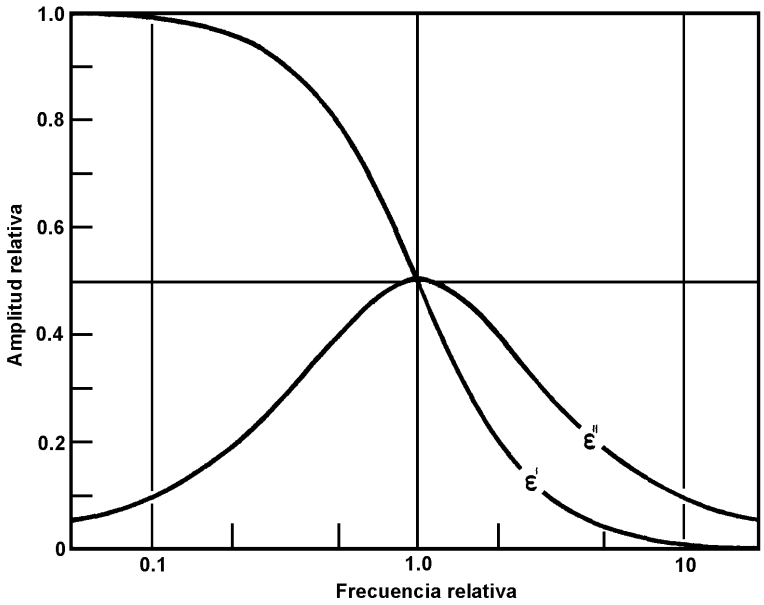

Figura 2-3 Efecto ideal de la relajación dieléctrica dado por la ecuación de Debye. Muestra las partes real e imaginaria normalizadas de la permitividad dieléctrica. La frecuencia está normalizada a la frecuencia característica de relajación f_c (modificado a partir de Bogorodsky *et al.*, 1985, §3.2).

La Figura 2-3 representa gráficamente el efecto de la relajación dieléctrica modelado por la ecuación de Debye.

Existen variaciones sobre este modelo, entre las que destaca la obtenida por Cole y Cole (1941) (*cit.* por Bogorodsky *et al.*, 1985, §3.2; Powers y Olhoeft, 1995; Olhoeft, 1998; Fabregat-Santiago *et al.*, 1999),

$$\varepsilon_r = \varepsilon_\infty + \frac{\varepsilon_S - \varepsilon_\infty}{1 + \left(j\omega\tau\right)^{\alpha_\varepsilon}}, \tag{2.60}$$

donde la transición de ε_S a ε_∞ depende del parámetro α_ε, que toma valores entre 0, para una permitividad constante e intermedia entre ambos valores, y 1, para una distribución como la presentada por Debye [expresión (2.58)].

La relajación dieléctrica se produce en todos los materiales, no sólo en el agua, y cada material presenta su frecuencia característica de relajación. En los casos del agua y el hielo, estas frecuencias de relajación son muy diferentes. Mientras en el agua libre a $0\,^{\circ}\mathrm{C}$ se produce en el entorno de los 9 a 10 GHz (Davis y Annan 1989, p. 536; Fabregat-Santiago *et al.*, 1999; Annan, 2001, §3.7 y §4.3; Sihvola *et al.*, 1985), en el hielo se produce en el entorno de los 8 kHz a $0\,^{\circ}\mathrm{C}$, descendiendo hasta 30 Hz a $-50\,^{\circ}\mathrm{C}$ (Bogorodsky *et al.*, 1985, §3.3). En la Figura 2-4 se aprecia el efecto de relajación dieléctrica en el hielo y en el agua, en las frecuencias indicadas.

Ahora bien, si en el agua a $0\,^{\circ}\mathrm{C}$ la permitividad estática es $\varepsilon_S = 88$ (Sihvola *et al.*, 1985), en el hielo a $0\,^{\circ}\mathrm{C}$ presenta un valor entre 90 y 105, siendo del orden de 135 a $-50\,^{\circ}\mathrm{C}$ (Bogorodsky *et al.*, 1985, §3.3). A frecuencias superiores a las de relajación la permitividad del agua toma valores (ε_∞) entre 4'5 y 5'5 (Sihvola *et al.*, 1985), próximos a los del hielo, que se sitúa en valores cercanos a $\varepsilon_\infty \cong 3'2$, con escasa dependencia con la temperatura (Bogorodsky *et al.*, 1985, §3.3). Por tanto, en el rango de frecuencias en que se utiliza el georradar (frecuencias superiores a $1\,\mathrm{MHz}$, pero inferiores a $1\,\mathrm{GHz}$), el hielo se encuentra en estado de relajación, pero no así el agua. Las permitividades

relativas complejas del aire, del hielo, y del agua son, respectivamente, a 1 GHz y 0 °C (Sihvola *et al.*, 1985),

$$\varepsilon_{\text{aire}} = 1 - j0\,;\ \varepsilon_{\text{hielo}} = 3'15 - j0'003\,;\ \varepsilon_{\text{agua}} = 88'0 - j9'79\,. \qquad (2.61)$$

Este rango de frecuencias en el que las permitividades del hielo y del agua permanecen aproximadamente constantes (Figura 2-4), se conoce como meseta o ventana del GPR (*GPR plateau*, *e.g.*, Annan, 2001, §4.3), debido a que en esos valores la velocidad no depende de la frecuencia, y por tanto el frente de ondas no se dispersa (Davis y Annan, 1985).

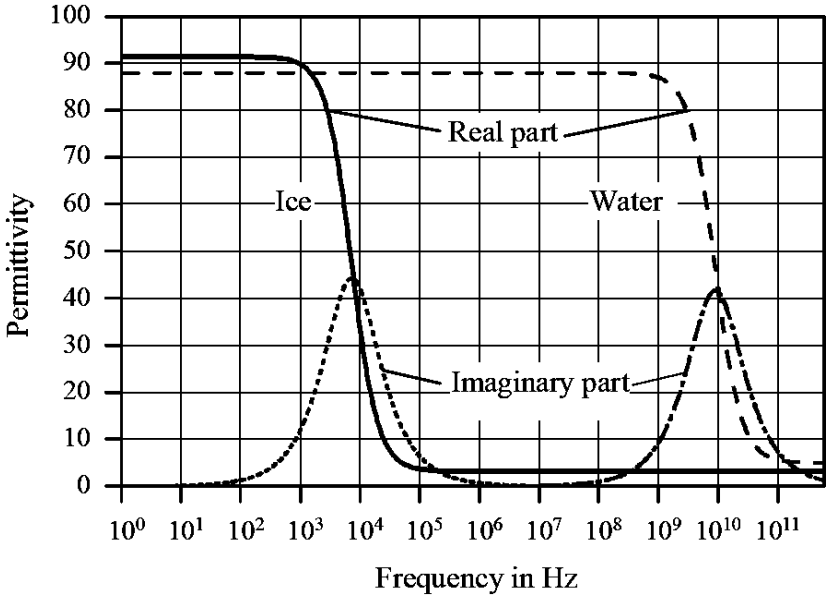

Figura 2-4 Espectros de relajación del agua y del hielo (Waldner *et al.*, 2001).

Estas características que diferencian el agua y el hielo puedes ser utilizadas para medir el contenido en agua en el hielo glaciar (§4.2), a través de la relación existente entre la velocidad de propagación y la permitividad dieléctrica del medio [ecuación (2.46)].

Las pérdidas producidas crecen con la cantidad total de agua libre presente, por lo que el contenido en agua existente en un glaciar templado influye de forma determinante en el valor de su permitividad, y de sus pérdidas. La relajación dieléctrica produce un fuerte crecimiento de ε'', y con ella, según indica la ecuación (2.23), se incrementa la conductividad efectiva y por (2.26) y (2.56), aumentan las pérdidas de transmisión. A frecuencias de 500 MHz las pérdidas del agua comienzan a hacerse visibles (Annan, 2001, §4.3), pero es a frecuencias cercanas a los 10 GHz donde la relajación dieléctrica del agua imposibilita el uso del georradar en la mayor parte de los materiales, y en concreto en los glaciares. Además, la variación de la permitividad con la frecuencia que se produce a altas frecuencias implica que la velocidad de propagación dependa de la frecuencia, lo que es causa de un fenómeno de dispersión, no deseable, que se produce junto al de relajación.

Pero existen otros efectos que imposibilitan su uso a altas frecuencias. En la propagación de las ondas electromagnéticas por el medio también hay que considerar la pérdida de su energía por otros motivos, como son la divergencia del frente de ondas (la densidad de energía disminuye al aumentar la superficie del frente de ondas), la absorción del medio (si bien el hielo es de bajas pérdidas), la difusión de la energía de la señal en las heterogeneidades en el glaciar (*scattering*, afectada por heterogeneidades de menor tamaño cuanto más alta sea la frecuencia), o la dispersión del frente de ondas producido por la dependencia de la velocidad de propagación con la frecuencia (de importancia en el agua, si bien es muy baja en el hielo y en el aire).

Por otro lado, la resolución de los registros de georradar depende de la longitud de onda del pulso emitido, aumentando su resolución con la frecuencia[11]. El hielo no es dispersivo (la velocidad de propagación no depende de la frecuencia), a diferencia del agua, donde la resolución disminuye con la profundidad, debido a la dispersión del frente de ondas. La velocidad de propagación en el hielo es aproximadamente $0'167\ \mathrm{m\,ns^{-1}}$ (Tabla 1), por lo que, según (2.49), una frecuencia de $10\ \mathrm{MHz}$ supone una longitud de onda de $16'7\ \mathrm{m}$, siendo de $1'67\ \mathrm{m}$ a frecuencia de $100\ \mathrm{MHz}$. Sin embargo, su penetración en el glaciar también depende de la frecuencia de la onda transmitida y en este caso las altas frecuencias son rápidamente atenuadas, consiguiendo escasa penetración. Por ello, se utiliza el georradar a frecuencias más elevadas para obtener detalles de la estructura superficial y a frecuencias más bajas para obtener perfiles de subsuelo a mayores profundidades. Para la prospección de la zona superficial se utilizan habitualmente frecuencias del orden de 100 a $300\ \mathrm{MHz}$, pero pueden utilizarse frecuencias muy superiores para aplicaciones como la detección del contenido de agua en la nieve (*e.g.*, $900\ \mathrm{MHz}$, Annan, 2001, p. 185). Por el contrario, para la prospección en profundidad, Watts y England (1976), recomiendan el uso de frecuencias inferiores a $10\ \mathrm{MHz}$, para obtener buenas reflexiones del lecho, si bien usualmente se utilizan frecuencias de 5 a $40\ \mathrm{MHz}$, como compromiso entre la profundidad de penetración y la resolución vertical.

[11] En general, para que se observe una perturbación, el objeto debe ser de tamaño superior a 1/3 de la longitud de onda, aunque en la práctica pueden llegar a observarse en circunstancias excepcionales detalles del orden de $\lambda/10$.

2.1.6 Perturbación de la señal

Si la onda electromagnética no sufriera perturbaciones, no habría nada que el georradar pudiera medir. Sin embargo, el exceso de perturbaciones convierte los datos en ruido indescifrable.

La perturbación de la señal se produce cuando la onda electromagnética se encuentra en su propagación con un cambio en las propiedades eléctricas o magnéticas del material (impedancia intrínseca[12]). En la prospección con georradar se pretende medir la perturbación que proviene de los objetos de interés. Idealmente, el medio se supone homogéneo hasta encontrar una discontinuidad. Pero en un subsuelo real, ni los medios son homogéneos e isótropos, ni todos los objetos de interés se presentan con una discontinuidad en la impedancia intrínseca de los medios, sino que aparecen variaciones graduales, más o menos contrastadas. Las heterogeneidades que contiene el subsuelo distribuidas en su medio provocan señales no deseadas que llegan al registro, a las que se denomina señales parásitas (*clutter*).

Las ondas electromagnéticas viajan en el vacío a una velocidad aproximada[13] de $3\ 10^8\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ independiente de la frecuencia. Cuando la onda abandona el vacío y se encuentra con un medio material, interactúa con ella, lo que produce una perturbación en la onda. Las partículas con carga interactúan con el campo electromagnético, y responden como reemisores, produciendo la difusión

---

[12] Véase (2.30)

[13] Como indica (2.41), $c = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \simeq 2'99\,792\,458\ \ 10^8\,\mathrm{m\ s^{-1}}$

de la onda (*scattering*)[14]. De acuerdo con el principio de Huygens, toda partícula polarizada actuará como fuente de nuevas ondas, y el campo en cada instante en cualquier punto resulta de la superposición de las ondas recibidas en el mismo desde todas las fuentes.

Si el material se comporta de forma isótropa y está dispuesto de manera homogénea en una región cuyo tamaño sea de escala superior a la de la longitud de onda transmitida, el principio de superposición genera una interferencia constructiva en la dirección de la transmisión de la onda, siendo destructiva en las demás direcciones, pudiendo entenderse como un rayo que atraviesa el material a la velocidad característica de ese medio.

Si hay una superficie que separe dos materiales homogéneos e isótropos (ya sea de aire a hielo, de hielo a roca, o en cualquier otra superficie con cambio de la impedancia intrínseca del material), las partículas del primer material sólo ocupan un hemisferio, mientras que el otro lo ocupan partículas que se comportan de diferente manera. En general, dependiendo del ángulo de incidencia en la superficie, la superposición resulta constructiva en una dirección en cada material, y destructiva en las demás. A través del segundo material la onda seguirá en una dirección diferente a la de transmisión por el primer medio (refracción)[15], mientras que otra onda saldrá en retroceso por el primer medio (reflexión) en otra dirección.

---

[14] La reemisión tiende a producirse en la misma frecuencia que la onda incidente. Si esta frecuencia coincide con la de resonancia interna de la molécula del material, la absorción de ésta será importante.

El término anglosajón *scattering* se traduce por difusión o por dispersión, dependiendo del entorno en que se utilice. En nuestro ámbito utilizamos el término difusión, dejando el de dispersión para hacer referencia a la variación de la velocidad de una onda en un medio, en función de su frecuencia.

[15] La refracción ocurre siempre que una onda entra en un nuevo medio con diferente velocidad de propagación, alterándose tanto la velocidad como su dirección.

Para obtener estas difusiones coherentes de las ondas, que generen las transmisiones, refracciones y reflexiones entendidas mediante la teoría de rayos, es necesaria la isotropía y homogeneidad de los medios a escala suficiente.

Si la curvatura del reflector o el tamaño de la heterogeneidad son del orden de magnitud de la longitud de onda incidente (comparable o menor), la energía no se refleja o refracta siguiendo las leyes simples de la óptica geométrica sino que se genera una difracción de la onda, con interferencias constructivas (en los máximos) y destructivas (en los mínimos)[16]. Las difracciones en un glaciar pueden deberse, entre otras causas, a inclusiones de agua, grietas, sedimentos (*e.g.*, cenizas volcánicas en el caso de las Shetland del Sur) o a la rugosidad del contacto hielo-lecho. Watts y England (1976) analizan la influencia de una distribución de canales de agua de diámetros en la escala del metro, sobre la recepción de la onda reflejada en el lecho en glaciares templados, concluyendo que su mayor efecto se debe, no a la atenuación, sino al enmascaramiento del lecho producido por el conjunto de perturbaciones, que causan la opacidad del medio.

Si la longitud de onda incidente es de orden superior al de las dimensiones de los objetos sobre los que incide, y éstos se disponen de forma aleatoria (*e.g.*, pequeñas heterogeneidades del medio), se produce superposición incoherente en multitud de direcciones, generándose una distribución aleatoria de la energía incidente. La amplitud de la onda disminuye y se incrementa el ruido aleatorio en los registros del georradar. Esta difusión, incoherente desde el

[16] La difracción se produce al enfrentar una onda a un patrón de distancias de tamaño del mismo orden que el de la longitud de onda, ya sea éste una rendija o el borde de un obstáculo, e independientemente de la naturaleza electromagnética o mecánica de la onda.

punto de vista macroscópico, se conoce de manera habitual simplemente como difusión de la onda (*scattering*).

Pero estos efectos no se producen de manera independiente. Si en una superficie lisa (con textura de escala inferior a la de la longitud de onda de la señal en el medio) las reflexiones tienden al caso ideal (especular), siendo más difusa en una superficie rugosa. En general las reflexiones producidas en la naturaleza son combinación de ambas.

Por otro lado, las superficies de cambio pueden no ser tales, sino variaciones más o menos bruscas de la impedancia del medio. Entendiendo por objeto al cambio espacial de la impedancia intrínseca del medio, podrá hablarse de objeto más contrastado cuanto más brusco sea este cambio. Así, son mayores las perturbaciones producidas por los objetos más contrastados, mientras que los cambios graduales de las propiedades producen perturbaciones de menor grado, dependiendo de cuál fuera el gradiente de éstos. Una capa de agua nítidamente contrastada frente al hielo de su entorno puede provocar una gran perturbación, mientras que la presencia de un grueso estrato con pequeñas gotas de agua dispersas producirá una leve perturbación. El contraste en un objeto en este contexto depende tanto de la magnitud del contraste, como de su forma y orientación[17], y de la frecuencia de la onda.

[17] Puede ser un cambio de densidad, una roca en el hielo, una grieta, un canal de agua, etc.

2.1.7 Reflexión

Como se ha indicado al hablar genéricamente de la perturbación, la reflexión es la parte de la energía electromagnética incidente que no atraviesa un contraste de impedancia intrínseca. La ley de Snell relaciona los ángulos de incidencia, reflexión y refracción con las velocidades de propagación de los dos medios que están en contacto.

El coeficiente de reflexión del campo correspondiente a una onda incidente vertical en una discontinuidad, se define como el cociente entre el campo incidente y el reflejado, y su valor es (Neff, 1991, §4.6)

$$R = \frac{E^+}{E^-} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \tag{2.62}$$

y, para el caso de una discontinuidad entre dieléctricos,

$$R = \frac{1 - \sqrt{\varepsilon_2 / \varepsilon_1}}{1 + \sqrt{\varepsilon_2 / \varepsilon_1}}, \tag{2.63}$$

donde ε_1 y ε_2 son las permitividades eléctricas de los medios anterior y posterior al contraste de impedancia, respectivamente.

Las reflexiones en la onda propagada producidas en las discontinuidades del medio se deben a la diferencia entre las permitividades relativas del aire, del hielo, del agua y del material que constituye el lecho (roca impermeable, sedimentos con mayor o menor contenido de agua, etc.). En la Tabla 1 se han mostrado los valores de las permitividades de múltiples materiales. A partir de ella, en la Tabla 2 se resumen ahora unos valores promedio, para evaluar los

coeficientes de reflexión para discontinuidades entre dos medios, que se presentan a continuación, en la Tabla 3. A modo de referencia, Annan (2001, §6.1) indica que un coeficiente de reflexión por encima de 0'1 es suficiente para que la perturbación en la onda resulte discernible del ruido de fondo.

	ε
aire	1
hielo glaciar	3'19
roca	15
sedimentos	30
agua	86

Tabla 2 Tabla de valores de permitividad media, representativa de los materiales típicos en glaciología, extraída de la Tabla 1.

R	aire	hielo	roca	sedim.	agua	ε_2
aire	-	-0'28	-0'59	-0'69	-0'8	
hielo	0'28	-	-0'37	-0'51	-0'68	
roca	0'59	0'37	-	-0'17	-0'4	
sedimentos	0'69	0'51	0'17	-	-0'26	
agua	0'8	0'68	0'4	0'26	-	
ε_1						

Tabla 3 Tabla de coeficientes de reflexión sobre discontinuidades de impedancia producidas por cambio de medio, obtenida por (2.63) a partir de las permitividades medias de la Tabla 2.

El espesor del objeto o de la discontinuidad influye también en su capacidad de reflexión. La reflexión disminuye en objetos delgados frente a la longitud de onda de la señal en el medio. La relación exacta puede encontrarse *e.g.*, en Ramo *et al.* (1994, §6.8b). Pero la rugosidad de su superficie o de la interfase entre ambos materiales también afecta a la potencia reflejada, como discute Berry (1972, 1973).

El esquema ideal de reflexiones, considerado desde la teoría de rayos, puede observarse en la Figura 2-5, y el registro de datos obtenido, en la Figura 2-6.

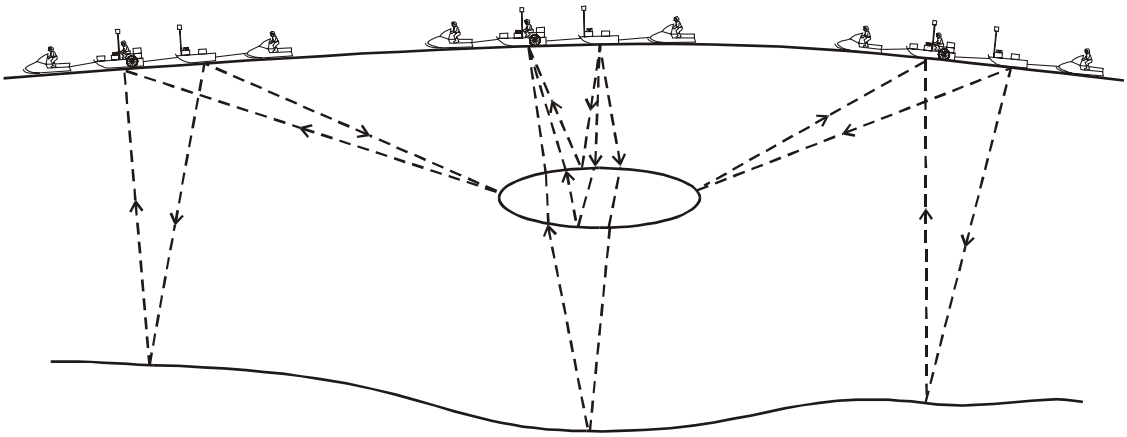

Figura 2-5 Idealmente, reflexiones a lo largo de un sondeo con georradar.

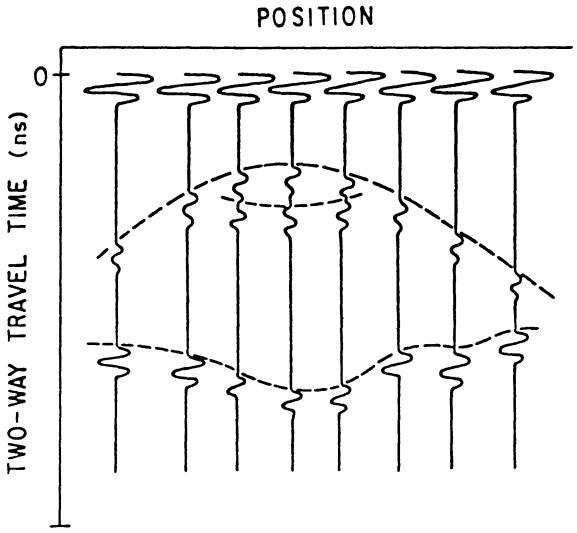

Figura 2-6 Registro del georradar obtenido en la situación ideal mostrada en la Figura 2-5 (Davis y Annan, 1989).

2.1.8 Técnicas de adquisición de datos: disposición de fuentes y receptores

Existen distintas técnicas de adquisición de datos con georradar, que vienen definidas por las diferentes disposiciones relativas entre las fuentes, los receptores, e incluso los elementos del subsuelo que observan.

Si bien estas técnicas definen la organización de las fuentes y receptores durante la adquisición de datos, implícitamente también definen las correspondientes ordenaciones en que aparecerán sus registros (*sort*).

Denominando *offset* a la distancia entre el emisor y el receptor, las técnicas de disposición de fuentes y receptores más utilizadas pueden enumerarse como las ordenadas por *offset* común (*common-offset gather*, o COG), donde las antenas emisora y receptora se desplazan al unísono y en el mismo sentido, guardando una distancia constante (*offset*) entre sí[18]; por fuente común (*common-shot gather*, o CSG, e incluso *common-shot point gather*, o CSP *gather*), donde la antena emisora se mantiene situada en una posición fija, mientras la antena receptora es colocada de forma sucesiva (o varias simultáneamente) a distintas distancias; por receptor común (CRG, *common-receiver gather*), consistente en su recíproca; y la conocida como punto medio común (*common-mid point gather*, o CMP *gather*), donde las antenas emisora y receptora se desplazan en sentidos opuestos manteniéndose equidistantes a un punto medio común, también denominado CMP.

Las técnicas de adquisición de datos en las que una antena permanece fija mientras la otra va alejándose, obteniendo ángulos cada vez mayores (ya sea

[18] Si el emisor y el receptor se ubican en el mismo lugar, se conoce como *offset* nulo (*zero offset*).

emisor común o receptor común) se conocen como técnicas WARR (W*ide Angle Reflection and Refraction*) .

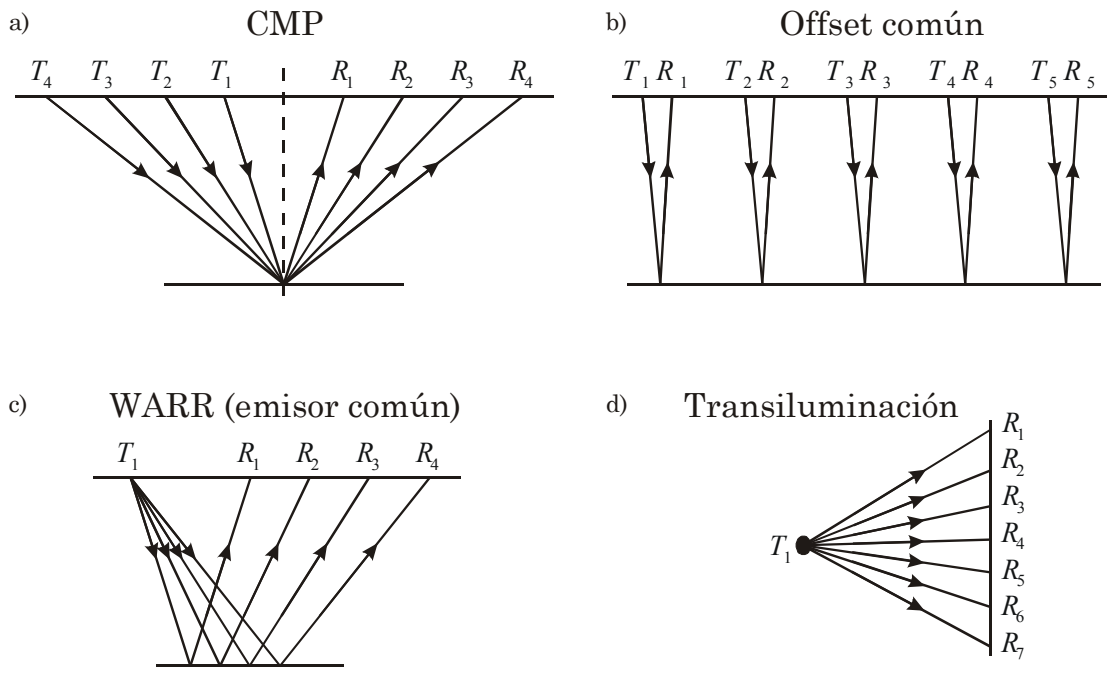

Figura 2-7 Técnicas básicas de adquisición de datos.

Existen otras técnicas que están basadas en mayor o menor medida en las anteriores. La transiluminación (*transillumination*) consiste en la introducción de las antenas en túneles, galerías o pozos artificiales en el subsuelo. Una antena permanece fija, mientras la otra se desplaza frente a ella en otra galería, pudiendo medirse la velocidad de esta transmisión. Consecuentemente, si puede medirse la amplitud de la señal, se podrá determinar la atenuación (Annan y Davis, 1978).

Clasificando estas técnicas con arreglo a la multiplicidad de ángulos de iluminación de los objetos, se dividen en técnicas de adquisición de cobertura múltiple (*multifold*) y de cobertura única (*single-fold*). Las primeras son aquéllas en que se pretende la iluminación de los objetos bajo diferentes

ángulos. En estas técnicas se realizan varias mediciones sobre cada punto, utilizando diferentes separaciones entre emisor y receptor, para obtener distintos ángulos de iluminación del mismo punto. Todas las trazas obtenidas por diferentes ángulos de iluminación correspondientes a un mismo punto deben integrarse durante el procesado, mediante una técnica denominada reagrupación (§2.1.10), que incrementa la relación señal-ruido de la traza. La técnica de cobertura única realiza una medición por punto, y por excelencia es la de *offset* común[19]. Las demás técnicas expuestas son de cobertura múltiple.

La técnica más utilizada en los sondeos de georradar es la de *offset* común, expuesta en la Figura 2-1 y en la Figura 2-7b, si bien el CMP y WARR se utilizan para el análisis de la velocidad de propagación de la onda en el medio en estudio, como se analizará en §4.1.2.

En sustitución de la técnica de adquisición por *offset* nulo, habitualmente se utiliza la de *offset* común, ante la imposibilidad de ejecución de la primera. El funcionamiento del georradar imposibilita que la ubicación de la antena emisora coincida con la de la receptora, salvo que trabaje con sólo una antena que primero funcione como emisora y a continuación lo haga como receptora (*monostatic mode*). Sin embargo, habitualmente el georradar utiliza dos antenas, una emisora y otra receptora (*bistatic mode*). En tal situación, la antena receptora recoge el pulso emitido en forma directa, saturando el receptor (§2.1.13 y §2.2.3). Pero este *offset* introducido (distancia entre emisor y receptor) modifica los tiempos de llegada (tiempos dobles) de las reflexiones, en mayor medida sobre los más superficiales, modificaciones que deben ser corregidas (§2.2.2).

[19] Puede apreciarse en la Figura 2-5 que la técnica de *offset* constante también ilumina objetos bajo diferentes ángulos, pero no se fundamenta en ello.

Conviene también destacar que el CMP es el punto fijo en la superficie respecto al que se establece la equidistancia con el emisor y el receptor, siendo este punto quien da nombre a la técnica de adquisición que lo genera. Pero debe distinguirse del CDP (*Common Depth Point*), que se corresponde con el punto medio común de reflexión de las ondas en el lecho. En la Figura 2-8a se aprecia este caso ideal, donde el punto medio en superficie (CMP) coincide en la vertical de punto común del lecho (CDP), al ser paralelos la superficie y el lecho. Habitualmente no puede siquiera garantizarse la existencia del CDP, pues la reflexión no se consigue en un único punto sino en una cierta región, como indica la Figura 2-8b. Las técnicas basadas en CMP, buscan realmente el CDP, aunque es frecuente omitir la referencia a CDP, refiriéndose a la técnica CMP-CDP como CMP.

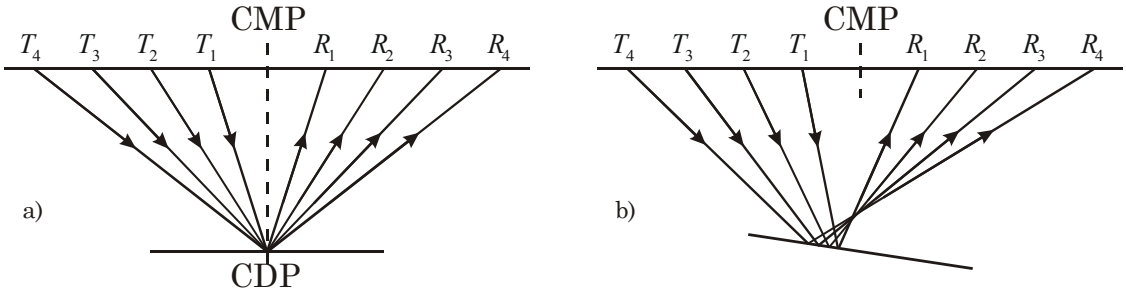

Figura 2-8 a) Reflector horizontal: existe CDP en la vertical del CMP.
b) Reflector con buzamiento: no existe CDP.

La técnica más utilizada en sísmica, no así en georradar, consiste en realizar los perfiles midiendo en puntos equiespaciados formando una línea, pero realizando un registro CMP sobre cada uno de ellos (§2.1.10).

2.1.9 Traza

La traza (*trace*) es el conjunto de valores registrados por el georradar como respuesta a un pulso emitido. Este término se utiliza tanto en referencia al registro, como a la representación gráfica de su amplitud mediante una línea continua en el tiempo.

Una vez que el transmisor del georradar emite un pulso, éste se propaga a través del subsuelo, sufriendo perturbaciones en los diferentes objetos y superficies. Parte de la energía emitida regresa a la superficie, producto de las diferentes reflexiones y difracciones (también retorna energía difusa, que introduce ruido aleatorio en la señal) y es captada por el receptor, donde se recibe en forma de señal analógica a través de sus entenas. En el receptor se muestrea formando una serie temporal. Posteriormente las muestras se digitalizan y se almacenan, obteniendo la traza (digital) registrada.

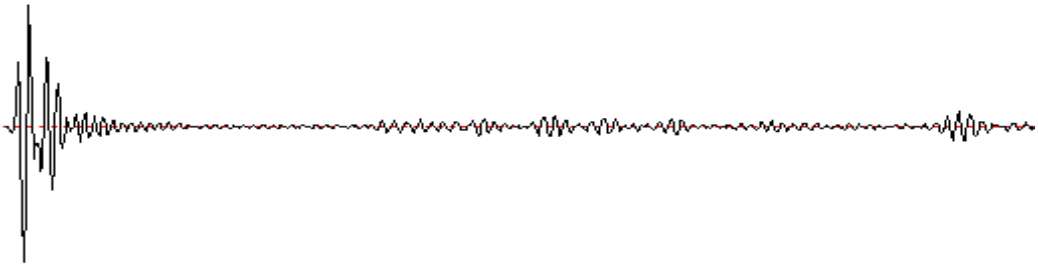

Figura 2-9 Forma de onda de una traza, con origen de tiempos a la izquierda. La traza presentada ha sido preprocesada. Las reflexiones que pueden apreciarse están amplificadas.

La Figura 2-9 muestra la forma de onda de una traza cuyo origen de tiempos se localiza a su izquierda. El pulso inicial se recibe por vía aérea (§2.1.13). Los posteriores son provocados por reflexiones. La traza ha sido amplificada con una ganancia exponencial para recuperar la amplitud de estas reflexiones (§2.2.5).

2.1.10 Reagrupación de trazas

La relación señal-ruido de la traza registrada en el receptor es muy baja, debido a las señales parásitas generadas por las heterogeneidades del medio. Gran parte de estas señales parásitas aparecen aleatoriamente distribuidas, por lo que la repetición de una misma medición, seguida de su posterior reagrupamiento (*stacking*), que las promedie, eleva la relación señal-ruido de la traza. Esta reagrupación se realiza de diferentes maneras, dependiendo de la técnica de adquisición de datos utilizada.

Presumiblemente, todas las muestras de una misma traza en un registro de *offset* común se toman desde un punto fijo de la superficie. Aunque en esta configuración el sistema georradar suele utilizarse en movimiento constante sobre la superficie del glaciar a lo largo de líneas preestablecidas, la velocidad de desplazamiento (~3 $\mathrm{m\,s^{-1}}$) es varios órdenes de magnitud inferior a la de transmisión de la onda por el hielo (140~170 $\mathrm{m\,\mu s^{-1}}$), por lo que su desplazamiento en el tiempo de registro de la traza (6 μs) es despreciable (~20 μm). Tanto es así que para disminuir el ruido aleatorio de la señal, cada vez que se registra una traza se ha efectuado el proceso anterior múltiples veces, reagrupando a continuación todas en una (reagrupación o *stacking* interno)[20].

[20] Por ejemplo, el georradar VIRL2 (uno de los utilizados en esta tesis), reagrupa de forma automática 256 trazas en una, repitiendo la emisión de pulso a una frecuencia de 20 KHz. Esto supone aproximadamente un desplazamiento del convoy de 4 cm sobre la superficie del glaciar. Dado que además puede seleccionarse como parámetro un factor multiplicativo de 1, 2, 4, 8, 16 ó 32, en el mayor de los casos se integrarían 8.192 trazas, recogidas todas en un espacio aproximado de 1'25 m sobre el glaciar.

En general, en las técnicas de adquisición de cobertura múltiple, como son las de CMP y WARR, se pretende la iluminación de los objetos bajo diferentes ángulos, realizando varias mediciones sobre cada punto, con diferentes separaciones entre emisor y receptor. Sobre estas trazas suele realizarse un nuevo reagrupamiento durante el procesado, que incrementa la relación señal-ruido de la traza.

En sísmica existe una técnica de registro de *offset* común, habitualmente utilizada en sísmica monocanal (un emisor y un receptor), equivalente a la del georradar. Pero existe otra técnica poco frecuente en georradar[21], aunque es la técnica de registro habitual en sísmica de reflexión multicanal[22]. Consiste en realizar los perfiles midiendo en puntos equiespaciados formando una línea, pero realizando un registro CMP sobre cada uno de ellos. Su procesado debe comenzar realizando la reagrupación de cada medición CMP, para convertirlo en el equivalente a un una traza de *offset* nulo. El resultado de esta conversión en toda la secuencia de registros CMP genera el equivalente a un perfil de *offset* nulo. El reagrupamiento realizado proporciona una excelente relación señal-ruido a los perfiles.

[21] Fisher *et al.*, 1992, experimentan con esta técnica, utilizando el georradar.

[22] Aquélla basada en el uso de un emisor y múltiples receptores (geófonos).

2.1.11 Fichero de registro

Los georradares actuales registran digitalmente los datos, y se conoce por fichero de registro (*file*) a cada uno de los archivos informáticos que agrupan un conjunto de trazas, para almacenarlas juntas. Existen diferentes formatos para guardar esta información, que inicialmente pueden distinguirse por su extensión: dat, sg2, etc. Cuando se unen o recortan ficheros de registro para formar una línea se dice que dichos ficheros de registro son además ficheros de línea o de perfil.

Además de los propios registros de las trazas, en estos ficheros se incluye cierta información característica del tipo de registro realizado. Así, cada traza incluye una cabecera de traza (*trace header/trace descriptor*), que antecede al conjunto de muestras y aporta información sobre algunas características de la traza que encabeza (*e.g.*, posición de las antenas, elevación, etc.). Además de las cabeceras de cada traza, el fichero que las aúna contiene otra cabecera, denominada cabecera de fichero (*file header/file descriptor*), que acompaña al conjunto de trazas dentro del fichero de registro, apartando información sobre dicho conjunto (*e.g.*, número de trazas, intervalo de muestreo, etc.).

2.1.12 Formas de visualización. Radargramas.

Al representan secuencialmente las trazas se forma una imagen, conocida como radargrama, o como sección o perfil de georradar.

Las interfaces del subsuelo generan perturbaciones de mayor amplitud en las trazas. Su yuxtaposición en el radargrama reproduce la imagen de estas interfaces.

Los radargramas se pueden representar utilizando diferentes técnicas, que modifican su estética. Las trazas se disponen una a la derecha de la otra, a lo largo del eje horizontal, quedando el tiempo en el eje vertical (positivo hacia abajo). Las trazas pueden representarse como líneas continuas (*wiggle trace*), o por puntos, utilizando en este caso una escala de tonos para sus amplitudes (*pointmode*).

La Figura 2-6 utiliza la técnica de representación por líneas continuas para mostrar el radargrama correspondiente al sondeo de la Figura 2-5. Esta técnica tiene una variante habitual consistente en el sombreado de parte del área bajo la curva (*variable area*), normalmente la correspondiente a amplitudes positivas, como puede verse en la Figura 2-10, de la que se muestra un detalle en la Figura 2-11.

En la representación por puntos, cada traza aparece como una barra vertical compuesta por finas franjas horizontales (puntos rectangulares), correspondientes a las muestras individuales de la traza. Las amplitudes se representan mediante tonos de gris (*variable density* o *line intensity*), o colores, según una escala predeterminada. Esta técnica genera una imagen que rellena toda la superficie del radargrama, como puede apreciarse en la Figura 2-12 y en el detalle mostrado en la Figura 2-13.

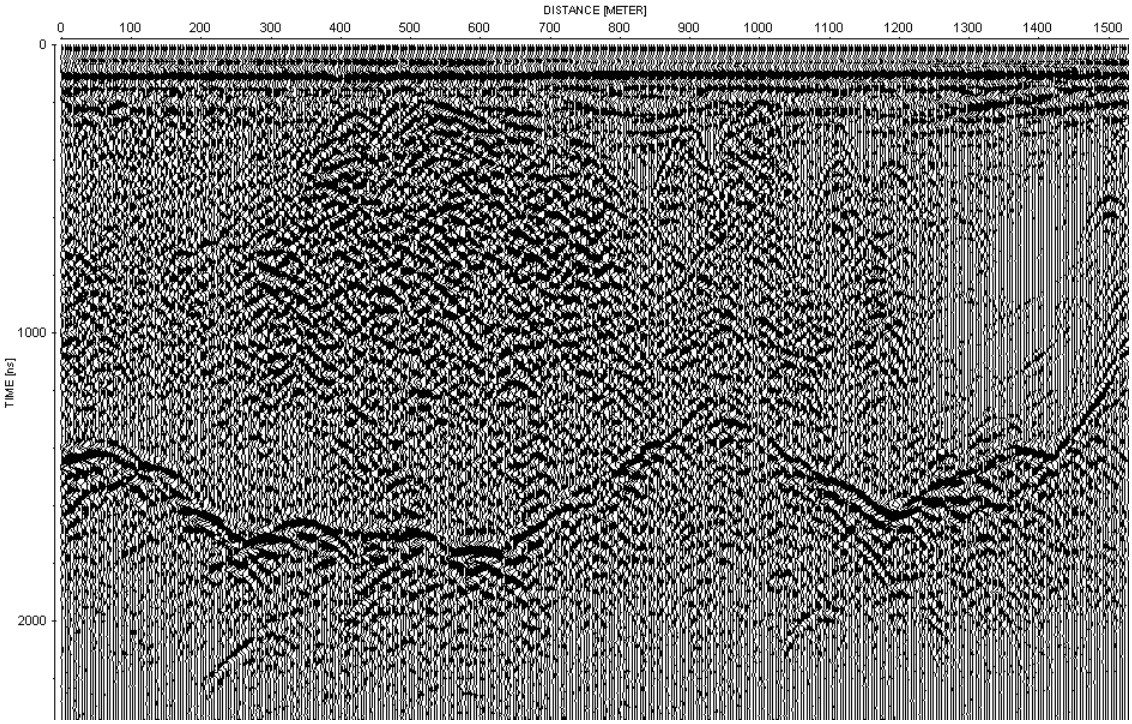

Figura 2-10 Radargrama obtenido en el glaciar Hurd[23] (*wiggle trace* + *variable area*).

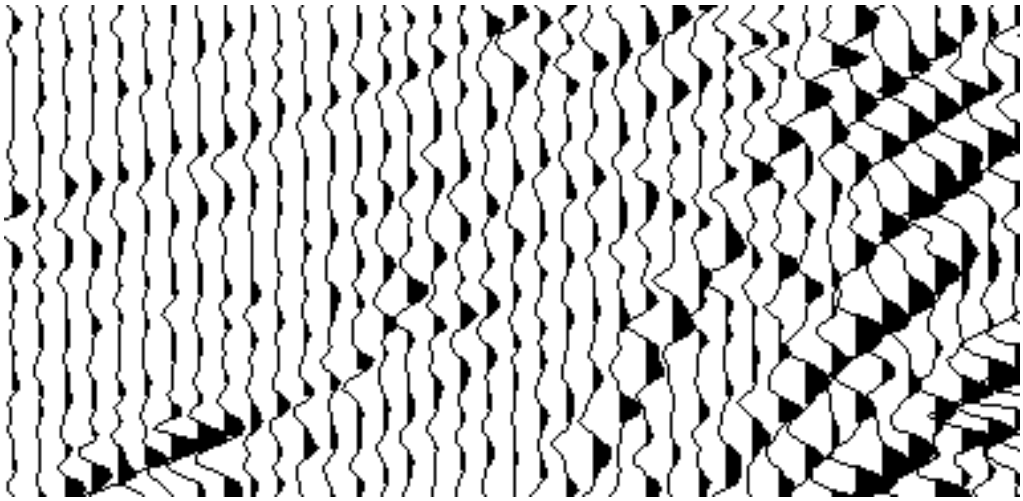

Figura 2-11 Detalle del radargrama de la Figura 2-10.

[23] Línea hur01-02--EH23-EH01 del glaciar Hurd, de la campaña antártica 2001-02. Este radargrama ha sido sometido a un pre-procesado (previo a la migración).

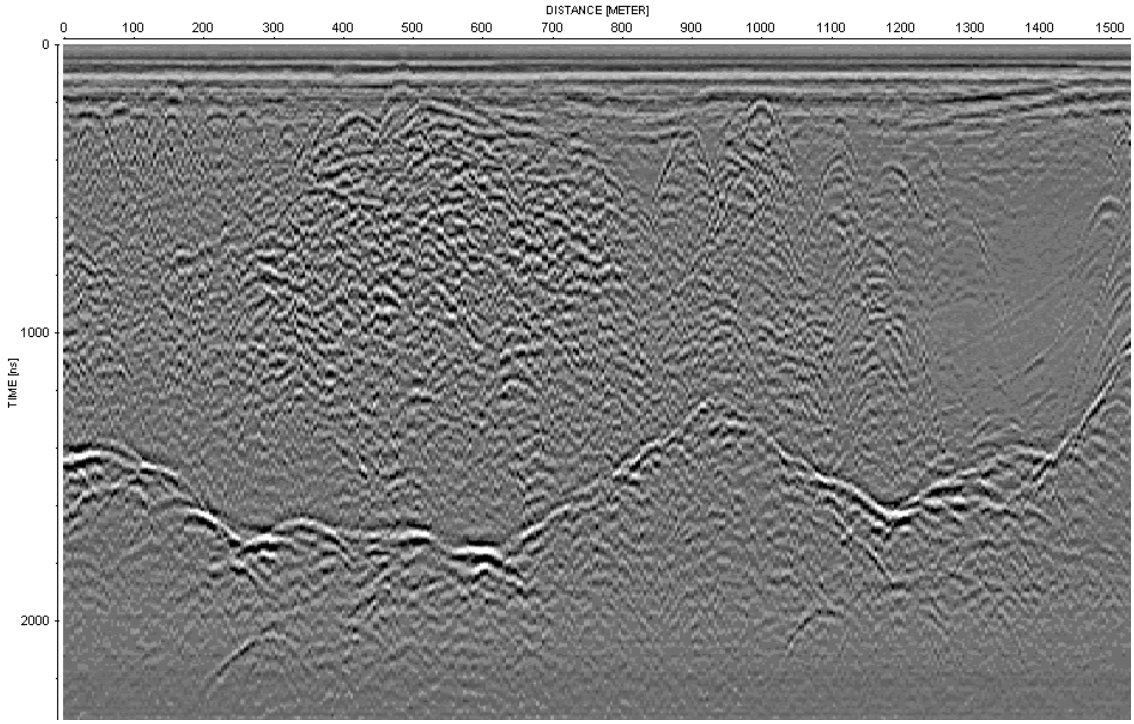

Figura 2-12 Radargrama obtenido en el glaciar Hurd[24] (escala de grises en *pointmode*).

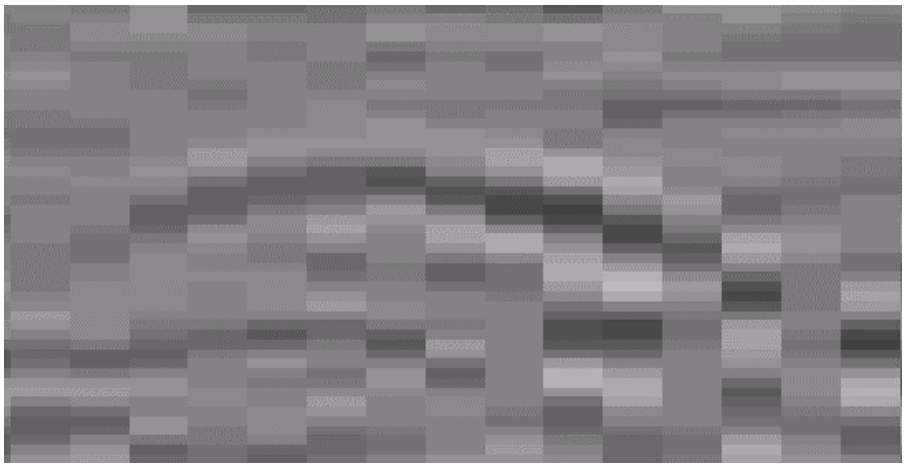

Figura 2-13 Detalle de los puntos rectangulares que componen la imagen de la Figura 2-12.

[24] Mismo perfil que el representado en la Figura 2-10.

2.1.13 Onda directa y onda aérea

Cualquier técnica de adquisición de datos en superficie pretende que el pulso se transmita a través del subsuelo, se refleje o difracte en los objetos que se quieren detectar y regrese a la antena receptora. Pero la onda se propagará también por vía aérea entre la antena transmisora y la receptora. Además de esta onda aérea, se produce otra a través del estrato más superficial del hielo. Si la primera se conoce como onda aérea, y se propaga a la velocidad de la luz en el aire (~*c*), la segunda se denomina onda directa, y lo hace a la velocidad de propagación por el medio. Así, en toda traza se registrará en primer lugar, y con amplitudes muy superiores al resto, la onda aérea, seguida de la onda directa. Esto supone una perturbación en el comienzo de cada traza, que dificulta la detección de objetos en una zona superficial de espesor entre una y dos veces la separación entre antenas del georradar (*offset*)[25]. La Figura 2-14 muestra estos caminos, cuyos efectos se aprecian en las primeras decenas de nanosegundos de las Figura 2-10 y Figura 2-12, en forma de líneas horizontales que recorren la parte superior del radargrama.

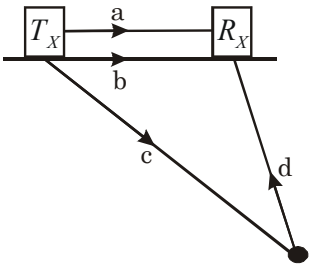

Figura 2-14 Ondas a) aérea; b) directa; c) en propagación por el medio; d) reflejada-difractada.

[25] La duración de la perturbación se aproxima a la suma de la del pulso (~33 ns para 30 MHz; ~4 ns para 250 MHz) más el tiempo de llegada de la onda directa (~36 ns en *offset* común de 6 m para el hielo con v = 0'165 m/ns). Esto puede alargarse en el tiempo si no se trata de monopulso.

2.1.14 Distorsiones geométricas

En un radargrama de *offset* nulo todo elemento reflectante aparece bajo el punto de medida. Caso de que el radargrama se obtenga mediante la técnica de punto medio común (CMP), el reflector aparecerá bajo el CMP en el radargrama. Pero en realidad la reflexión se produce perpendicularmente al reflector, por lo que en cada traza se desconoce la dirección en la que ha sido producida dicha reflexión. El lugar geométrico de los puntos con idéntico tiempo de ida y vuelta (*two-way travel time*, TWT, en adelante tiempo doble o tiempo de llegada), y por lo tanto, el de los puntos donde puede localizarse el reflector, es una semicircunferencia (semiesfera, si se consideran reflectores fuera del plano del radargrama), como muestra la Figura 2-15.

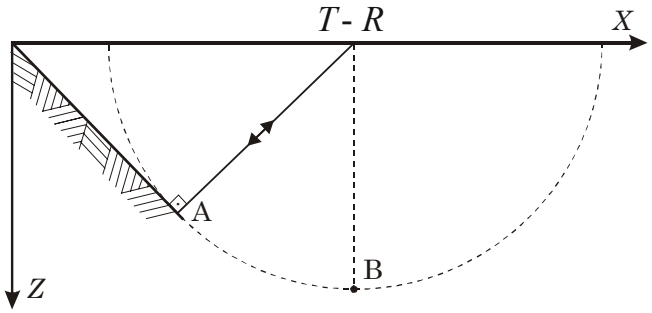

Figura 2-15 El punto reflector es A. B es el lugar donde se representa el punto A en el radargrama. La semicircunferencia, que pasa por ellos, es el lugar geométrico de los puntos con el mismo tiempo doble.

Esta distorsión, por la que los reflectores no se representan en su posición provoca una serie de errores geométricos y figuras, que a continuación se detallan, y que en gran medida pueden ser corregidas. Se explica más adelante el método de corrección, denominado migración (§2.2.8), en referencia al desplazamiento de los puntos a su correcta posición.

El lugar geométrico circular (esférico) correspondiente a la configuración en *offset* nulo toma, sin embargo, forma elíptica si se trabaja en configuración de *offset* común, al estar definido por los puntos cuya suma de distancias al transmisor y al receptor es constante (elipsoide de revolución). Existen métodos para corregir las distorsiones geométricas producidas por los registros en *offset* nulo o en CMP. Sin embargo, en el caso de haber trabajado en configuración de *offset* común, deberá realizarse un corrección que compense este *offset* (§2.2.2) antes de aplicar los métodos migratorios para *offset* nulo.

Distorsión en el buzamiento de los reflectores

Como se ha indicado, en su propagación, la onda lo hace en todas las direcciones. Las reflexiones que provienen de reflectores con buzamiento lo hacen perpendicularmente al mismo, realizando un recorrido oblicuo hacia el receptor, donde se registra su tiempo doble. Pero su representación se realiza en el eje vertical del punto de medida, para formar el radargrama. Esto distorsiona la forma de los reflectores, que aparecen más largos y con menor buzamiento en el radargrama.

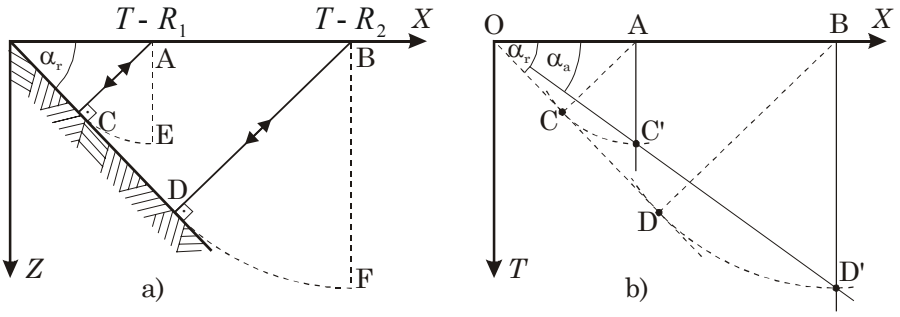

Figura 2-16 Distorsión de buzamientos entre la realidad topográfica del lecho (a) y la imagen del lecho en el radargrama (b).

La Figura 2-16 muestra el error que se comete por este hecho ante un reflector plano inclinado (*dipping reflector*). Los puntos C y D forman parte de un lecho de buzamiento α_r. Estos puntos generan las perturbaciones C' y D' en el radargrama. Suponiendo, como primera aproximación, una velocidad de propagación constante, la transformación entre profundidades y tiempos es sólo un factor de escala (v). En el radargrama el lecho se muestra con un buzamiento aparente α_a, inferior al real α_r, que topográficamente se correspondería con los puntos E y F, puntos en la vertical del georradar, a la misma distancia (y mismo tiempo doble) que los C y D, y que por tanto generarían las imágenes C' y D'.

La relación entre ambos buzamientos se obtiene de la figura. El seno del ángulo de buzamiento real (α_r) es el cociente de las distancias BD' entre BO. Por otro lado, teniendo en cuenta que la distancia BD es la misma que BD', y que la tangente del buzamiento aparente (α_a) se obtiene como cociente de las distancias BD entre BO, puede expresarse

$$\operatorname{sen} \alpha_r = \operatorname{tg} \alpha_a . \tag{2.64}$$

Nótese que el error cometido es muy leve si el receptor tiene un buzamiento bajo, cercano a la horizontal. Sin embargo para grandes buzamientos la distorsión puede ser muy importante. Si el plano reflector fuera vertical ($\alpha_r = \pi/2$), el buzamiento aparente en el radargrama sería de 45 º ($\alpha_a = \pi/4$). Esto quiere decir, además, que en un radargrama no pueden aparecer pendientes superiores a 45 º. Si las hubiera serían consecuencia de ruidos, señales parásitas u otros efectos.

Sinclinal

Otra distorsión habitual causada por el mismo motivo antes expuesto es el producido por una depresión en el reflector, como muestra la Figura 2-17.

Desde el punto B en superficie se reciben tres reflexiones, debidas a la existencia de otras tantas radiales que desde él surgen perpendiculares al lecho. Se produce una reflexión en el fondo de la depresión (III), y otras dos en los extremos de la misma (II y IV), donde la convexidad del lecho ha cambiado de signo. En el radargrama se observa una figura en forma de corbata de lazo o pajarita (*bow-tie*).

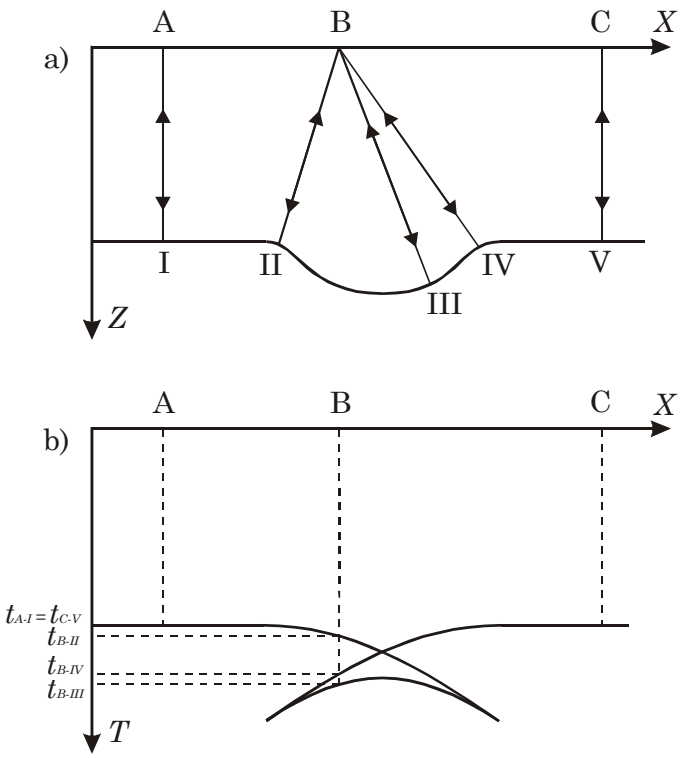

Figura 2-17 a) Topografía (*X-Z*) de una depresión ubicada en un reflector horizontal (sinclinal). b) Efecto "corbata de lazo" (*bow-tie*) sobre el radargrama (*X-T*) provocado por la recepción múltiple en la depresión.

Hipérbolas de reflexión y de difracción

Este mismo efecto genera hipérbolas de difracción al encontrarse el georradar ante un objeto puntual en lugar de un plano inclinado. La representación gráfica de los tiempos dobles en los radargramas no se corresponde directamente con la forma de la estructura que existe bajo la superficie, como ya se he apreciado en la Figura 2-6. Estos tiempos registrados toman formas que se repiten con frecuencia, por ser inherentes a las técnicas de adquisición de datos. La más habitual es la hipérbola[26].

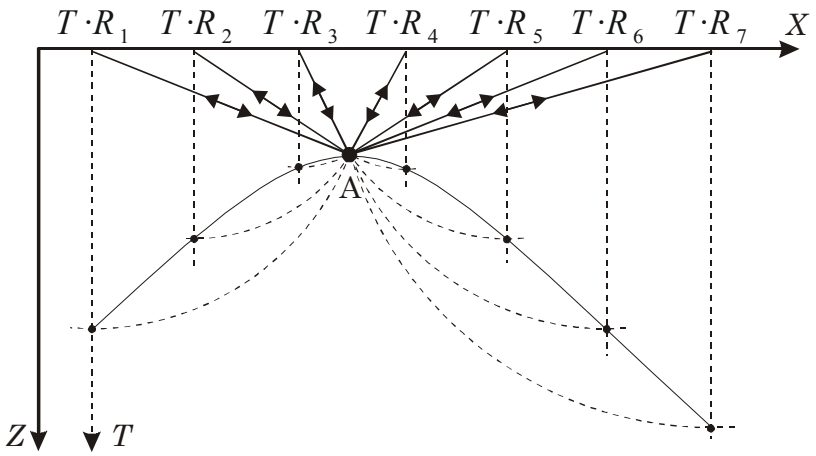

Figura 2-18 Hipérbola de difracción obtenida en el radargrama de un sondeo de *offset* nulo, ante la presencia de un objeto A.

En un radargrama de *offset* nulo se aprecian hipérbolas en la posición de cada objeto de dimensiones comparables a la longitud de onda del GPR. Éstas se denominan hipérbolas de difracción. Al acercarse un georradar en configuración de *offset* nulo a un objeto puntual situado en el subsuelo los tiempos dobles decrecen siguiendo una ley hiperbólica, obteniendo un mínimo (máximo en la hipérbola) en la posición más cercana al objeto. El radargrama

[26] En §4.1.1 se utilizan estas hipérbolas para calcular la velocidad de propagación.

mostrado en la Figura 2-12 muestra numerosas hipérbolas de difracción, generadas como gráficamente se indica en la Figura 2-18, donde, solapado a la imagen topográfica, se presenta el radargrama teórico para ilustrar la obtención de la hipérbola de difracción.

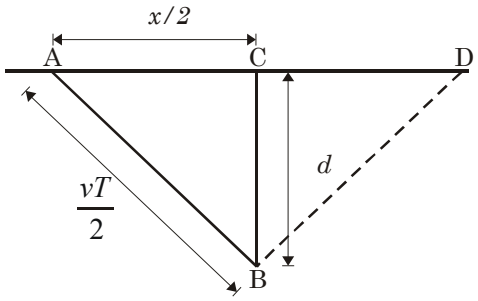

Figura 2-19 En el triángulo **ABC**, **B** es el punto de reflexión (lecho) o de refracción (objeto); **C** es la vertical de **B** en superficie; **A** es emisor y receptor en *offset* nulo y es emisor en CMP o WARR; **D** es el receptor en CMP o WARR (sin sentido en *offset* nulo).

Trabajando con técnicas CMP y WARR las superficies planas sublglaciares generan también hipérbolas en los radargramas. Son las hipérbolas de reflexión. Tanto para las hipérbolas de reflexión como para las de difracción los cálculos que las justifican son similares. En la Figura 2-19 se representa el triángulo formado por emisor (A), el punto de contacto de la onda en el lecho u objeto (B) y la vertical en superficie de éste (C). T es el tiempo doble, del emisor hasta el receptor, pasando por el elemento reflector o difractor (ABA para *offset* nulo, o ABD para CMP o WARR). Así, el lado AB, tanto en *offset* nulo, como por simetría en CMP o en WARR, es la mitad del camino recorrido[27] por la onda en T. De acuerdo con esto,

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + d^2 = \left(\frac{vT}{2}\right)^2 . \qquad (2.65)$$

[27] En transiluminación sería camino total, siendo válidas figura y expresiones, con T en lugar de $T/2$.

Para un instante T fijo se obtiene una circunferencia, que representa la forma del frente de ondas. Pero al representar (2.65) en el radargrama X-T, con cada objeto reflector o refractor (d fijo) aparece la hipérbola

$$\frac{T^2}{(2d/v)^2} - \frac{x^2}{(2d)^2} = 1 \ . \tag{2.66}$$

La apertura de estas hipérbolas crece con la profundidad, si la velocidad es constante. Por otro lado, estudiando sus asíntotas ($T = \pm x/v$) se aprecian hipérbolas más abiertas en los medios con mayor velocidad de propagación.

Es habitual representar los tiempos dobles en función del *offset*, como $t(x)$, al trabajar con registros CMP o WARR (Yilmaz, 1987, §3.2). Para ello, se sustituye T por $t(x)$ y d por $vt(0)/2$ en las expresiones anteriores, quedando

$$t^2(0) = t^2(x) - \frac{x^2}{v^2} \ . \tag{2.67}$$

Por otro lado, nótese que se ha utilizado la variable x para caracterizar la distancia entre emisor y receptor en CMP o WARR, por lo que $x/2$ representa la distancia horizontal al elemento difractor (B) en *offset* nulo. Si se quisiera renombrar por x esta distancia en *offset* nulo, las expresiones (2.65), (2.66) y asíntotas quedarían respectivamente como

$$x^2 + d^2 = \left(\frac{vT}{2}\right)^2 , \qquad \frac{T^2}{(2d/v)^2} - \frac{x^2}{d^2} = 1 \qquad \text{y} \qquad T = \pm 2x/v \ , \tag{2.68}$$

2.2 Términos y conceptos del procesado de datos de georradar

Asociados a la relación entre la emisión del pulso del georradar, el subsuelo y su posterior recepción, se plantean dos problemas: el problema directo (*forward problem*), y el problema inverso (*inverse problem*) (Yilmaz, 1987; Scales, 1994; Claerbout *et al.*, 1996; Claerbout y Black, 2001; Bleistein *et al.*, 2001).

El problema directo es el problema clásico: dada una geometría y unas propiedades físicas del medio, se estudia la evolución espacial o temporal de la onda desde su fuente. En él se calcula el campo que se obtendría en cualquier punto o instante, a partir de una configuración del subsuelo determinada, bajo la asunción de las leyes físicas necesarias. En este tipo de problema se suponen conocidos los parámetros de los materiales, las condiciones de contorno y las características de la fuente, se hace uso de las leyes físicas necesarias y se busca determinar el campo, como incógnita. Es habitual utilizar el término modelado en referencia a este tipo de problema.

El problema inverso consiste en la inferencia de las propiedades del subsuelo y su geometría a partir de los datos de campo observados desde la superficie. Es decir, pretende la determinación de las causas, desde la observación de las consecuencias. En el problema inverso los datos se obtienen del radargrama, *i.e.*, del registro del campo en superficie tras haber interactuado con el medio. Puede obtenerse además alguna información, siempre incompleta, sobre las velocidades y parámetros del subsuelo. Las incógnitas a determinar en el problema inverso son la forma y posición de las superficies de discontinuidad o reflectores del subsuelo y sus propiedades físicas.

El planteamiento del problema inverso utiliza conceptos y principios como son el reflector radiante (*exploding reflector*), la extrapolación descendente (*downward continuation*) y el principio de representación (*imaging*) (Yilmaz, 1987; Scales, 1994; Claerbout *et al.*, 1996; Claerbout y Black, 2001; Bleistein *et al.*, 2001).

Basado en el principio de Huygens, el reflector radiante se fundamenta en la equivalencia existente entre el registro obtenido por el georradar y el que se obtendría si fuesen los reflectores quienes se tornasen en emisores. Esta equivalencia debe plantearse en primera aproximación, salvando la existencia de distorsiones, y teniendo en cuenta que se invierte la mitad de tiempo en el reflector radiante, ya que el camino que los frentes de onda así producidos recorrerían hasta la superficie sería la mitad que el recorrido por los frentes de ondas reales del georradar.

Utilizando esta equivalencia pueden desarrollarse algoritmos mediante los que ir extrapolando el frente de ondas registrado en superficie hasta distintas profundidades (z). Esta extrapolación hacia el interior del subsuelo es la que se conoce como extrapolación descendente y es el principio en el que se fundamenta la solución del problema inverso.

El principio de representación establece la correspondencia entre la forma de los frentes de onda registrados y la forma de los reflectores que los hayan generado. Esto es, que la obtención de la secuencia reflectiva sea una buena aproximación a la imagen de las discontinuidades en el subsuelo.

Con el procesado de los datos obtenidos del georradar se pretende la solución de este problema inverso. De acuerdo con Yilmaz (1987), los tres pasos fundamentales en el procesado de señales sísmicas (y de georradar por

analogía) son la deconvolución, el reagrupamiento y la migración. Cada uno de ellos está destinado a incrementar la resolución del radargrama. Son los tres pasos de procesado que determinan el éxito o fracaso en la solución del problema inverso.

Pero Yilmaz se refiere al procesado de perfiles obtenidos mediante técnicas de adquisición de cobertura múltiple, como CMP o WARR. En los radargramas de *offset* común, caso que ocupa de modo fundamental a esta tesis, si bien el reagrupamiento existe, éste no es un paso del procesado, sino que se realiza electrónicamente por el georradar durante la adquisición de los datos en campo, como se ha explicado en §2.1.10.

En este apartado se describen conceptos relacionados con los pasos de procesado necesarios para la resolución del problema inverso en los radargramas obtenidos mediante *offset* común.

2.2.1 Correcciones estáticas

Las correcciones estáticas (*static corrections*) son aquéllas sin dependencia temporal que se realizan sobre el eje de tiempos de cada traza por separado (*e.g.*, recorte de la ventana temporal de registro, variación del origen de tiempo, cancelación de tramos de señal, etc.). A diferencia de las dinámicas (§2.2.2), las correcciones estáticas aplican la misma corrección a toda ventana temporal, sin deformaciones locales en el eje de tiempos.

Idealmente todas las trazas deberían comenzar su registro en el mismo instante de la emisión del pulso. Pero el comienzo de las trazas no siempre es tan uniforme como se desearía. Uno de los objetivos de las correcciones estáticas consiste en la unificación de este origen de tiempos en todas las trazas, ubicándolo en el instante correcto. En la Figura 2-20 pueden apreciarse los errores en el origen de tiempos de las trazas, y su corrección previa al procesado. Estas perturbaciones tienen causas dispares, como son las variaciones bruscas de la topografía superficial que afecten al sistema con diferencias en el contacto de las antenas con la nieve entre un punto y otro de medición, retardos esporádicos en el disparo del pulso, etc.

Una vez procesado el radargrama y que sus ordenadas representen profundidades en lugar de tiempos, puede aplicarse una corrección del origen de la variable vertical (corrección estática), transformando las profundidades en elevaciones, correspondiéndose así con la topografía superficial. Para ello se define un plano horizontal de referencia o *datum*, y se realiza un desplazamiento de cada traza que refleje la diferencia entre la elevación del punto de medida y el *datum*.

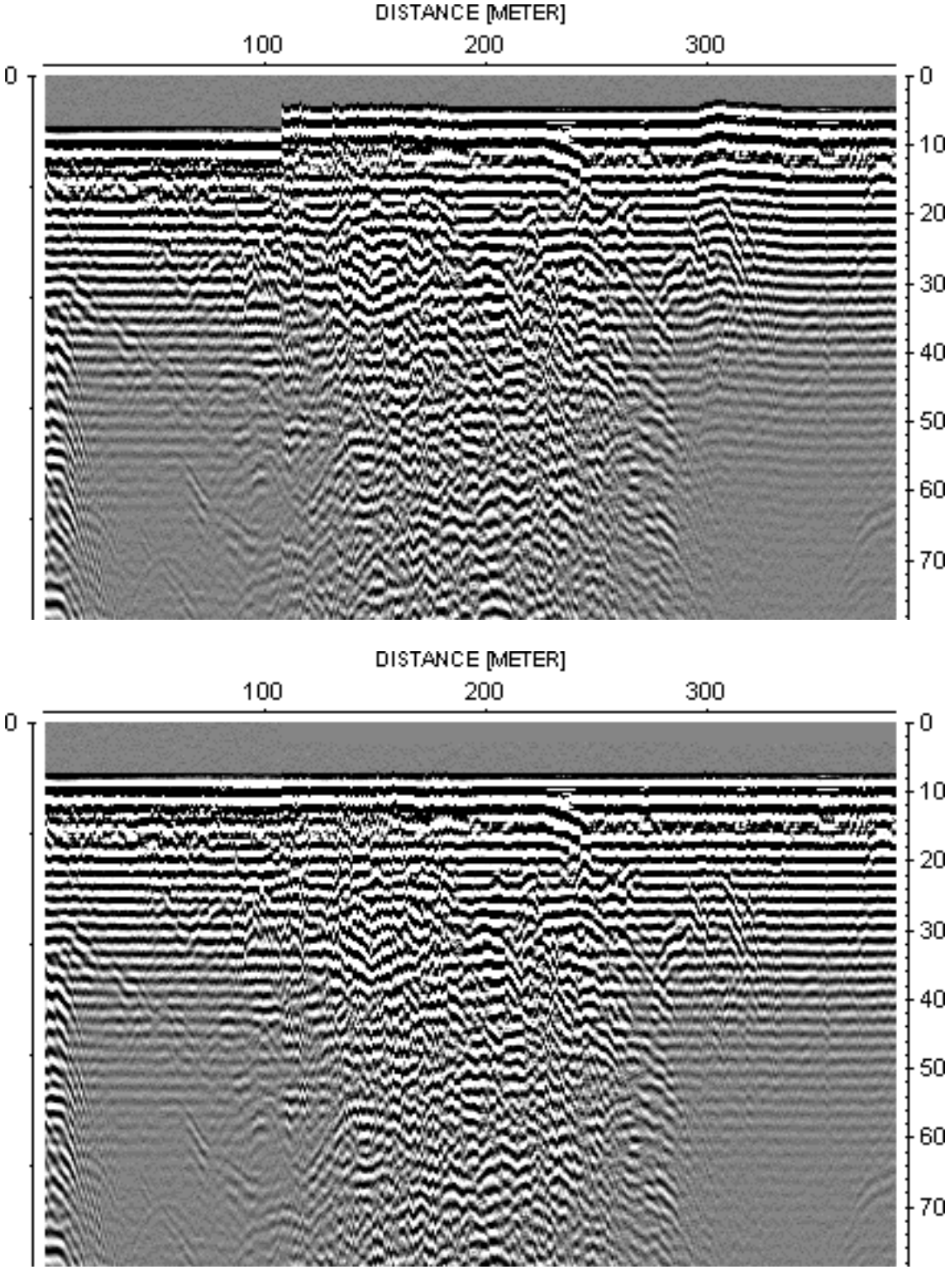

Figura 2-20 Arriba, radargrama con errores en el origen de tiempos de diferentes tipos: conjunto de trazas con error común (d = 1 a 107), errores esporádicos (d = 108 a 181) y errores graduales (d = 296 a 323). Debajo, radargrama con corrección estática del origen de tiempos.

La Figura 2-21 muestra un perfil longitudinal registrado por el autor el 31 de diciembre de 2001 en el glaciar Hurd (Livingston, Antártida), antes y después de realizar sobre él la corrección topográfica.

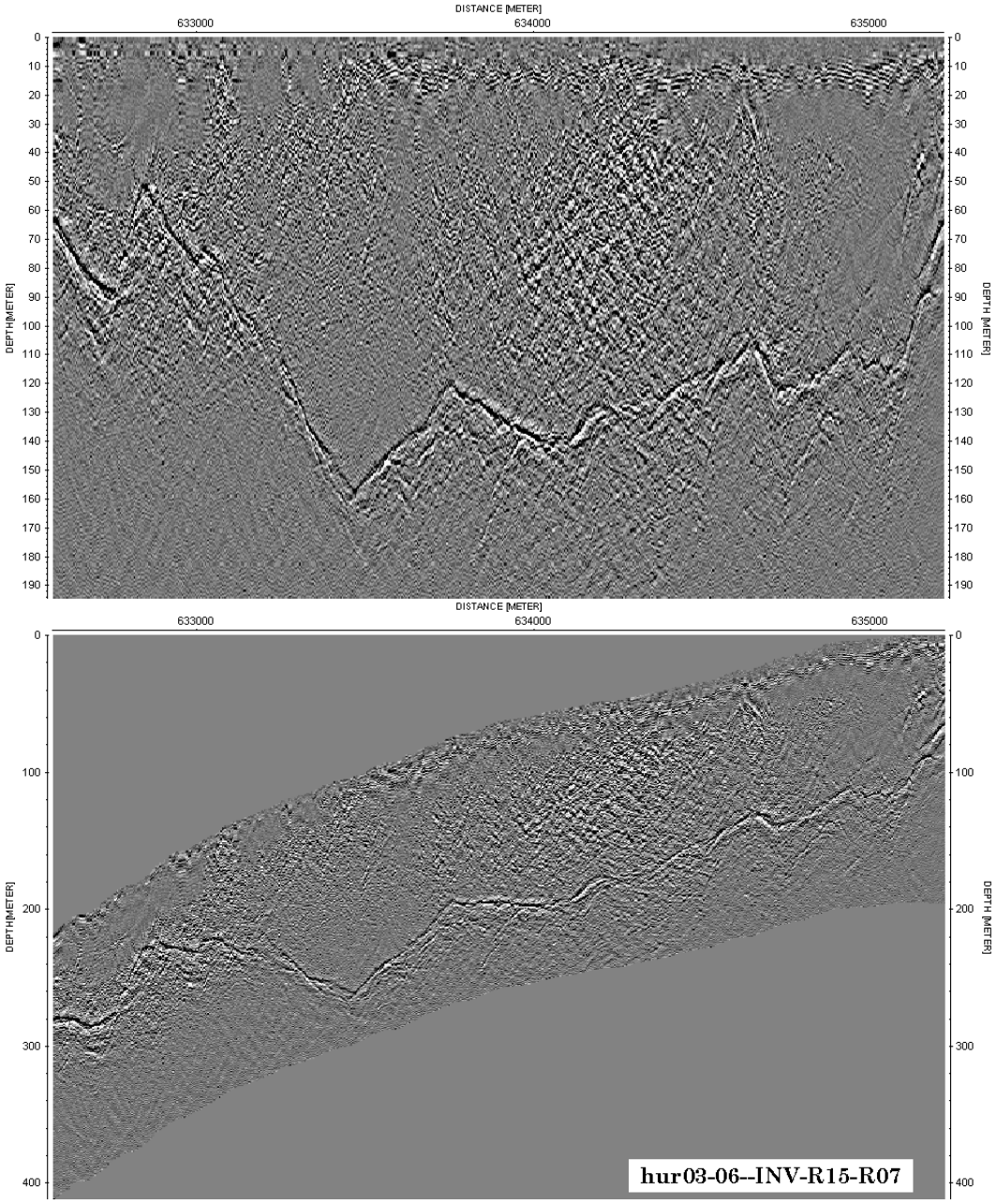

Figura 2-21 Perfil longitudinal del glaciar Hurd:
- Arriba, una vez procesado.
- Abajo, tras realizar la corrección topográfica.

2.2.2 Correcciones dinámicas

Las correcciones con dependencia temporal sobre el eje de tiempos de cada traza se denominan correcciones dinámicas (*dynamic corrections*). Cada ventana temporal de una misma traza recibe una corrección diferente, lo que da lugar a dilataciones y compresiones locales del eje de tiempos.

Las correcciones dinámicas se aplican para conseguir radargramas propios de un registro mediante *offset* nulo, a partir de radargramas registrados mediante técnicas de *offset* común, CMP o WARR. Esta corrección es necesaria como paso previo a la aplicación de ciertos pasos del procesado (como la migración, en 2.2.8, o la reagrupación de trazas), que presuponen un perfil obtenido con *offset* nulo.

El sucesivo alejamiento entre el emisor y el receptor en un registro CMP o WARR provoca un incremento sistemático del tiempo doble, que se conoce como *moveout*. Para cada valor de *offset* y bajo la suposición de una velocidad de propagación constante, la diferencia del tiempo doble con el de su correspondiente para *offset* nulo se conoce como NMO (*normal moveout*), que es la corrección dinámica necesaria para el registro CMP o WARR. En su expresión más sencilla, el NMO es una deformación del eje de tiempos del radargrama CMP o WARR de un reflector horizontal, que transforma el radargrama en su equivalente de *offset* nulo. Las hipérbolas de reflexión obtenidas por medida CMP o WARR sobre reflectores horizontales se transforman en líneas horizontales (Figura 2-22). Aplicando el teorema de Pitágoras sobre la Figura 2-19 se obtiene su expresión más simple, ya deducida antes en (2.67)

$$t^2(0) = t^2(x) - \frac{x^2}{v^2},$$

donde v es la velocidad de propagación de la onda en el medio sobre el reflector; $t(x)$ es el tiempo invertido por la onda en su camino de ida y vuelta desde emisor hasta el receptor separados por un *offset* x (tiempo doble); y $t(0)$ el tiempo que se habría invertido en dicho camino de ida y vuelta, si el *offset* fuera nulo (emisor y receptor en el mismo sitio).

La Figura 2-22 muestra la corrección NMO aplicada sobre un radargrama con reflector único, donde puede apreciarse cómo la hipérbola de reflexión obtenida por CMP sobre un plano horizontal queda transformada en una recta horizontal, como correspondería a la medición de *offset* nulo.

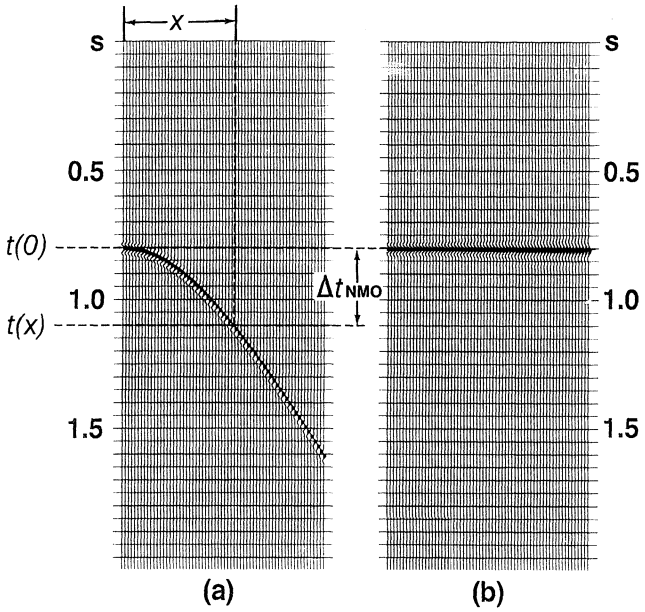

Figura 2-22 Corrección NMO sobre un registro con *offset* no nulo [$t(x)$], obtenido en la reflexión de un plano horizontal en medición CMP o WARR, para convertirlo en tiempo de trayecto para *offset* nulo [$t(0)$]. a) antes, y b) después de la corrección NMO (Yilmaz, 1987, Fig. 3-6).

La corrección NMO se determina mediante la diferencia entre estos tiempos, obteniéndose

$$\Delta t_{NMO} = t(x) - t(0) = t(0)\left[\sqrt{1+\left(\frac{x}{vt(0)}\right)^2} - 1\right]. \tag{2.69}$$

Nótese que la profundidad del reflector es $h = v\,t(0)\,/\,2$. Así, esta corrección es mayor cuanto mayor sea el *offset*, y disminuye con la profundidad, al igual que se hace menor si se produce en un medio en el que la velocidad de propagación sea elevada.

Para *offset* pequeños (inferiores a la profundidad del reflector) esta expresión puede aproximarse por

$$\Delta t_{NMO} \approx \frac{x^2}{v^2 t(0)}, \tag{2.70}$$

obtenida despreciando los términos de orden superior en el desarrollo del binomio obtenido de la raíz cuadrada anterior. En ésta queda más explícita su dependencia con el *offset*, la profundidad ($h = v\,t(0)\,/\,2$) y la velocidad.

En la Figura 2-23 se observa el efecto de la corrección descrita por la ecuación (2.69) sobre una reflexión individual. En el panel a se muestra la reflexión sin corrección alguna, que es corregida en el b utilizando la velocidad adecuada, obteniendo la alineación horizontal deseada para su posterior reagrupación. Sin embargo, en los paneles c y d se han utilizado velocidades baja y alta respectivamente. Nótese que velocidades excesivas generan correcciones insuficientes (*undercorrection*), obteniéndose el efecto recíproco al utilizar velocidades demasiado bajas (*overcorrection*).

Estos efectos pueden utilizarse para calcular la velocidad de propagación de la onda en el medio (§4.1).

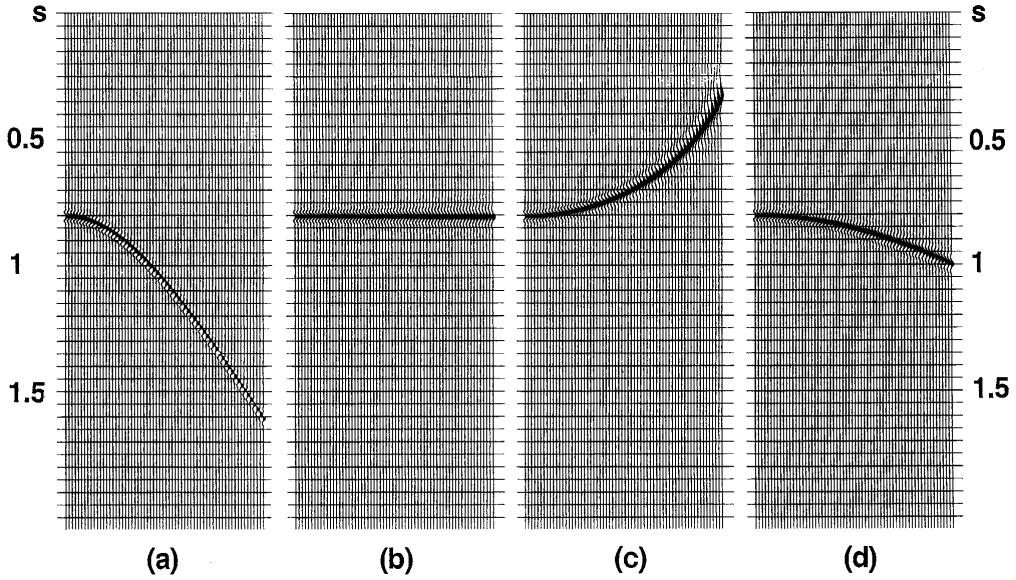

Figura 2-23 Corrección NMO con la ecuación (2.69).
a) reflexión individual, sin corrección NMO.
b) corrección con la velocidad correcta.
c) corrección con velocidad escasa (*overcorrection*).
d) corrección con velocidad excesiva (*undercorrection*).
(Yilmaz, 1987, Fig. 3-8).

La corrección NMO con correcciones para reflectores no horizontales se conoce también como DMO (*dip moveout*). Para expresiones más complicadas de la corrección NMO, que contemplen los efectos de las variaciones de la velocidad en el medio, la estratificación en el mismo, la pendiente de los reflectores, etc, puede consultarse Yilmaz, 1987, §3.2.

La corrección NMO, como se ha indicado, se corresponde con la corrección dinámica precisada para un registro CMP o WARR. Por su parte, en un registro de *offset* común debe realizarse una corrección dinámica basada en el mismo principio, aunque ésta debe aplicarse en diferente manera, para

adaptarse a las características de un radargrama de *offset* común. Si de un registro mediante CMP o WARR se obtiene un radargrama en el que el eje *X* representa el *offset*, que crece de traza en traza, en un radargrama obtenido con *offset* común, el *offset* es una constante a lo largo de todo el perfil y el eje *X* sólo representa el desplazamiento del georradar sobre el terreno. Si en un perfil CMP la corrección NMO crece con *x* de izquierda a derecha (Figura 2-22), en un perfil de *offset* común la corrección sólo varía con la profundidad, afectando fundamentalmente a los eventos más superficiales. La Figura 2-24 muestra el efecto de la corrección dinámica, acortando los tiempos en las reflexiones más superficiales. Los puntos A y B muestran objetos situados a una profundidad cercana al valor del *offset*. Aquellos puntos más superficiales sufren una elevación local, sin perjuicio de que los puntos más profundos, como C, permanezcan en el mismo lugar.

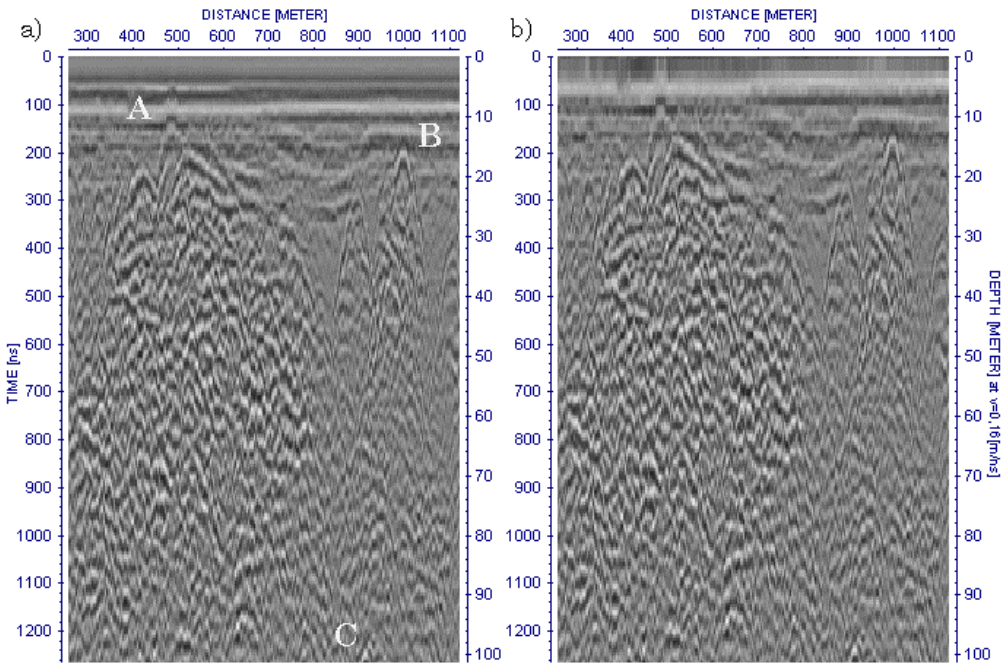

Figura 2-24 Aplicación de la corrección dinámica sobre un perfil en *offset* común de 14m. a) antes y b) después de la corrección. Los puntos A y B muestran la mayor corrección en superficie respecto al punto C, cuya corrección, a 100m, es despreciable.

2.2.3 Corrección del desplazamiento DC

Habitualmente los datos de georradar presentan una componente continua, conocida como desplazamiento DC (*DC shift*). La saturación que produce la gran amplitud de las ondas directa y aérea recibidas genera una ondulación (*wow*) a lo largo de cada traza, que decae lentamente (Figura 2-25). Esto aporta al espectro de la traza una componente de baja frecuencia, adicional a la continua[28], que habrá que eliminar con ella como paso previo a su procesado.

Existen distintos métodos para eliminar el desplazamiento DC. Pueden utilizarse unos u otros, dependiendo de los problemas que presenten las trazas del registro que se necesite procesar.

Puede substraerse en cada muestra de cada traza la media calculada en una ventana temporal determinada y fija de la misma (puede ser toda la traza). Esto es útil en registros que presenten un desplazamiento constante (DC) del origen de amplitudes a lo largo de toda la traza, varíe o no de traza en traza.

En caso contrario, existiendo variaciones en la componente continua (*wow*), se propone bien la substracción en cada muestra de cada traza del valor medio calculado sobre una ventana temporal móvil de la misma (*de-wowing* o *dewow*), o bien el filtrado de paso alto. Ambas técnicas eliminan tanto la componente continua como la de baja frecuencia.

[28] Se habla de DC variable, aunque sean conceptos teóricamente contradictorios.

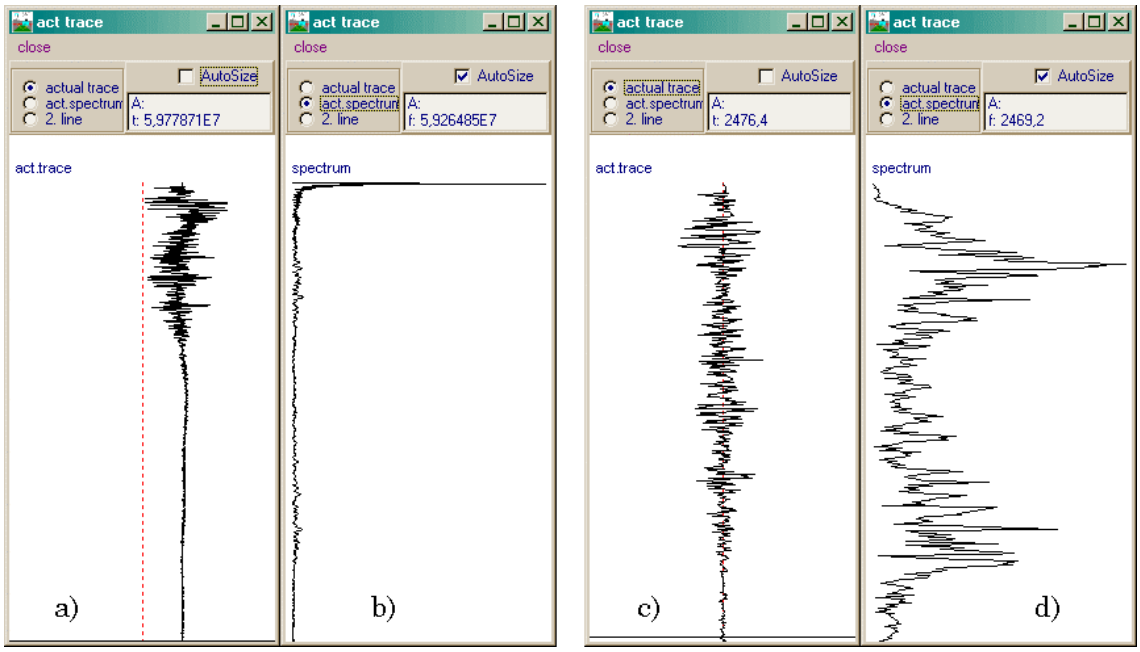

Figura 2-25 a) Traza según es importada. b) Espectro de la misma.
c) Traza tras filtro *dewow*. d) Espectro de la misma.

Puede apreciarse en estas imágenes la componente continua existente en una traza registrada por el georradar. La línea de puntos de la Figura 2-25a representa la amplitud nula (tiempo en el eje vertical), y las amplitudes positivas se representan a su derecha. También puede apreciarse en la misma figura la ondulación de baja frecuencia (*wow*) que decae en el tiempo. La Figura 2-25b representa el espectro de la traza seleccionada (amplitud en eje horizontal, positivo a la derecha, y frecuencias en el eje vertical, positivo hacia abajo), donde se puede apreciar la gran componente continua, en su origen, que perturba la escala de amplitudes del resto, dado que la amplitud de esta representación está normalizada con su valor máximo.

La Figura 2-25c muestra la misma traza, tras eliminar su componente continua con un filtro *dewow*, y tras recortar y reescalar su longitud (temporal). La Figura 2-25d muestra su espectro. Se aprecia en ambas la eliminación de los efectos antes mencionados.

2.2.4 Filtrado

El propósito del filtrado consiste en eliminar del radargrama todo el ruido posible. El filtro debe conservar el margen de frecuencias donde la señal domina, optimizando la relación señal-ruido.

De forma genérica puede realizarse una clasificación de los filtros en filtros unidimensionales y filtros bidimensionales.

Los filtros unidimensionales (1D) se aplican sobre cada traza de manera individual, si bien realizando en todas ellas la misma operación. Son, por tanto, filtros que afectan exclusivamente a la dimensión vertical. Son filtros 1D los filtros de paso bajo, los de paso alto, los de paso banda, los de banda eliminada, los filtros en peine, etc. Es habitual disponer de filtros como el de Butterworth y filtros de paso bajo realizados promediando muestras, o por definición de sus frecuencias de corte, etc.

Pero existe también el filtrado bidimensional (2D), *i.e.*, filtrado en las dimensiones horizontal y vertical. Habitualmente también se sitúan dentro de este grupo los filtros que sólo afectan a la dimensión horizontal. Resulta muy útil el filtrado de paso alto horizontal, con el que se elimina del radargrama aquello que resulte común a todas las trazas, y pueda ser considerado ruido sistemático, ya provenga del propio georradar, de las ondas aérea y directa, etc. Esto se realiza mediante la sustracción de la traza media de todo el perfil (*background removal*), o de una ventana espacial (*subtracting average*). Este filtro 2D tiene el riesgo de eliminar de la imagen los reflectores horizontales, debiendo evaluarse su uso y parametrización en cada caso. En la Figura 2-26 se muestra un radargrama registrado el 25 de julio de 2003 en la línea denominada C1-C4-C6 del glaciar Hansbreen (Hornsund, Spitsbergen), antes y después de aplicar un filtro horizontal que resta de cada traza el promedio de las 50 trazas más cercanas, en los primeros 1100 ns.

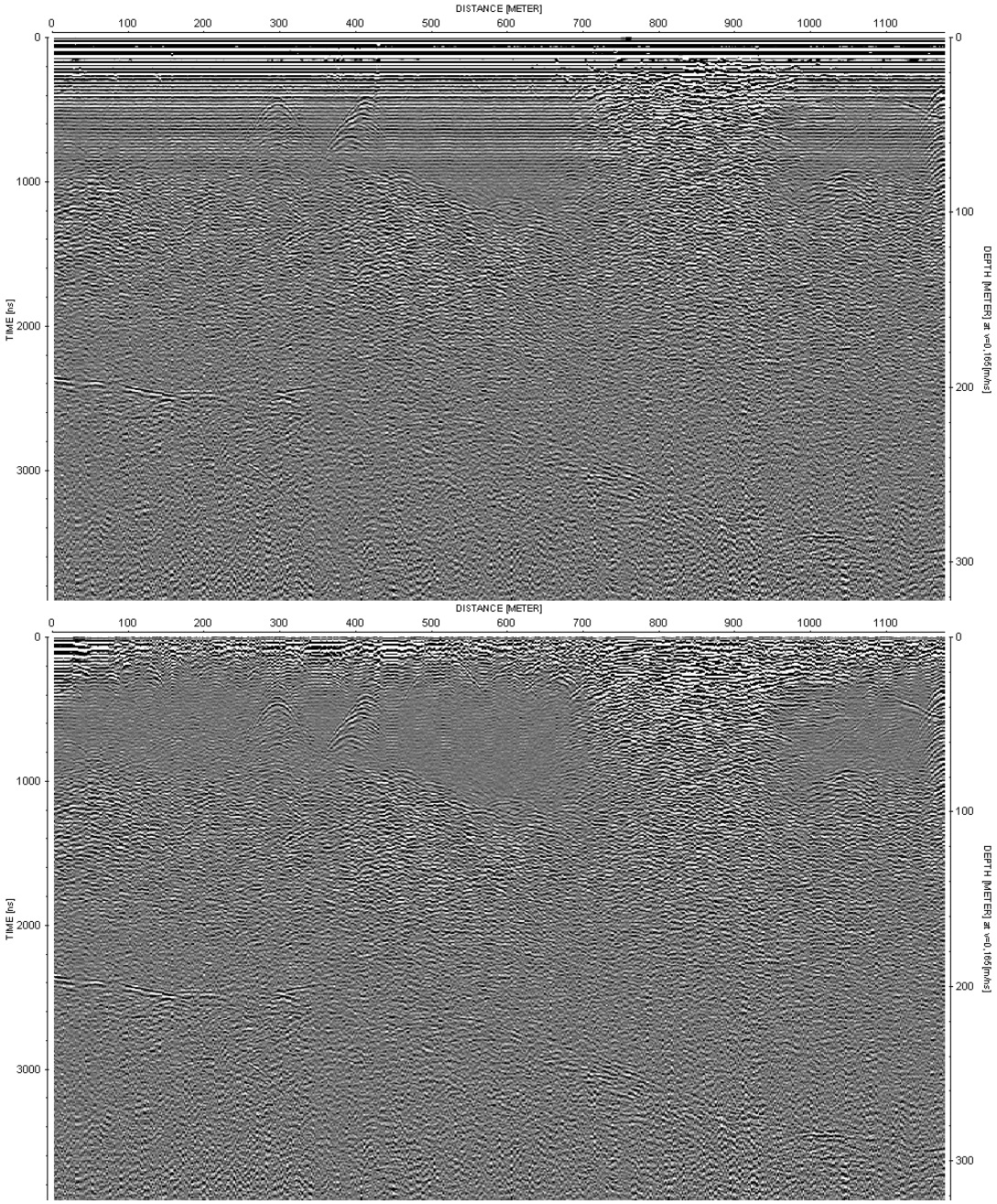

Figura 2-26 Radargrama de Hansbreen antes (arriba) y después (abajo) de realizar un filtrado horizontal mediante *subtracting average*, realizando promediado de cada 50 trazas, hasta una profundidad de 1100 ns.

2.2.5 Ganancia

El pulso transmitido se atenúa y sufre los efectos de divergencia esférica según atraviesa el subsuelo; es necesario aplicar una ganancia a los datos, de modo que restablezca las amplitudes en función de la profundidad. De este modo, además se consigue que la amplitud de las ondas de interés (ondas reflejadas en objetos profundos y lecho) aumente respecto a las más superficiales (onda aérea, onda directa). Los tipos más usuales de ganancia son: AGC (*automatic gain control*) y la ganancia exponencial en tiempo.

La ganancia AGC pretende restablecer un valor cuadrático medio (rms - *root mean square*) a lo largo de la traza, aumentando así la amplitud de las señales más débiles. Para ello se establece un ancho de ventana, sobre la que se calcula la media cuadrática rms, con la que se obtiene el valor de la ganancia de una muestra concreta de la ventana (digamos la *n*-ésima) como el cociente entre las medias cuadráticas local y global. Esta ventana se desplaza a la siguiente muestra repitiendo el proceso, para realizar así el cálculo en cada muestra de la traza.

La ganancia exponencial multiplica la amplitud por un factor que crece exponencialmente con el tiempo del trayecto:

$$A'_i = A_i \, e^{a \cdot t_i} , \tag{2.71}$$

donde:

A'_i es la amplitud corregida de la muestra *i*-ésima,

A_i es la amplitud original de la muestra *i*-ésima,

t_i es el tiempo correspondiente a la muestra *i*-ésima,

a es el coeficiente de corrección exponencial de la ganancia.

2.2.6 Deconvolución

La deconvolución (*deconvolution*) de los registros se utiliza para incrementar su resolución vertical (dimensión temporal, posteriormente transformada en espacial) comprimiendo en las trazas la forma de onda del pulso emitido (*wavelet*). Idealmente se busca que cada reflexión o difracción aparezca en la traza en forma de pulso instantáneo (*spike*), si bien esto resulta utópico.

La respuesta $h(t)$ que un sistema genera al ser excitado mediante un impulso instantáneo $\delta(t)$ (*spike*) se conoce como respuesta del sistema al impulso. En un glaciar donde puedan considerarse reflectores y difractores discretos, la respuesta al impulso $h(t)$ toma la forma de una sucesión de pulsos, a la que se denomina secuencia reflectiva del subsuelo. Al excitar un sistema lineal e invariante en el tiempo mediante una señal de entrada $x(t)$, su respuesta es otra señal de salida $y(t)$, que es además la convolución de $x(t)$ con $h(t)$

$$y(t) = x(t)*h(t). \tag{2.72}$$

La deconvolución es la operación inversa, por la que a partir de las señales de entrada $x(t)$ y de salida $y(t)$, conocidas, se obtiene la respuesta al impulso $h(t)$ del sistema[29].

El sistema compuesto por el glaciar y el receptor del georradar no es lineal[30], y además el GPR no genera un pulso instantáneo $\delta(t)$, sino un monopulso $x(t)$, dando como resultado una señal registrada $y(t)$, no coincidente con la secuencia reflectiva $h(t)$. En la práctica el monopulso emitido suele presentar una forma de onda con reverberación (varios máximos relativos). En $y(t)$ aparecerá,

[29] También lo es la obtención de $x(t)$ a partir de $y(t)$ y $h(t)$, pero no es el caso que nos ocupa.

[30] Además de las no linealidades que impone el subsuelo, es frecuente la presencia de un amplificador logarítmico para incrementar la relación señal-ruido y poder registrar los valores recibidos.

asociada a cada reflexión, esa misma secuencia de máximos relativos (imágenes fantasma), con la pérdida de resolución vertical asociada. El objetivo del procesado del perfil de georradar es conseguir la secuencia reflectiva del subsuelo, por ser la de máxima resolución vertical.

Idealmente, esto no debería suponer un problema. Como se ha indicado, la secuencia reflectiva $h(t)$ buscada podría obtenerse a partir de la señal registrada $y(t)$, realizando la deconvolución con la señal de excitación del sistema $x(t)$. Este tipo de deconvolución se conoce como deconvolución determinística o filtro inverso. Puede realizarse por diferentes métodos, uno de los cuales (filtro inverso) se reduce a un filtrado de cuya aplicación sobre el registro $y(t)$ se obtenga la respuesta al impulso buscada. Sin embargo, para que la deconvolución determinística funcione correctamente, es preciso conocer la señal de excitación $x(t)$, *i.e.*, la forma de onda del pulso emitido. Además, el glaciar debe comportarse como un sistema lineal e invariante en el tiempo, y el receptor del GPR no debe modificar estas características. Pero habitualmente se desconoce la señal $x(t)$, lo que imposibilita la realización de la deconvolución determinística.

A pesar de ello, existen soluciones aproximadas para la deconvolución por métodos estadísticos, englobados bajo el nombre de deconvolución estadística o deconvolución predictiva, que extraen del propio registro de trazas los datos necesarios sobre la forma de onda del pulso. La deconvolución predictiva presupone la impredecibilidad de la secuencia reflectiva, asunción que conlleva que la autocorrelación de la traza se corresponda con la del pulso emitido, por lo que, aun sin conocer el pulso, pueda obtenerse de la traza la información necesaria sobre él.

Estas soluciones se fundamentan en la teoría de los filtros de Wiener, basados en el criterio de mínimos cuadrados, y convierten la señal registrada $y(t)$ en su

deconvolución $z(t)$, que será una aproximación a la secuencia reflectiva del glaciar, $h(t)$. El funcionamiento de la deconvolución predictiva consiste en separar, a partir de la información del pulso, la parte de la señal registrada que es predecible (*e.g.*, formas de onda del pulso y reflexiones múltiples) de la impredecible y buscada (*e.g.*, secuencia reflectiva del glaciar y ruido blanco). Esto se realiza extrayendo de la señal una predicción de la misma desplazada un tiempo α, denominado retardo o distancia de predicción (*prediction lag*). El valor de este retardo debe ajustarse para que la predicción resulte efectiva. Las primeras α muestras de cada forma de pulso no pueden ser canceladas, por lo que este retardo en la predicción provoca que cada reflexión se transforme en un pulso de duración α. El intervalo de predicción es un parámetro cuyo valor mínimo es la unidad, caso que toma el nombre de deconvolución impulsiva (*spiking deconvolution*[31]), en referencia a la obtención de pulsos de duración unitaria. En consecuencia, la deconvolución impulsiva pretende obtener como salida la secuencia reflectiva, *i.e.*, $z(t) = h(t)$. También se aplica esta denominación a la deconvolución determinística, pero dado que ésta no suele utilizarse en el procesado de datos de georradar o sísmicos, se reserva la denominación de impulsiva para su equivalente estadística.

En la práctica, la deconvolución impulsiva presenta problemas a la hora de interpretar sus resultados, debido a la aparición de componentes de ruido de alta frecuencia. El filtro inverso que lleva implícita la deconvolución predictiva y que se hace efectivo en la impulsiva ($\alpha = 1$), se corresponde con aquél cuyo espectro en frecuencia es el inverso del espectro del pulso, de modo que de su convolución mutua resulte la función $\delta(t)$. Pero esto supone que debido a los ceros del espectro del pulso se produzcan inestabilidades, que se resuelven

[31] Hay autores que nombran la deconvolución predictiva con retardo superior a la unidad como *gap deconvolution* (*e.g.*, Robinson, 1998).

añadiendo a la señal un porcentaje de ruido blanco (preblanqueado o *prewhiteninig*), que resulte despreciable salvo en la proximidad de los ceros, típicamente del 0'1% al 1% (Yilmaz, 1987, §2.7.3).

Sin embargo, la deconvolución predictiva de retardo α no unitario no pretende exactamente la secuencia reflectiva. Su objetivo es aproximarse a ella acortando las formas de onda de entrada de duración arbitraria, para obtener a su salida formas de onda de duración α. El interés que puede presentar el aumento de la duración de los pulsos de salida radica en la mayor aparición de ruido de alta frecuencia cuanto menor sea el valor del retardo (más cercano a la unidad). Por ello, debe elegirse α de modo que se consiga un compromiso entre la contracción de las formas de onda y la relación señal-ruido en las trazas obtenidas tras la deconvolución. Un criterio para conseguir este compromiso consiste en utilizar un valor de α cercano al del segundo paso por cero en la función de autocorrelación de la onda (*i.e.*, del radargrama).

Debido a que la deconvolución predictiva se realiza mediante un filtro de duración finita, la longitud de este filtro, n, es otro parámetro fundamental (*filter length*). Su cálculo se realiza experimentalmente mediante prueba y error en cada caso, para lo que es de gran ayuda el cálculo de la función de autocorrelación de la señal. Una vez que estén elegidos los parámetros α (la distancia de predicción) y n (la longitud del filtro), la energía predecible (*i.e.*, repetitiva) con períodos entre α y $\alpha + n - 1$ muestras tenderán a ser eliminadas y, consecuentemente, la autocorrelación de la salida tenderá a anularse entre estos mismos valores.

Pero esto se consigue si y sólo si la forma de onda es de fase mínima (*minimum phase* o *minimum delay*), *i.e.*, si la energía de la forma de onda del pulso está concentrada en su origen, cosa no habitual en el georradar. Sin embargo,

existen métodos para que la deconvolución predictiva resulte efectiva incluso aunque el pulso no sea de fase mínima (Robinson, 1998).

En cualquier caso, la deconvolución se utiliza para transformar $y(t)$, con la intención de que se asemeje a la secuencia reflectiva $h(t)$ y por tanto, tiende a incrementar la resolución vertical de la traza. Sin embargo, no siempre resulta positivo el uso de la deconvolución. Son muchos los motivos para ello, algunos de los cuales ya se han apuntado, como son el desconocimiento real del pulso, la no linealidad del sistema (incluidas las ganancias no lineales aplicadas por el receptor para restablecer una señal que decae rápidamente) y la existencia de requisitos de fase mínima y estacionariedad en el pulso para la deconvolución predictiva, que habitualmente no se cumplen en el georradar. En la práctica, debe probarse con cada perfil, valorando en cada caso el beneficio o perjuicio que supone el uso de los diferentes tipos posibles de deconvolución.

En la Figura 3-30 (§3.2.3.10) se puede observar el efecto producido por una deconvolución. Puede verse a continuación un detalle de la misma en la Figura 3-31. Obsérvese la compresión de la forma de onda del pulso en la reflexión y el incremento en la resolución vertical que esto supone. Esta mayor resolución ejerce en la imagen un efecto de enfoque o de aumento de la nitidez, si bien con ella aparece ruido de alta frecuencia, que debe ser eliminado posteriormente mediante un filtro que limpie de parásitos la imagen obtenida.

Existe gran variedad de propuestas para conseguir una deconvolución que resulte eficaz al aplicarla sobre radargramas. Para mayor detalle pueden

consultarse autores como Proakis y Manolakis (1998, §4.6 y §8.5.3), que analizan los fundamento teórico; Peacock y Treitel (1969), que detallan tanto el fundamento teórico como las propuestas prácticas de la deconvolución predictiva en el procesado de sismogramas; Yilmaz (1987, cap. 2 y Apéndice A), donde se profundiza en la teoría y forma de aplicación para sísmica o georradar; Turner (1994), que estudia el efecto sobre la deconvolución de la atenuación selectiva en frecuencia de la onda en su propagación y propone un método para compensarlo; Robinson (1998), Wood (1999), o Røsten y Haugen (2001), que desarrollan métodos para una deconvolución eficaz aun cuando el pulso no sea de fase mínima; Xia *et al.* (2003), que propone la medición de la forma de onda del pulso por vía directa, para posibilitar su posterior deconvolución determinística; etc.

Para obtener más fuentes de información puede consultarse Treitel (2001), que realiza un recorrido por los métodos deconvolutivos del pasado y delpresente, así como sus perspectivas de futuro, donde se apuntan numerosas referencias adicionales.

2.2.7 Análisis de la velocidad

La velocidad de propagación de la onda en el subsuelo no es una constante. El análisis de la velocidad (*velocity analysis*) es un procedimiento para el cálculo de su ley de variación. La velocidad de propagación de la onda se precisa para gran número de técnicas de procesado, que necesitan de su análisis previo.

La obtención de la velocidad de las ondas electromagnéticas en el hielo puede realizarse por diversos métodos (Macheret *et al.*, 1993): realizando un perfil en las cercanías de un pozo perforado hasta el lecho; mediante un sondeo electromagnético en un pozo; por técnicas de transiluminación; por métodos WARR o CMP, o a partir de los tiempos de llegada de las hipérbolas de difracción.

El análisis de velocidad es esencial para realizar la migración (como se expone en 2.2.8) y, por supuesto, para la conversión a profundidades de secciones en el dominio del tiempo.

En §4.1 se amplía el contenido de este apartado y se estudian técnicas para la realización de los diferentes tipos de análisis de velocidad.

2.2.8 Migración

Su propio nombre hace referencia al desplazamiento espacial. La migración (*migration*) es una operación de inversión que reajusta las posiciones de los elementos del radargrama, para que las reflexiones y difracciones se trasladen a su posición real, incrementando la resolución espacial.

La migración sirve para corregir las distorsiones geométricas inherentes al propio método de sondeo, que ya han sido expuestas en §2.1.14, haciendo que el radargrama sea fiel imagen del subsuelo. Una vez realizada la migración, la longitud de los reflectores vuelve a acortarse, su buzamiento aumenta hacia su valor real y las reflexiones se trasladan, regresando hacia profundidades (tiempos) menores. Además, las hipérbolas de difracción se reducen idealmente a un punto en la posición del difractor, y las figuras en forma de corbata de lazo se transforman en líneas continuas curvadas, representando los sinclinales que las generaron.

En general, los algoritmos de migración realizan su inversión sobre la ecuación escalar de ondas, en los ejes horizontal del perfil (x) y de profundidad (z, positivo descendente), a lo largo del tiempo (t)

$$\frac{\partial^2 E(x,z,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E(x,z,t)}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 E(x,z,t)}{\partial t^2} = 0 . \qquad (2.73)$$

Existen multitud de algoritmos que realizan la migración a partir de la ecuación de ondas para devolver los puntos a sus posiciones originales. La diferencia entre uno y otro algoritmo se encuentra en el método utilizado para conseguirlo.

El algoritmo más simple es el reagrupamiento de la difracción[32] (*diffraction stack*), que en cada punto realiza la suma de los que se encuentran a lo largo de una hipérbola en el radargrama, reagrupando así las muestras que forman las hipérbolas de difracción en la posición de su vértice (ecuación (2.66)). La migración de Kirchoff utiliza también la solución integral de la ecuación de ondas pero pondera las sumas a lo largo de hipérbolas en cada punto del perfil (*e.g.*, Yilmaz, 1987, p. 252-259). Ambas son conocidas también como migraciones de difracción.

Las migraciones por diferencias finitas (FD), realizadas por extrapolación descendente del frente de ondas, se basan en el principio del reflector radiante, y deben su origen a Claerbout, que ya en 1970 ofrece la primera migración a través de la ecuación conocida como de 15º (*e.g.*, Claerbout *et al.*, 1996, §4.1), por la limitación que tiene para migrar pendientes superiores. Existen métodos de migración por diferencias finitas implícitas (Claerbout *et al.*, 1996), y explícitas (Holberg, 1988; Hale, 1991). También se conocen como migraciones en el dominio del tiempo o migraciones de la ecuación de ondas.

Utilizando estos mismos principios, se han desarrollado múltiples métodos que implementan la migración en el dominio frecuencia-número de onda (F-K) mediante la transformada de Fourier de las trazas, y que globalmente se conocen como migraciones de Fourier. Éstos se fundamentan en que la extrapolación descendente se convierte en un desplazamiento de la fase en el dominio F-K. Son migraciones de este tipo la migración de Stolt, conocida también como migración F-K (Stolt, 1978); la migración por desplazamiento de fase (*phase shift migration*), o de Gazdag (Gazdag, 1978); o su posterior mejora, la migración por desplazamiento de fase seguida de interpolación (*phase shift*

[32] Puede utilizarse además el término reagrupación hiperbólica, aunque éste se usa también para referirse a la reagrupación de las reflexiones en el procesado de CMP.

plus interpolation), que afronta las variaciones laterales de la velocidad (Gazdag y Sguazzero, 1984); o su alternativa ante dichas variaciones, la migración de Fourier de paso dividido (*split-step Fourier migration*), que genera la extrapolación en dos pasos, uno con velocidad constante y el otro como perturbación en dicha velocidad (Sena *et al.*, 2003; Stoffa *et al.*, 1990); o la migración de Fourier de diferencias finitas (Ristow y Rühl, 1994), que nace como modificación del anterior, y resulta un híbrido con el de diferencias finitas implícitas; la migración por inversión temporal (*reverse time migration*), que realiza los cálculos retrocediendo en el tiempo, partiendo de la última muestra del radargrama temporal, hasta el tiempo cero, en que se obtiene finalmente la sección migrada (Baysal *et al.*, 1983); etc.

Yilmaz (1987) presenta desarrollos y aplicaciones de los principales métodos de migración, cuyos fundamentos son prolijamente desarrollados por Scales (1994), por Claerbout *et al.* (1996) y por Claerbout y Black (2001). Chun y Jacewitz (1981) desarrollan los principios de la migración en el dominio de la frecuencia. El fundamento matemático más riguroso lo aporta Bleistein *et al.* (2001).

La elección de uno u otro algoritmo depende del tipo de estructura de que se trate. La migración de Kirchoff permite resolver estructuras con buzamiento de hasta 90º, pero no es recomendable cuando existan fuertes variaciones laterales de velocidad. Lo mismo ocurre con los algoritmos en el dominio F-K, si bien algunos admiten dichas variaciones (*e.g.*, Gazdag y Sguazzero, 1984; Sena *et al.*, 2003; Stoffa *et al.*, 1990). El algoritmo basado en la resolución de la ecuación de ondas por diferencias finitas permite emplear distribuciones de

velocidad con grandes variaciones; sin embargo, presenta problemas cuando existen reflectores de elevado buzamiento.

La efectividad de cada algoritmo depende de la adecuada elección de sus parámetros. Cada método tiene sus parámetros específicos, si bien todos comparten la necesidad de un correcto conocimiento de la velocidad de propagación de la onda en el subsuelo. El parámetro crítico para el algoritmo de Kirchoff es la apertura, *i.e.*, el número de trazas adyacentes con las que se realiza la suma. Los métodos de diferencias finitas dependen del incremento de z elegido para realizar la extrapolación descendente del frente de ondas. El parámetro crítico en la aplicación del algoritmo F-K, o de Stolt, es un factor de compresión o expansión, teóricamente entre 0 y 2, al transformar la escala vertical, antes de pasar al dominio F-K (*e.g.*, Yilmaz, 1987, p. 298).

Los datos de los perfiles 2D obtenidos mediante georradar no son los idóneos para obtener la ley de variación de la velocidad de propagación en el subsuelo, ya que en ellos suele utilizarse la técnica de registro de *offset* común, que es de cobertura única. Suelen complementarse, por ello, con algún estudio realizado por técnicas de cobertura múltiple (*i.e.*, CMP o WARR), a partir de los cuales se puede obtener más detalle del perfil de velocidad. A pesar de ello, resulta útil realizar el proceso de migración realimentado de forma iterativa e interactiva. Esto es, efectuando múltiples migraciones, y utilizando de forma progresiva el resultado de cada una para modificar la ley de variación de la velocidad que utilice la siguiente migración. De esta forma se pretende observar con cuál se obtienen los mejores resultados.

Pero además, una buena migración precisa de unos datos de entrada que cumplan ciertas características. En primer lugar, el perfil debe tener una longitud suficiente como para poder migrar los reflectores a su posición y con su buzamiento real. Asimismo, para que la migración resulte efectiva se necesitan datos con buena relación señal-ruido. También es preciso que la distancia entre las trazas (muestreo espacial) sea suficientemente pequeña como para evitar la aparición del solapamiento espacial de frecuencias en los datos, conocido como *aliasing*, como muestra la Figura 2-27.

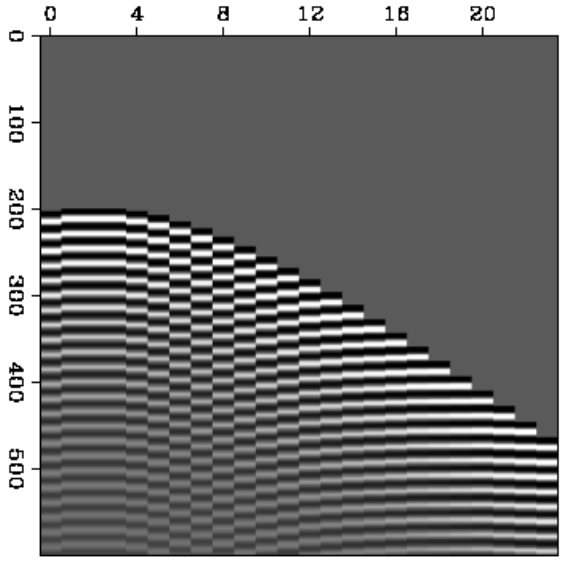

Figura 2-27 Efecto del *aliasing* espacial provocado por un insuficiente muestreo horizontal (Claerbout y Black, 2001).

Si los prerrequisitos de la migración no se cumplen, aparecen errores con formas características en la imagen. La más habitual, con forma de sonrisa (*smile*), se produce por sobremigración (*overmigration*). Las hipérbolas de difracción, abiertas por su parte inferior, se colapsan en puntos tras una migración correcta. Pero un exceso en la velocidad de propagación, o la reagrupación de un número excesivo de trazas, provocan la aparición de sobremigraciones, que se aprecian en la imagen por la aparición de arcos

invertidos sobre los puntos de difracción. Por otro lado, también puede producirse una migración insuficiente (*undermigration*), cuyo efecto es el contrario, *i.e.*, resulta incapaz de colapsar la hipérbola. También esto puede deberse a errores en la velocidad (velocidad menor que la real) o al uso de un algoritmo con limitaciones para resolver el buzamiento del reflector.

Hay que tener en cuenta además, que pueden existir errores derivados del uso de algoritmos de procesado 2D para problemas geológicos 3D, dado que los objetos reflectores y difractores no siempre pertenecen al plano vertical bajo el registro.

En los perfiles realizados por secuencia de registros CMP a lo largo de la línea del perfil, técnica muy utilizada en sísmica, pero no en georradar, la migración se realiza tras reagrupar cada CMP (*poststack migration*). Esto es, tras obtener el perfil de *offset* nulo equivalente. Pero existen algoritmos para realizar la migración antes del reagrupamiento, realizando en un solo paso la migración y la corrección dinámica (*prestack migration*)[33]. De esta forma pueden corregirse de forma conjunta ciertos problemas que se introducen por la existencia de variaciones laterales en la velocidad de propagación. Taner (1999) no duda en recomendar el uso de la migración antes de reagrupar el CMP.

La migración transforma el radargrama para que su imagen se aproxime a la del subsuelo, pero no por ello resulta más sencilla de interpretar. En ocasiones, la imagen antes de realizar la migración resulta más clarificadora que la obtenida tras ésta. Una vez colapsadas, las hipérbolas se transforman en

[33] *Prestack migration = Dynamic correction + Poststack migration*

puntos. Pero las hipérbolas son más fáciles de localizar que los puntos en un radargrama ruidoso, sabiendo que se difractan en su vértice. Ocurre lo mismo con las figuras en forma de corbata de lazo, que son fácilmente identificables y se conoce cómo migran, aunque no es así con los planos inclinados en el lecho.

Las medidas y profundidades del perfil deben tomarse una vez migrado éste, pero, en general, la interpretación de un radargrama debe realizarse teniendo juntos los perfiles anterior y posterior a la migración, para facilitar su análisis. Éste es uno de los motivos por los que la migración suele realizarse en el dominio del tiempo (*time migration*), dejando su transformación a profundidades para un paso posterior.

Pero existen también técnicas de migración en las que el paso a profundidades queda implícito (*depth migration*) y que están basadas en los mismos métodos migratorios antes mencionados. Han (1998) realiza un estudio comparativo de cuatro métodos de migración en profundidades, encontrando gran similitud en sus resultados: la de desplazamiento de fase seguida de interpolación (Gazdag, 1984); la de Fourier de paso dividido (Stoffa *et al.*, 1990); la de diferencias finitas implícitas (Claerbout, 1985); y la de Fourier de diferencias finitas (Ristow y Rühl, 1994).

Una vez finalizado el procesado de un perfil, se obtiene un radargrama que muestra la imagen obtenida del subsuelo, con la profundidad representada como ordenada. Pero puede realizarse una corrección topográfica que desplace verticalmente cada traza, para que la línea que definen sus orígenes siga la superficie del terreno, proporcionando así un diagrama de elevaciones (§2.2.1 y Figura 2-26).

Como se ha expuesto, esta corrección topográfica suele realizarse una vez finalizado el procesado, pero debido a la deformación que implica haber tratado la superficie como un plano horizontal, los resultados de la migración pueden no ser buenos en los casos en que la topografía presenta gradientes superficiales importantes. Por ello, cabe pensar en efectuar la corrección topográfica antes de la migración, para así restablecer previamente las formas de las difracciones. Pero, a pesar de que la corrección premigratoria regenera las formas, el desplazamiento vertical introducido provoca un estrato ficticio de terreno, que se extiende desde el plano horizontal de referencia impuesto sobre la superficie, hasta ésta. Por desgracia, esto introduce también efectos erróneos en el proceso migratorio, al distanciar los elementos de difracción, que son migrados desde una superficie más lejana.

Estos efectos pueden eliminarse si durante la migración se considera nula la velocidad de este estrato (o cercana a cero, para estabilizar el algoritmo migratorio). De esta manera, no se producen efectos migratorios a lo largo de esta capa, comenzando éstos cuando la extrapolación descendente llega a la superficie real de los datos. Esta estrategia de migración, denominada de estrato de velocidad nula (*zero-velocity layer*), genera buenos resultados sobre perfiles con superficie de topografía variable, utilizando para ello métodos de migración convencionales en el dominio F-K (Beasley y Lynn, 1992; Gray, 1997).

Pero también existen métodos específicos de migración que implícitamente consideran la topografía superficial del terreno. Berryhill (1979) propone el método de cambio de referencia de la ecuación de ondas (*wave-equation datuming*), que realiza la extrapolación descendente de los datos, redefiniendo a cada paso la superficie de referencia de tiempo cero para la ecuación de ondas. Lehmann y Green (2000), proponen otro proceso migratorio que incluye la topografía superficial del terreno en sus cálculos, al que denominan

migración topográfica. Este método está basado en el que ya presentó Wiggins (1984), y que supone una variación sobre la migración de Kirchoff, utilizando una plantilla de migración específica para cada punto, cuya forma depende del tiempo de registro, de la velocidad del medio y de la topografía superficial. Sus resultados son de especial interés en presencia de topografías con fuertes gradientes y de escala comparable con la de la profundidad de los reflectores. Esta técnica requiere de una precisa determinación de las coordenadas de registro de las trazas y de las velocidades en el medio.

Puede encontrarse un extenso listado de referencias relativas a la migración topográfica en Lehmann y Green (2000).

2.3 Procesado típico de datos de georradar.

Los pasos para llevar a cabo el procesado típico de datos de georradar utilizando configuración de *offset* común se muestran en la Figura 2-28.

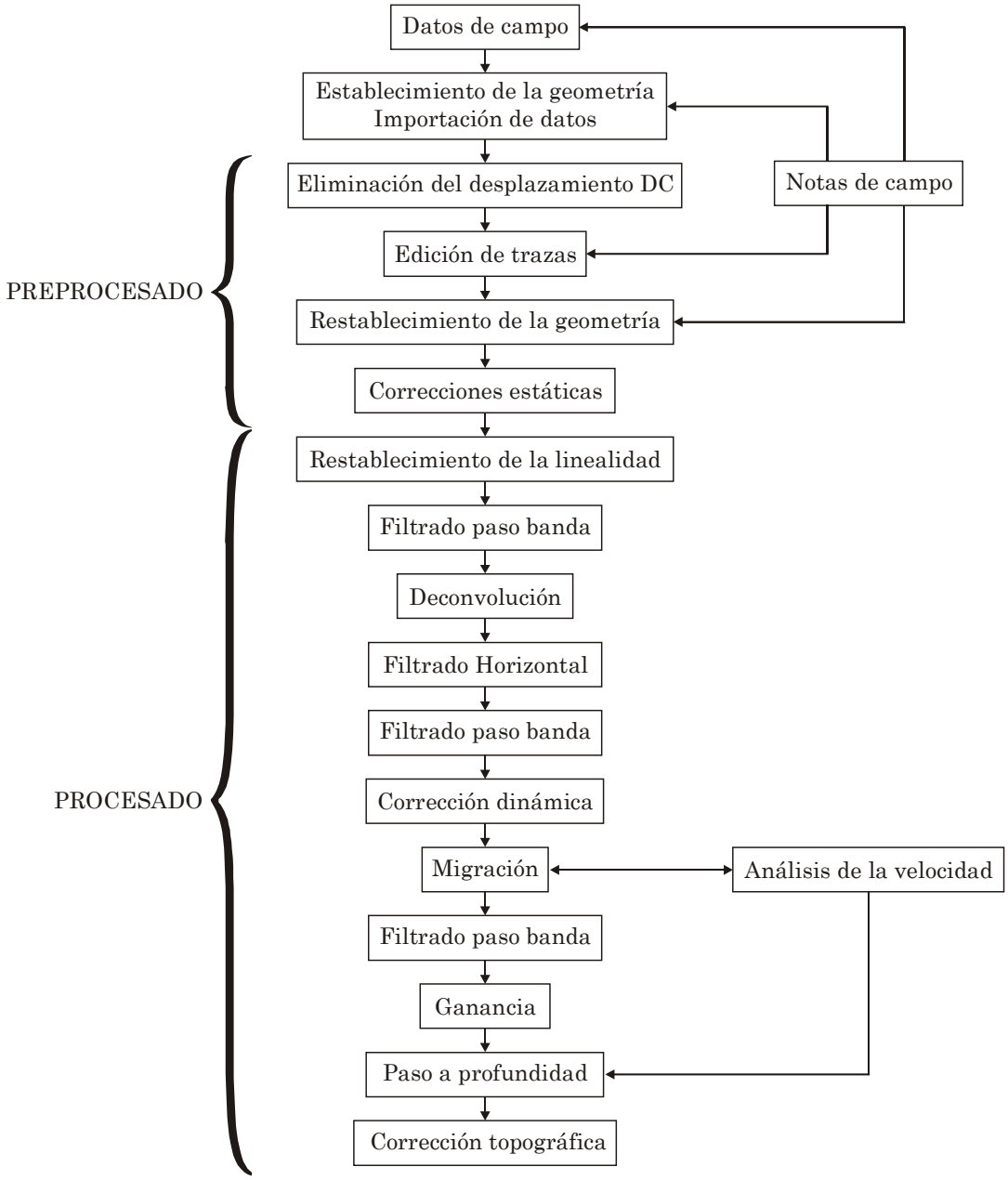

Figura 2-28 Diagrama de flujo típico del procesado de datos de georradar.

La primera parte del procesado consiste en la preparación de los datos y su importación en el programa de procesado. Esto supone el establecimiento de la correspondencia entre las trazas y las coordenadas con las que fueron obtenidos, y entre los ficheros y los perfiles a los que se corresponden, proporcionando así a las trazas la información de la geometría del sondeo realizado. Esta fase se conoce como de definición de la geometría (*geometry setting*). Implica la previsualización de los datos y su comparación con las notas de campo, para observar la ubicación de los datos erróneos, para localizar trazas correspondientes a problemas de medición en campo, etc. En ocasiones el programa de procesado reconoce parte de los datos situados en las cabeceras de los ficheros y de las trazas. El orden y la complejidad del proceso de definición de la geometría e importación de datos depende tanto del formato de los datos que proporcione el georradar, como de las exigencias que establezca el software de procesado utilizado

El programa de procesado realiza la visualización de los datos a través de la amplitud de la señal registrada en las trazas, por lo que el desplazamiento DC que contengan los datos perjudicará a su imagen, pudiendo llegar a ocultarla. Por ello, su eliminación debe ser el primer paso a realizar. La eliminación del desplazamiento DC ha sido presentada y justificada en §2.2.3.

La edición de trazas incluye la interpolación o anulación de las trazas ruidosas, la eliminación de las trazas previas al comienzo de la línea y las posteriores a su finalización, la corrección de la polaridad de las trazas en aquéllas que la tengan invertida, etc.

Tras realizar estos pasos previos puede observarse la necesidad de establecer una nueva secuencia de trazas equidistantes generada a partir de las realmente medidas, que pudieran no serlo. Esto es, restablecer la definición de la geometría del perfil.

En §2.2.1 se ha explicado la necesidad de realizar las correcciones estáticas como parte del preprocesado, para situar los orígenes de las trazas en su lugar, recortarlas, etc.

A partir de este punto puede comenzarse a hablar ya del procesado propiamente dicho. Y lo primero que ha de hacerse es intentar restablecer la linealidad perdida en el sistema, reponiendo las amplitudes de los datos mediante una ganancia, antes de realizar la deconvolución. Esta ganancia debe compensar el efecto de la divergencia del frente de ondas, además de invertir las no linealidades introducidas por el subsuelo y por el georradar (*e.g.*, amplificador logarítmico en el receptor). Simultáneamente, se puede, además, intentar contrarrestar la atenuación que la onda ha sufrido en su propagación, aunque ésta fuera lineal.

A continuación, es conveniente filtrar los datos con un filtro de paso banda que elimine las frecuencias excesivamente altas, y las muy bajas. La banda pasante contendrá la de la señal del georradar. Lo que se pretende es incrementar la relación señal-ruido, por lo que es conveniente visualizar el espectro de la señal antes y después de ser filtrada, para asegurarse de que lo que se elimina es, en su mayor parte, ruido y no señal.

En §2.2.6 se han explicado los beneficios y problemas relacionados con la deconvolución, mediante la que se pretende extraer del radargrama la forma de onda del pulso, incrementando así su resolución vertical.

Antes de aplicar la migración, conviene evaluar la eliminación de las señales parásitas que la deconvolución no haya colapsado. Es frecuente que, unida a la llegada de las ondas aérea y directa, se produzca una saturación en el receptor que provoque ondulaciones (*wow*) en el registro, que no desaparecen

completamente al eliminar el desplazamiento DC. La aplicación de un filtro horizontal puede suprimir estos errores sistemáticos, como se ha explicado en §2.2.4. Pero, además, la deconvolución introduce ruido de alta frecuencia, que será interesante eliminar mediante un nuevo filtrado de paso banda.

Hasta aquí se ha procedido a la limpieza de las señales, para obtener una imagen de mayor resolución. A partir de aquí se procede a la migración, para desplazar los reflectores a sus posiciones y profundidades correctas.

Tras efectuar la deconvolución, pero antes de la migración, es también el momento para realizar las correcciones dinámicas oportunas, que transformen el perfil en el equivalente a uno de *offset* nulo, como se ha indicado en 2.2.2.

Para efectuar la migración, debe elegirse entre los diferentes tipos presentados en 2.2.8. Además, es preciso haber realizado, o realizar simultáneamente, un análisis de la velocidad (introducido en §2.2.7). Probablemente este paso deba realizarse de forma recursiva, obteniendo la migración y el análisis de la velocidad de manera simultánea.

Posteriormente debe evaluarse la necesidad de un nuevo filtrado y elevación de las amplitudes, en función de los resultados obtenidos. Claerbout y Black (2001, §5.2.5) indican que pueden obtenerse malos resultados si antes de la migración se amplifican los datos para su mejor visionado (con AGC o en t^2, por ejemplo). Los flancos de las hipérbolas entran en juego con excesiva fuerza. Recomiendan el uso de una ganancia en $\sqrt{t}$, a continuación realizar la migración, y finalmente volver a aplicar la ganancia que se desee para su correcta visualización.

Utilizando el análisis de velocidades antes obtenido debe convertirse el radargrama migrado en el dominio del tiempo en un perfil de profundidades. El perfil está preparado para realizar en él las medidas de los espesores y de las profundidades. Es preferible realizar la medición de las profundidades sobre un perfil sin corrección topográfica, ya que muestra directamente las profundidades, en lugar de las cotas, como ocurre una vez corregido.

La corrección topográfica suele realizarse al finalizar el procesado, salvo que se haya optado por la migración topográfica, en cuyo caso la corrección es previa, o simultánea a la migración (§2.2.8).

Capítulo 3

Desarrollo de un procedimiento de procesado de datos de georradar mediante ReflexW

En este capítulo se desarrolla un procedimiento para obtener una imagen 2D de un perfil o corte vertical del glaciar (perfil de georradar en tiempo o en profundidad), a partir de los datos adquiridos sobre la superficie del mismo (datos de campo). El desarrollo del procedimiento de procesado aquí presentado se realiza utilizando el software ReflexW. También se justifica en este capítulo su elección y se presentan sus funcionalidades.

La secuencia de pasos del procesado y sus parámetros no deben entenderse como una fórmula. La experiencia de quien efectúa el procesado y las características de los datos determinan los pasos aconsejables y los parámetros idóneos en cada caso concreto.

3.1 Elección del software

En este apartado se realiza un recorrido por el software existente en el mercado para el procesado de datos de georradar. No se incluye en este estudio aquellos programas que se limitan a la adquisición, a la visualización, o a la impresión de los datos. El estudio pretende establecer las características generales de los programas de procesado de datos y finaliza con la elección justificada de uno concreto, ReflexW.

3.1.1 Software disponible

EKKO_View Deluxe

Software desarrollado por la empresa Sensors & Software Inc (Canadá) para procesar los datos de su propio georradar, pulseEKKO, o de Noggin^{plus}, bajo entorno Windows. Está comercialmente estructurado en tres niveles, que abarcan desde la simple visualización e impresión de la imagen utilizando EKKO_View, pasando por su versión ampliada, EKKO_View Enhanced, con capacidad adicional para editar los datos y realizar sencillos procesados, hasta el más potente EKKO_View Deluxe, que es un software para el procesado completo de datos de georradar.

Se complementa con otras utilidades de la misma empresa, como son EKKO_Mapper, utilizado para la detección de elementos y facilitar la creación de mapas; EKKO_3D, herramienta de visualización tridimensional; EKKO_Pointer, que utiliza métodos de reconocimiento de patrones para identificar y localizar de manera semiautomática objetos en el subsuelo explorado (*e.g.*, tuberías); ConquestView, específicamente diseñado para evaluar el estado de subsuelos de hormigón; o EKKO_Image.

RADAN for Windows

Software de procesado de GSSI (Geophysical Survey Systems, Inc., EEUU). Se trata de una completa herramienta de procesado, estructurada en módulos, para su adquisición comercial en función de las diferentes necesidades de procesado e interpretación. Admite datos en los formatos de los sistemas comerciales de georradar más comunes. Su módulo base facilita la visualización, impresión, y exportación de imágenes, filtrado, ganancias, migración, correcciones topográficas, etc. Puede complementarse con otros módulos para su automatización y procesado 3D (*QuickDraw Super 3D Module*), y otro para el estudio de perfiles 2D interactiva y simultáneamente con el del bloque 3D (*Interactive 3D Module*). También existen módulos específicos para la caracterización de subsuelos con infraestructuras, y señalización de objetos sobre los radargramas, tanto bi- como tridimensionales (*Structure Identification Module*, *Advanced Road Structure Assessment Module* y *Bridge Assessment Module*).

Easy 3D

Aplicación de Malå Geoscience (Suecia) bajo entorno Windows. Está destinado a la visualización y procesado de datos del GPR RAMAC (de Malå Geoscience), resultando potente pero específica para sus propios datos. Puede operar con un conjunto de perfiles homogéneos adquiridos por el GPR RAMAC, para obtener bloques 3D. Es complemento de GroundVision (software de adquisición para RAMAC). Incluye visualización, filtrado de datos, generación de secuencias de imágenes, para estudio de movimientos o variaciones, marcación de objetos detectados, etc.

ReflexW

Realizado por Sandmeier Scientific Software (Alemania), es la versión para Windows de su predecesor para DOS, denominado REFLEX. Se trata de una

completa herramienta de procesado. Este programa admite los datos en los formatos propios de las marcas comerciales de GPR, así como SEG-2, SEG-Y, o formatos ASCII, para integrar datos no estándar, e incluso importa imágenes de radargramas. Está estructurado en módulos, para su adquisición en función de los diferentes requisitos de procesado. El módulo básico, conocido como de análisis de datos 2D (*2D analysis module*), cuenta con amplia capacidad de procesamiento, como filtros 1D y 2D, deconvolución, estrategias de interpolación de trazas, ganancias, análisis espectral y migración, corrección topográfica, análisis de la velocidad por adaptación de hipérbolas, etc. Además de procesar paso a paso, admite la generación de secuencias de procesado, para automatizar el proceso en perfiles con características comunes. El módulo de análisis de velocidad en CMP (*CMP velocity analysis*) permite realizar un estudio de la distribución 1D de la velocidad, sobre un conjunto de medida en CMP o WARR, mediante diferentes técnicas de análisis. El módulo 3D está diseñado para procesar e interpretar bloques de datos 3D, con generación de cortes y transparencias. El módulo de modelado permite preparar una estructura ficticia bidimensional del subsuelo, para sobre ella simular la propagación de las ondas (problema directo) mediante diferencias finitas.

Seismic Unix

CWP/SU es un completo conjunto de subrutinas independientes realizadas bajo entorno Unix, desarrollado por Jack Cohen, en el *Center of Wave Phenomena* (CWP, en la *Colorado School of Mines*) y actualmente gestionado por John Stockwell. Su acceso es gratuito (puede descargarse su código completo por Internet desde http://www.cwp.mines.edu/cwpcodes).

Su primer objetivo es educativo, siendo profusamente utilizado tanto por personas en formación, como por profesionales. Aunque las subrutinas que lo

conforman implementan aisladamente cada paso de procesado, pueden agruparse encadenando la salida de una subrutina con la entrada de la siguiente, o formarse con ellas herramientas de procesado mediante la creación de "macros".

Utiliza para los datos un formato propio (SU), si bien contiene conversores a éste desde varios formatos estándar de sísmica (SEG-Y, SEG-D, SEG-2, etc.). Su concepción como herramienta de desarrollo en el entorno del procesado de datos de sísmica deja de la mano del usuario la conversión de los datos, incluso para los formatos de georradar más comerciales, que no son admitidos directamente, debiendo ser convertidos a formato SU (o alguno de los formatos estándar convertibles).

Visual_SUNT

Aplicación basada en Seismic Unix, para uso bajo entorno Windows, creada por Geo2X (Suiza). Importa datos con los formatos comerciales más habituales, además de otros estándares de sísmica (*e.g.*, SEG-2 y SEG-Y).

La versión 6.0 probada es de recursos de procesado limitados, y como software resulta altamente inestable, por lo que no es una herramienta apropiada. Sin embargo, se le presupone un fuerte desarrollo, que lo haga más estable y potente, debido a la gran potencia de Seismic Unix, en el que está basado.

IDS

El software de la compañía italiana IDS se integra modularmente en un entorno de trabajo para adquisición, análisis y procesado de los datos de su propio georradar RIS-2K, o de GSSI. El módulo IDSGrasWin2 se utiliza como software de adquisición de datos y de procesado básico, para el georradar RIS-2K de IDS. El módulo IDSGRED/S, está específicamente

destinado al procesado de datos del georradar, y lo hace en profundidad, pero sólo importa el formato de su georradar RIS-2K, o de los georradar de GSSI.

Puede considerarse el más avanzado del mercado para aplicaciones industriales en detección de tuberías, caracterización de pavimentos, suelos y estructuras. Los módulos IDSGRED/IN (ROAD v5.0, SUBREM y LAYERING) se utilizan para el análisis y detección de elementos en diferentes tipos de estructuras. El módulo IDSGeomap es una herramienta que permite referenciar los datos de campo en entornos de Autocad 2000 o Microstation SE, interrelacionando los resultados del procesado, con diseños CAD en dichos programas. Las secciones interpretadas son automáticamente representadas y calibradas. De gran utilidad en entornos urbanos.

GRADIX

Creado por Interpex Ltd. (EEUU), GRADIX es un potente software de procesado bajo DOS (o ventana DOS desde Windows). Soporta los formatos de datos más habituales e incluso posibilita otros a medida del usuario. Proporciona todas las herramientas necesarias para el procesado.

GPR-IXe Terra

GPR-IXe Terra se presenta como el primer módulo del que será un banco de trabajo geofísico bajo Windows (IXe Terra) de Interpex Ltd. (EEUU). Soporta los formatos de datos comerciales más habituales, además de los formatos estándar SEG-2 y SEG-Y. GPR-IXe Terra admite proyectos de GRADIX, pero no hay compatibilidad en sentido opuesto. Actualmente su funcionalidad es reducida, debido a que es una herramienta en desarrollo, aunque aspira a sustituir a GRADIX.

3.1.2 Elección de ReflexW

La elección del software de procesado se realiza valorando su adaptación a las características que se consideran deseables. El software elegido debe procesar datos de georradar registrados sobre glaciares con diferentes equipos, comerciales o no. Se quiere de él que sea intuitivo, para facilitar su uso por personas que puedan carecer de formación previa en sísmica de reflexión, ni georradar. La estabilidad del software en su entorno de trabajo es un valor fundamental. Es preferible que funcione bajo sistema operativo Windows, debido a que se prevé su uso, tanto en campo como en laboratorio, junto con otros programas bajo dicho entorno. Finalmente, su potencia de procesado debe ser suficiente para completar el procesado de los datos.

El primer requisito plantea la capacidad de importar datos de cualquier marca comercial de GPR, pero también de los georradares no comerciales. Actualmente se dispone de datos obtenidos mediante georradar RAMAC (Malå Geoscience), y de dos georradares no comerciales. Se asume la conveniencia de la transformación del formato de los datos obtenidos por los georradares no comerciales en uno estándar (*e.g.*, SEG-2 ó SEG-Y), por lo que es suficiente que el software se adapte a estos formatos, además de a los comerciales.

Este requisito excluye a Easy3D, que además de no ser un software de procesado potente, es específico de RAMAC. También quedan excluidos por este motivo IDS, y EKKO_View Deluxe.

Seismic Unix es un caso diferente a los demás, por no ser un programa, sino un conjunto de subrutinas, e incluso desde los equipos comerciales es

necesario realizar la conversión de formato de los datos a uno estándar de sísmica (*e.g.*, SEG-Y), para su posterior transformación en SU.

Otro requisito es la estabilidad del software. En este sentido, Visual_SUNT 6.0 se ha demostrado inestable en varios ordenadores, incluso con diferentes versiones del sistema operativo, por lo que queda descartado su uso.

Los entornos de trabajo mediante ventanas resultan intuitivos, cumpliendo las necesidades y ofreciendo interactividad en la elección de los parámetros de cada paso de procesado. Los programas bajo estudio que trabajan con el sistema operativo Windows cumplen estos requisitos. Los únicos que funcionan bajo otros sistemas operativos son GRADIX y Seismic Unix. De éstos, GRADIX sí es una herramienta interactiva, no así Seismic Unix, debido a la ausencia de entorno o estructura como paquete. Este último no resulta una herramienta adecuada para la iniciación en el procesado de georradar de personas sin formación previa en este ámbito. Sin embargo puede ser una potente herramienta para futuros desarrollos.

La posibilidad de utilizar un software bajo Unix imposibilita su operativa simultánea con las demás herramientas de trabajo, tanto en campo como en sobremesa. Por ello resulta preferible la elección de uno que trabaje bajo Windows. Pero si la estabilidad es un requisito *sine qua non*, el entorno de trabajo tan sólo es de interés.

El último requisito, y no en orden de importancia, es la potencia de procesado. GRADIX, SU, RADAN y ReflexW son programas con gran

potencia de procesado. De los otros programas, GPR-IXe Terra no es actualmente tan potente como su predecesor en DOS, GRADIX.

A la vista de todo lo anterior, se ha determinado el uso de ReflexW, como software para el procesado de datos de los georradares RAMAC, VIRL-2a y VIRL-6, dado que cumple con todas las características deseadas.

Se ha preferido ReflexW, frente a RADAN, por su independencia, ya que el fabricante de RADAN (GSSI) es competidor de Malå Geoscience (fabricante del GPR RAMAC).

En cuanto a GRADIX, si bien funciona en entorno de ventanas, y podría hacerlo desde una ventana DOS desde Windows, esta forma de trabajo resulta menos operativa y previsiblemente menos estable que ReflexW. Adicionalmente, el hecho de estar siendo sustituido por su variante GPR-IXe Terra, hace prever su futura desaparición.

Por último, cabe destacar que ReflexW está en Europa (en particular, en Karlsruhe, Alemania).

3.2 Funcionalidades de ReflexW-2D data analysis

ReflexW 3.0 (Sandmeier Software, 2003) es un programa bajo Windows 9x/2000/NT para el procesado de datos sísmicos, acústicos y de georradar.

El programa completo consta de cinco módulos: *2D data analysis, CMP velocity analysis, 3-D data-interpretation, modelling* y *traveltime analysis 2D*. Los cuatro primeros módulos citados están dirigidos tanto a datos sísmicos como acústicos o electromagnéticos. El último de los módulos está exclusivamente destinado al procesado de datos sísmicos y acústicos (refracción sísmica). El procesado de perfiles de georradar obtenido por *offset* común se realiza utilizando únicamente el módulo *2D data-analysis*, si bien para realizar posteriores análisis de velocidad resultará necesario el módulo *CMP velocity analysis*.

Este programa permite el procesado de datos de radar con los siguientes formatos: SEG-Y, SEG-2, SEG-2-RADAR, RADAN, RADAN_ANALOG, RADAN_TAPE, PulseEKKO, RAMAC, EMR, BGREMR, BGRDHU, BGRBHRU, UTSI, IDS, TRS2000, ABEM, BISON-2, OYO8BIT, ASCII-OYO8BIT, ASCIISYNTH, ASCII-3COLUMNS, ASCII-MATRIX, o BITMAP. Además, pueden asociarse desde el sistema operativo al programa ReflexW determinadas extensiones de los ficheros con datos (*e.g.*, rd3, de RAMAC), automatizando así la importación de dichos datos por doble clic.

La ejecución del programa abre una ventana, sobre la que debe activarse el menú desplegable *Modules*, que nos ofrece los módulos que tenemos disponibles. El acceso al módulo *2D data-analysis* a partir de la ventana inicial del programa se presenta en la Figura 3-1.

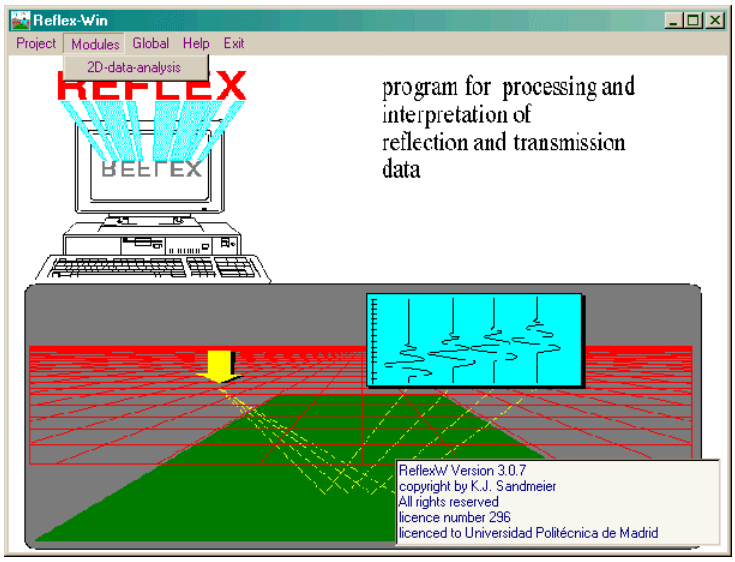

Figura 3-1 Ventana inicial del programa ReflexW 3.0.

En adelante, se utiliza RW3 como simplificación de la referencia al manual de uso del programa ReflexW 3.0 (Sandmeier, 2003).

La Figura 3-2 muestra una ventana correspondiente al módulo *2D data analysis* durante su uso. Bajo el menú principal hay un conjunto de iconos que permiten realizar una serie de funciones (*e.g.*, zoom, cambiar opciones de gráfico) sin necesidad de utilizar el menú principal. Las utilidades a las que puede accederse desde el menú principal (barra superior) y desde cada uno de estos iconos se encuentran resumidas en RW3, p. 67 a 69 y su detalle se encuentra en RW3, cap. 1.

ReflexW tiene una ventana principal, divisible en dos subventanas. Éstas pueden distribuirse verticalmente (como en la figura) u horizontalmente, o también puede mostrarse un solo fichero en la ventana única, dependiendo de las opciones elegidas en *Plot*→*Options* (§3.2.2.4). La superior (izquierda), denominada primaria (*primary*) y la inferior (derecha) o secundaria (*secondary*). El programa ReflexW considera como entrada para cualquier

paso de procesado que se quiera realizar (*e.g.*, filtrado) el fichero presentado en la ventana primaria, utilizando la ventana secundaria para mostrar el resultado del último paso de procesado efectuado. El fichero secundario no puede procesarse, sólo se representa para su comparación con el primario. Además, con esta misma finalidad, se puede colocar cualquier otro fichero en la ventana secundaria.

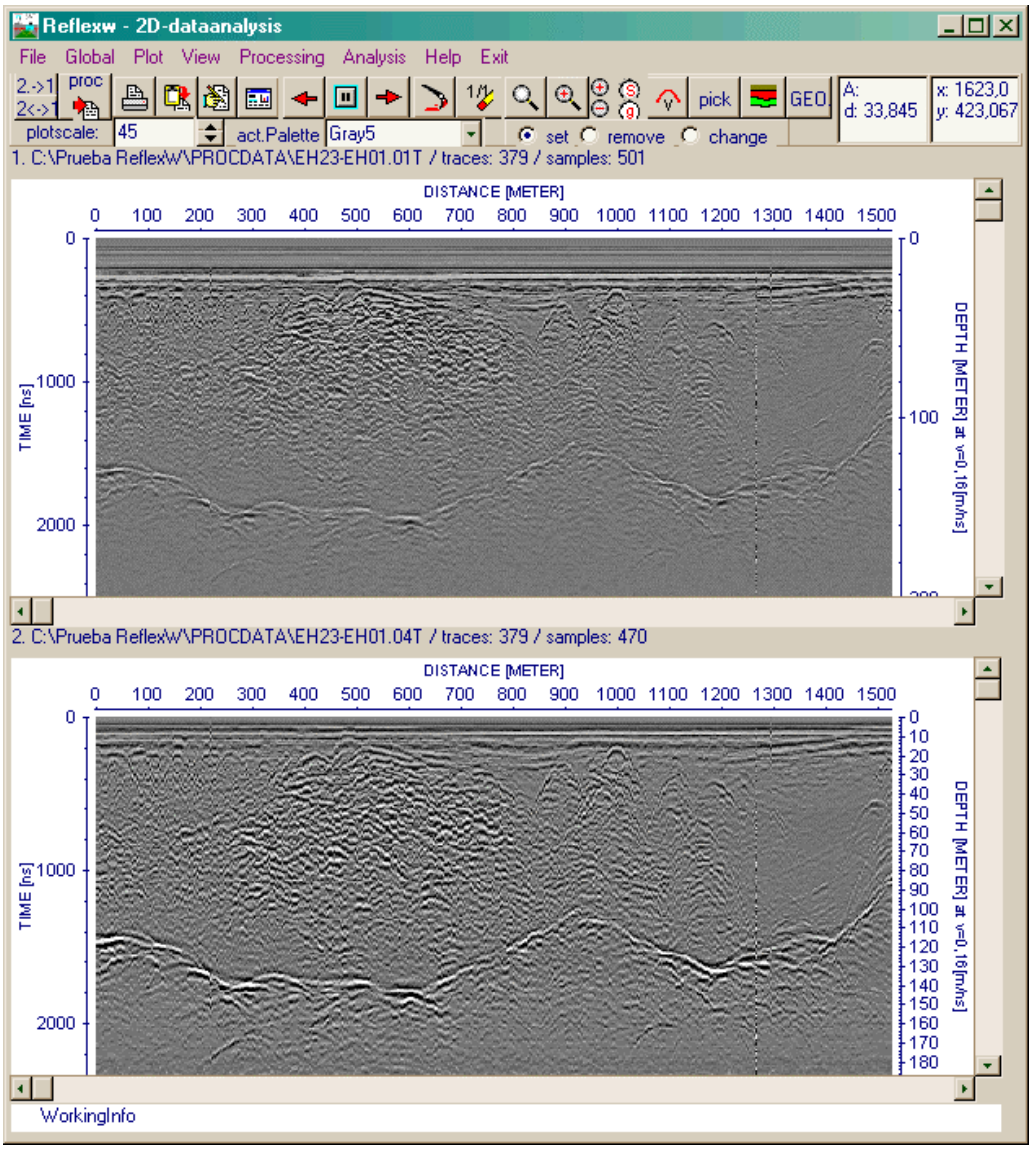

Figura 3-2 Ventana principal del módulo *2D data analysis*, con el perfil primario en la parte superior) y el secundario en la inferior.

3.2.1 Estructura y modos de procesado

En este apartado se describe el sistema de ventanas primaria y secundaria junto con el uso básico de directorios y archivos, y los dos modos de procesado, sobre los que descansa el funcionamiento de este programa.

La Figura 3-3 muestra un esquema con las relaciones existentes en *ReflexW - 2D data analysis* entre los distintos tipos de ficheros de datos y los directorios donde se ubican. El directorio ASCII está destinado a los archivos de datos originales, por lo que es recomendable colocar en él una copia de los ficheros con los datos de campo en algún formato que ReflexW sea capaz de importar (*e.g.*, *.sg2*, o *.rd3*). Como se desarrolla en §3.2.2.2, la función *Import* convierte estos ficheros de formato conocido en un fichero con extensión *.dat* y formato propio de ReflexW, que queda guardado en el directorio ROHDATA, destinado a los datos de origen puestos en formato ReflexW. El programa permite importar varios ficheros de datos de campo para formar un perfil único en un solo fichero (*e.g.*, *nombre.dat*).

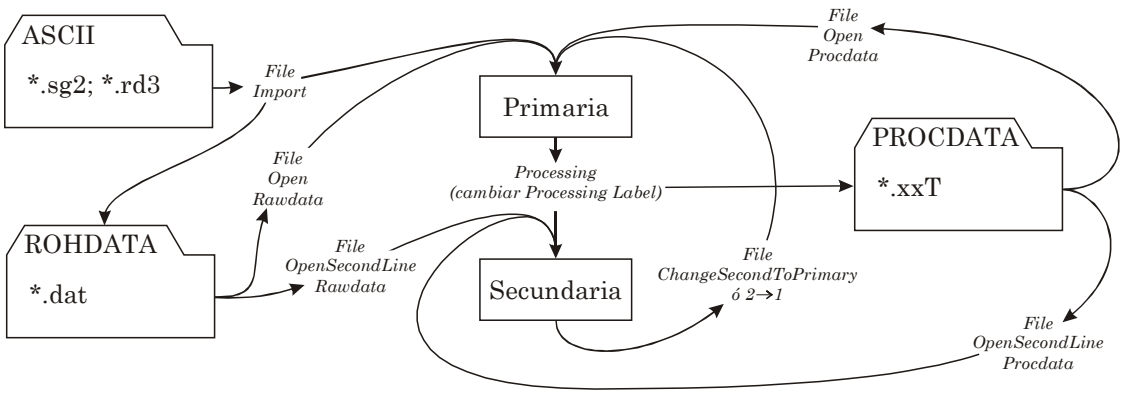

Figura 3-3 Esquema del sistema de ficheros y directorios en ReflexW.

Automáticamente, a cada paso de procesado se genera un nuevo fichero con el perfil obtenido como resultado, y se almacena en el directorio PROCDATA. De esta manera se respeta el fichero anterior, generándose una sucesión de ficheros que puede ser consultada, tanto para su comparación, como para realizar la vuelta hacia atrás en el procesado, si fuera necesario. El nombre de fichero elegido en la importación se transfiere a todos los posteriormente creados en el procesado. De manera automática, la extensión de los ficheros almacenados en el directorio PROCDATA se forma por dos caracteres numéricos (*Processing label*) y la letra T (*e.g.*, *nombre.01t*; *nombre.02t*; etc.).

Existen dos esquemas o modos generales de procesado en el módulo *2D - data analysis* de este programa. Son el modo de procesado paso a paso y la secuencia de procesado (*Sequence Processing*). El modo de procesado paso a paso se fundamenta en la sucesiva aplicación no automática de un paso de procesado tras otro sobre el fichero elegido y tomado como primario. A cada paso, la función del procesado elegida se escoge de entre las existentes a través del menú *Processing* (Figura 3-4 y §3.2.3).

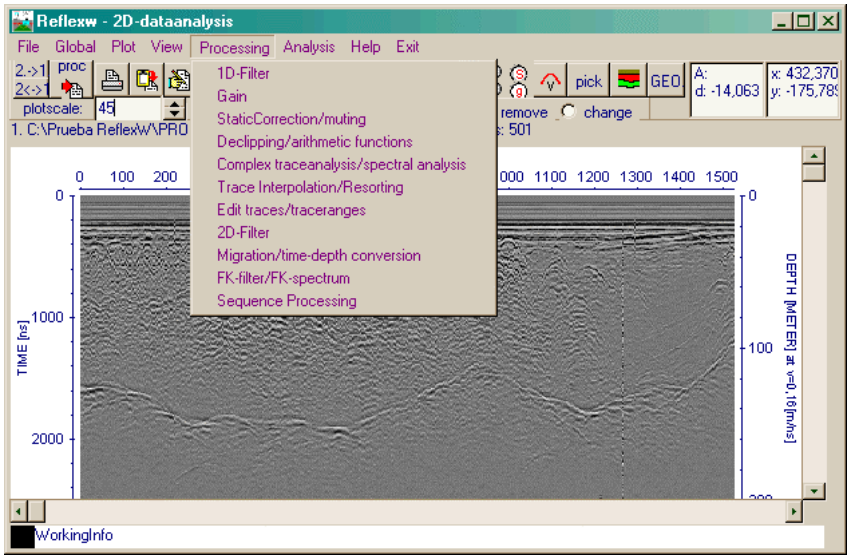

Figura 3-4 Menú *Processing* del programa ReflexW.

Por su parte, la secuencia de procesado consiste en la agrupación de una secuencia de pasos de procesado, que se genera a medida con los parámetros deseados, para ejecutarla posteriormente como un paso único, de manera automática sobre cualquier perfil o conjunto de perfiles. Su comprensión precisa del previo entendimiento del modo de procesado paso a paso.

Modo de procesado paso a paso

1 - La aplicación de un paso de procesado comienza con la elección del fichero sobre el que aplicarlo y su apertura como primario. Para ello, puede elegirse un fichero con datos de campo, o uno en el que previamente ya se haya realizado algún paso de procesado, como muestra la Figura 3-3.

Para utilizar como primario un fichero con los datos de campo es necesario importarlo a ReflexW. Como resultado de la importación se genera un fichero en el directorio ROHDATA, que contiene estos datos de campo, pero en formato ReflexW, quedando además el perfil en la ventana primaria, para su procesado. La operación se realiza mediante *File*→*Import*, y el fichero del directorio ASCII *nombre.sg2* (o *.rd3*) se convierte en *nombre.dat* en el directorio ROHDATA. Este proceso se desarrolla en 3.2.2.2.

Si posteriormente quisieran volverse a utilizar como primario los datos de campo originales, bastaría con abrir (no importar) el fichero que se ha generado en ROHDATA durante la importación (*File*→*Open*→*Rawdata*).

En el directorio PROCDATA quedan guardados los resultados de cada paso de procesado. Éstos pueden abrirse y utilizarse también como ficheros primarios, para ejecutar nuevos pasos de procesado sobre ellos (*File*→*Open*→*Procdata*).

Al procesar el fichero de la ventana primaria se genera otro en la secundaria como resultado del paso de procesado. Éste puede ser transferido directamente a la primaria (usando el icono 2→1, o bien mediante *File*→*ChangeSecondToPrimary*).

2 - Seleccionado y cargado el fichero primario de entrada, se escoge la función de procesado a aplicar de entre las existentes dentro del menú *Processing* (Figura 3-4). Aparece un panel similar al mostrado en la Figura 3-5 (en este ejemplo se trata de la aplicación una ganancia a los datos de entrada, explicada en §3.2.3.9).

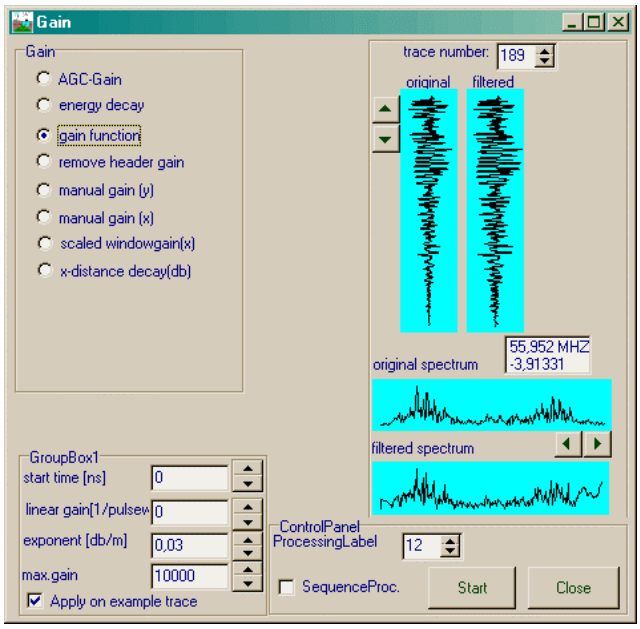

Figura 3-5 Ejemplo de la realización de un paso del procesado.

Es necesario introducir un valor en la casilla *Processing Label*, que formará parte de la extensión del fichero de salida, sirviendo de ordinal para el paso de procesado actual (*e.g.*, 01 para el primer paso). Presionando *Start*, se aplica el paso de procesado elegido, con los parámetros escogidos para su aplicación, sobre el fichero primario. Su

resultado se muestra en la ventana secundaria, para su comparación, siendo además salvado automáticamente en el directorio PROCDATA.

Dado que a cada paso se genera un nuevo fichero, para evitar la sobrescritura del fichero del paso anterior, el nombre con el que se salva incluye el ordinal del paso de procesado indicado en *Processing Label* (*e.g.*, *nombre.01t*) - (realmente se generan dos, *e.g.*, *nombre.01t* y *nombre.01r*, el segundo de escaso interés para el usuario).

El *Processing Label* elegido en el panel de parámetros de la función debe ser necesariamente diferente al que tuviera la extensión del fichero primario. En caso contrario aparecerá el error mostrado en la Figura 3-6.

Figura 3-6 Error por utilizar como *Processing label* de salida el mismo del fichero primario de entrada.

Si se elige un número distinto pero correspondiente a la extensión de un archivo ya existente en PROCDATA, éste será sustituido por la nueva salida. Este hecho puede servir para repetir un mismo proceso con distintos parámetros sin que se guarde un nuevo fichero con cada prueba.

3 - Cuando se considere aceptable el resultado del paso del procesado se puede proceder a la ejecución de un nuevo paso. No es posible procesar un fichero desde la ventana secundaria. Para aplicar el siguiente paso de procesado es necesario llevarlo a la ventana primaria. El trasvase de una ventana a la otra puede realizarse utilizando un comando que lo realiza de forma directa (el icono 2→1, o bien *File*→*ChangeSecondToPrimary*), o

puede volverse a cargar como primario el fichero salvado en PROCDATA (*File*→*Open*→*Procdata*).

4 - Para aplicar un nuevo paso de procesado debe procederse con los pasos 2 y 3, con otra función diferente de procesado y dando un valor superior al *Processing Label*. Esto se puede realizar sucesivamente hasta completar todos los pasos de procesado.

Pueden compararse dos ficheros ya creados abriendo uno como primario y otro como secundario (*File*→*OpenSecondLine*→*Procdata*).

Modo secuencia de procesado

Una sucesión de pasos, con sus parámetros correspondientes, puede agruparse para su posterior utilización conjunta como un paso único. Este modo de trabajo se denomina secuencia de procesado (*Sequence Processing*) - (RW3, p. 14, 15 y 198 a 200). Para ello hay que generar previamente la secuencia de los pasos de procesado a aplicar, a continuación seleccionar los perfiles sobre los que aplicarla, y finalmente ejecutarla.

La secuencia de procesado se genera creando un fichero con la información del flujo de procesado deseado. La creación de este fichero puede realizarse por dos vías. Por recuperación automática de la secuencia a partir de un procesado ya realizado, o generándolo interactivamente mediante un procesado paso a paso.

La primera manera de obtener la secuencia de procesado consiste en recuperar la sucesión de pasos de un perfil que ya haya sido tratado, y guardarlo en forma de fichero. Abierta en la ventana primaria el fichero final resultante del procesado, se elige en el menú *File*→*ProcessingFlow*. Con esta

opción, aparece una ventana como la mostrada en la Figura 3-7, donde *Save* guarda este flujo de procesado en un fichero para su posterior uso. Este fichero tiene extensión *.plf* y se guarda en el directorio raíz del proyecto.

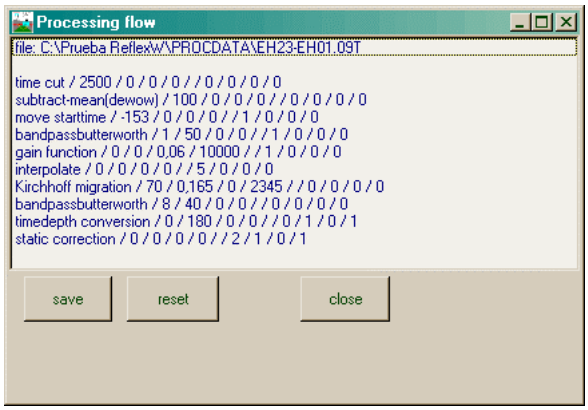

Figura 3-7 Flujo de procesado para un fichero (*File*→*ProcessingFlow*).

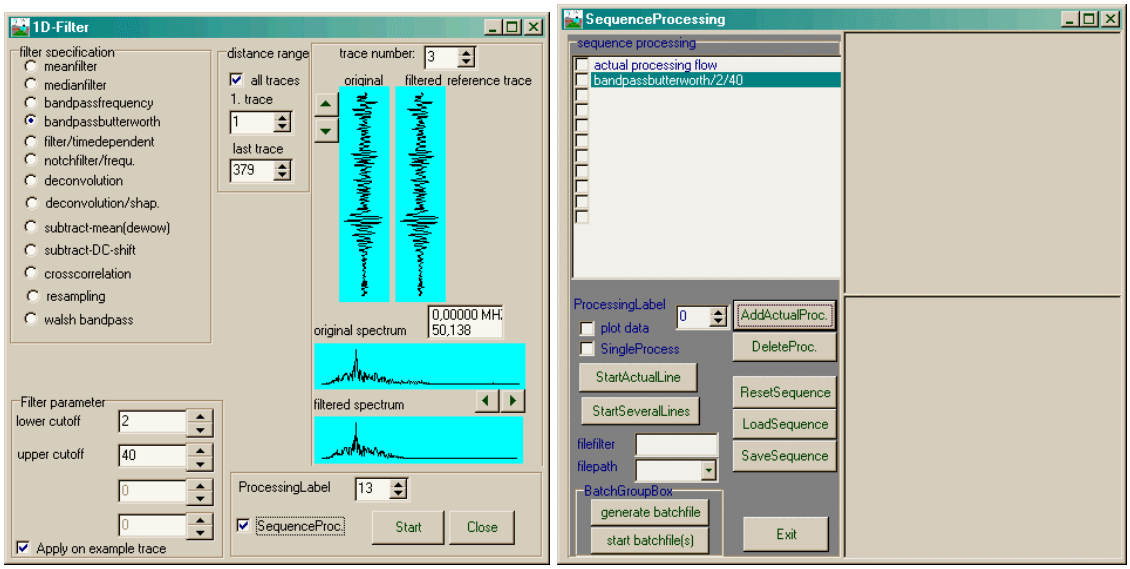

Figura 3-8 Filtro de paso banda de Butterworth (izq.), con *SequenceProc* activada, y panel *SequenceProcessing* (dcha.), donde se adjunta el paso, para construir la secuencia.

La manera interactiva de obtener la secuencia de procesado se realiza, paso a paso, sobre un perfil cualquiera. Durante la elección de los parámetros de cualquier función del menú *Processing*, la activación de la opción

SequenceProc hace aparecer el panel *SequenceProcessing* (Figura 3-8). Éste muestra la secuencia de procesado que interactivamente se está fabricando y a la que, una vez elegidos los parámetros adecuados, se puede añadir el paso actual de procesado (opción *AddActualProc*).

Debe distinguirse entre la sucesión de pasos de procesado que se aplica, paso a paso, al perfil abierto y la secuencia de procesado que se pueda estar generando para su posterior uso como automatismo (*Secuence Processing*). La distinción consiste en que sólo se añaden a la secuencia de procesado (*Secuence Processing*) los pasos que se deseen (aquellos en que se active la opción *SequenceProc*) y en el orden deseado (como luego se explica), por lo que la creación de la secuencia de procesado discurre en paralelo al propio procesado paso a paso del perfil en curso, pero no necesariamente deben coincidir. La secuencia de procesado sólo coincide con la sucesión de pasos que se va aplicando paso a paso en el perfil en curso si se activa la opción *SequenceProc* en todos y cada uno de los pasos del procesado, y se van añadiendo al final de la lista. Pero, como se ha explicado, esto se consigue automáticamente a través del *ProcessingFlow*, por lo que este segundo método debe utilizarse sólo para realizar variaciones en la secuencia de procesado. Por defecto, el paso de procesado actual se añade al final de la secuencia de procesado, pero puede introducirse antes de otro existente en la secuencia si señalamos éste último con el ratón (recuadro a su izquierda), antes de activar la opción *AddActualProc*. También pueden eliminarse pasos del procesado que no se deseen incluir en la secuencia a guardar, marcándolos y activando a continuación *DeleteProc*.

Una vez completada la secuencia deseada, puede guardarse en un fichero de extensión *.plf* en el directorio raíz del proyecto, para su posterior aplicación (*SaveSequence*). La opción *Load Sequence* permite recuperar en cualquier

momento una secuencia guardada y editarla añadiéndole el paso en curso (también eliminando otros, etc.).

Tanto para editar, como para definitivamente aplicar una secuencia de proceso en fichero *.plf* a un perfil o conjunto de perfiles, debe estar abierto el panel mostrado a la izquierda en la Figura 3-8. Esto se consigue mediante *Processing*→*Sequence Processing*.

La secuencia de proceso puede aplicarse a un único fichero (*Start Actual Line*), donde el fichero de entrada es el fichero primario abierto en ese momento; o a distintos perfiles (*Start Several Lines*), para lo que es necesario introducir el directorio del que se leerán los ficheros (*filepath*).

La aplicación de la secuencia produce, desde cada fichero de entrada, un único fichero resultado. Es decir, toda la secuencia actúa como un único paso y su resultado queda guardado en PROCDATA en un fichero. Debe tenerse en cuenta que la extensión de los ficheros de salida viene determinada por el *Processing Label*, por lo que es necesario utilizar una extensión distinta a la del fichero de entrada y a la de cualquier otro fichero ya guardado, ya que en caso contrario se produciría su eliminación.

Algunos de los pasos del procesado como *remove* o *set to zero*, necesitan de un fichero adicional donde se incluyan las trazas que se necesiten editar. Estos ficheros se crean en el correspondiente paso del procesado (§3.2.3.4).

3.2.2 Preparación de los datos

3.2.2.1 Directorio de trabajo

La Figura 3-9 muestra la ventana *Projectdirectory* para crear el directorio de trabajo o elegir uno ya creado, donde se guarden los ficheros creados durante el procesado (RW3, p. 4). Esta ventana aparece automáticamente tras iniciar el programa. También puede accederse a ella desde el menú *Project* en la ventana de entrada (Figura 3-1) o desde el módulo *2D data analysis*, mediante *File*→*ProjectDir*. La opción *new project* permite crear un directorio de trabajo; mientras que para trabajar en un directorio ya creado es necesario elegirlo en *Actdirectory* y emplear la opción *confirm project* (Figura 3-9). Cada directorio o proyecto consta de 6 subdirectorios: ASCII, ROHDATA, PROCDATA, LINEDATA, MODEL y TRAVTIME, que ReflexW crea con la opción *new project*.

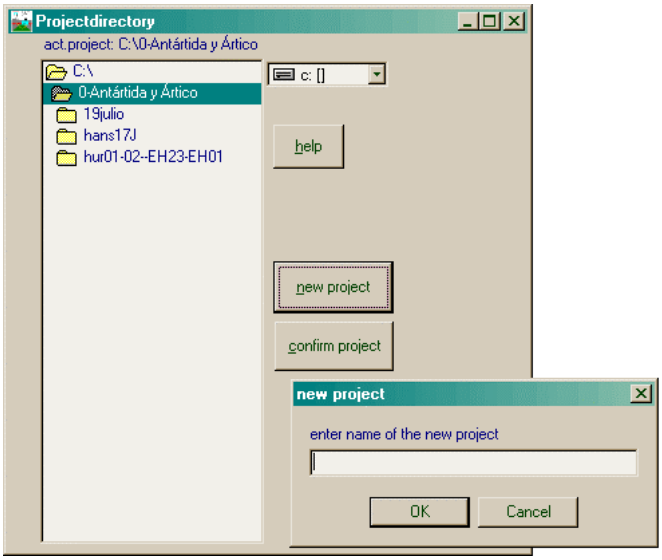

Figura 3-9 Ventana para la creación o cambio del directorio de trabajo.

3.2.2.2 Importación de datos. La geometría y los sistemas de coordenadas

Es recomendable tener una copia de los datos de campo (con formato reconocible por ReflexW, como los *.sg2*, o *.rd3*) en el subdirectorio ASCII del proyecto de trabajo. La importación de los datos se realiza mediante el comando *Modules*→*2D data analysis*→*File*→*Import*, o utilizando el icono directo , de la ventana principal (RW3, p. 7 y 80 a 96). En la Figura 3-10 se muestra el panel de opciones de importación y un ejemplo del mismo tras introducir y modificar ciertas opciones y valores.

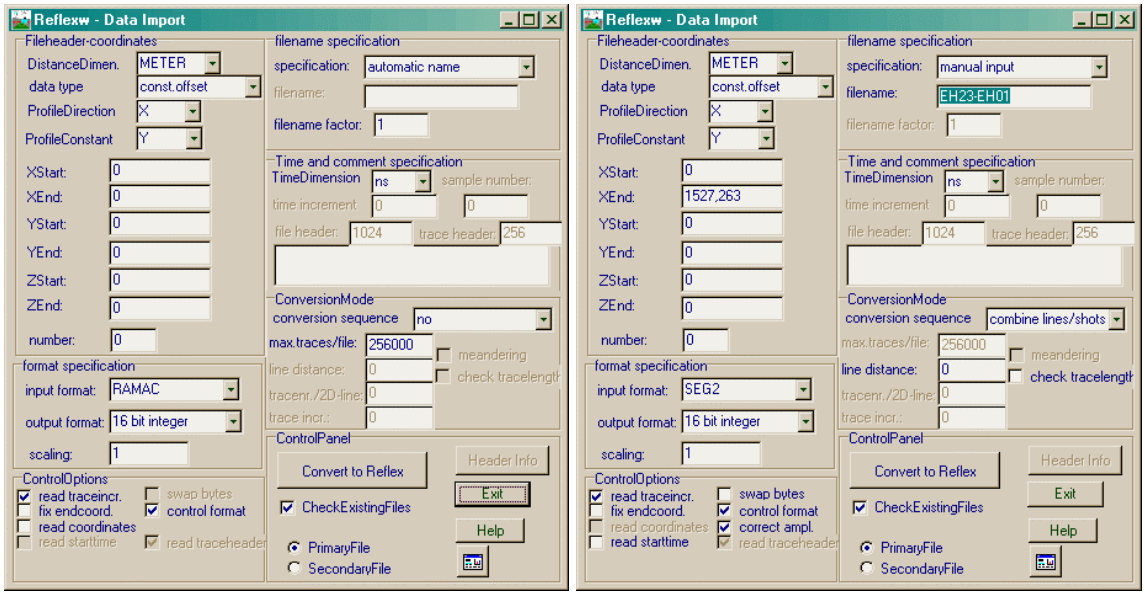

Figura 3-10 Panel de importación, antes y después de configurarlo.

- En *Fileheader-coordinates* (superior izquierda), se elige el metro como unidad de longitud y el tipo de registro datos (*offset* común - *const-offset*).

- La elección de los ejes y coordenadas del comienzo y fin del perfil (X, Y, Z) requiere ciertas consideraciones sobre el uso que de ellos hace ReflexW.

Asociados a los datos, durante el procesado, es necesario distinguir al menos entre cuatro sistemas de coordenadas y su interrelación[34]:

El primero es el de las propias coordenadas topográficas (en el sistema que fuere) de las medidas en el campo (en adelante CMtopo).

El segundo es el de las coordenadas que se asocian a cada traza en las cabeceras de traza del radargrama en ReflexW (en adelante CThdr). Es deseable que coincida con las de campo, CMtopo, pero no siempre es así, entre otros motivos, por las consideraciones de equidistancia o no entre las trazas (§3.2.2.3). En todo caso, las CThdr se calculan a partir de las CMtopo.

El tercer sistema es el las coordenadas de fichero (en adelante CFhdr), presentes en las cabeceras del fichero del radargrama en ReflexW. Tiene grandes restricciones por parte de ReflexW, como más adelante se explica, pero una sola utilidad, orientar el radargrama y el calcular el cuarto sistema de coordenadas, que es el que internamente se utiliza.

Este cuarto y último sistema de coordenadas (en adelante CInt) es el que aparece en la visualización que ReflexW hace del radargrama, y se utiliza para los cálculos internos. Las coordenadas X e Y de este sistema (no hay coordenada Z en CInt), nada tienen que ver con las elecciones de X e Y en los anteriores. La coordenada X en CInt es una distancia medida en la dirección del perfil (independientemente de si la dirección del perfil es o no X en los anteriores sistemas). Esta distancia (*distance*) se calcula internamente a partir de los datos introducidos en CFhdr. La coordenada Y de CInt es el tiempo a lo largo de cada traza.

[34] ReflexW no define estos sistemas de coordenadas, ni, por tanto, su denominación. Es el autor quien realiza esta estructuración en cuatro sistemas, así como sus denominaciones.

El usuario posee las medidas del primero (CMtopo), y con ReflexW puede elegir los valores en el sistema segundo (CThdr) y, con restricciones, en el tercero (CFhdr). El cuarto (CInt) lo genera automáticamente el programa.

En la importación de los datos sólo se define CFhdr, que se registra en la cabecera del fichero (*File Header*). Con posterioridad puede corregirse CFhdr, y definirse CThdr (§3.2.2.3). La importación solicita las coordenadas de comienzo y fin del perfil (Figura 3-10). Pero ReflexW añade dos conceptos más asociados a las coordenadas de CFhdr, el de dirección del perfil (*Profile Direction*, en adelante PDr), y el de constante del perfil (*Profile Constant*, en adelante PCt). A pesar de denominarlos así, no considera constante ninguna de las coordenadas; la distancia entre trazas se calcula con los valores de las coordenadas introducidos en CFhdr, y se guarda en la cabecera del fichero (RW3, §1.5.1). ReflexW solicita al usuario que elija como PDr una de las coordenadas de CFhdr (X, Y ó Z) y otra como PCt, definiendo el plano del perfil. La elección de qué coordenada debe ser el PDr y cuál el PCt se hace en función de qué coordenada presenta mayor variación (PDr) y cuál la menor (PCt). Si la elección no se realiza en este sentido, ReflexW realiza la importación pero mostrando el mensaje de aviso mostrado en la Figura 3-11. Su uso correcto es fundamental en el procesado y visualización 3D, no así tanto en 2D.

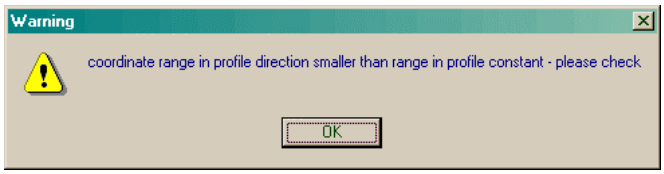

Figura 3-11 Advertencia por intercambiar las direcciones PDr y PCt.

Una vez decidido qué coordenada debe realizar la función de PDr, debe elegirse como comienzo del perfil el extremo que menor valor presente en la

coordenada elegida como PDr. Si por error se eligiera como comienzo el extremo con la coordenada de mayor valor, ReflexW cambiaría automáticamente el orden de la coordenada PDr, pero sin embargo no lo haría en la coordenada PCt, obteniendo un resultado incorrecto. Sin embargo, no presentará ningún mensaje de error, ni advertencia.

Puede ocurrir que los datos importados tengan trazas en sus extremos que no pertenezcan al perfil. ReflexW calcula la distancia entre trazas en función de las coordenadas de estos extremos y del número de trazas importadas, por lo que puede ser calculada erróneamente hasta que se eliminen las trazas del inicio y del final sobrantes (§3.2.3.1). En tal caso, deben redefinirse los valores de las coordenadas CFhdr una vez eliminadas dichas trazas (§3.2.2.3).

- *Number* (Figura 3-10) puede ser útil en el caso de que con posterioridad se necesite combinar diversos perfiles.

- En la especificación del formato se elige SEG-2 (o RAMAC), por mayor precisión, se elige *new 32-bit floating point* y *1* para *scaling*.

- No todas las opciones de control tienen influencia en la importación de datos SEG-2 o RAMAC (RW3, §1.5.3).

  Para la importación desde SEG-2 sólo tienen interés las opciones *swap bytes*, para invertir el orden de los bytes, caso de interpretarlos de forma errónea; la opción *control format*, que interesa tener activada, con lo que se autoriza el control de la importación por parte del programa (se mostrarán mensajes de error en el caso de que los valores importados no sean razonables); la opción *Corr.ampl.*, por la que se utilizan los factores de escalado y de reagrupamiento de las cabeceras de traza de los datos para corregir los valores de los datos durante la importación.

Para la importación de datos RAMAC deben contemplarse las opciones *read coordinates*, por la que se importa desde los datos la coordenada final del PDr (la inicial es puesta a cero); *read trace increment*, por la que la distancia entre trazas se lee de las cabeceras de traza en la importación, si no es nula; y *control format*, que actúa de la forma ya expuesta.

- El nombre del fichero (*filename specification*) consta de un máximo de 16 caracteres (RW3, §1.5.2). En general, como *specification*, es útil la opción *manual input*, que genera nombres con la misma raíz introducida de forma manual en *filename*, y diferentes números. Es recomendable utilizar como *filename* el nombre de la línea (*e.g.*, hur01-02b).

- Como unidad de tiempo se utiliza el ns, para datos de georradar.

- El modo de conversión *combine lines/shot* permite importar juntos los archivos que compongan la línea que vaya a procesarse.

- Deben quedar activadas las casillas *CheckExistingFiles* y *PrimaryFile*, para que se muestre una alarma caso de que la importación hubiera sido ya realizada y el perfil importado quede como primario.

- Una vez seleccionado *Convert to Reflex*, se eligen los ficheros *.sg2* ó *.rd3* correspondientes al perfil a procesar (haciendo uso de las teclas *Ctrl* o *Shift* para elegir todos los ficheros correspondientes al perfil).

- Con la importación se crea además un fichero de datos de campo en formato propio de ReflexW (Figura 3-3), que se guarda en el directorio ROHDATA con extensión *.dat* (*e.g.*, *nombre.dat*). Simultáneamente se generan otros dos ficheros (*e.g.*, *nombre.par* y *messroh.par*) en el mismo directorio, y uno más en el raíz del proyecto (*import.rep*), con los datos de cabeceras e importación, aunque tienen interés menor para el usuario.

La Figura 3-12a muestra, a modo de ejemplo, la información que se presenta durante la importación. Se trata de una ventana superpuesta al panel de opciones de importación, con información sobre las acciones realizadas. Cerrada esta ventana (*close*), los datos importados se muestran en la ventana primaria (Figura 3-12b). La importación puede repetirse si no ha sido satisfactoria; cuando lo sea, se cierra el panel de importación.

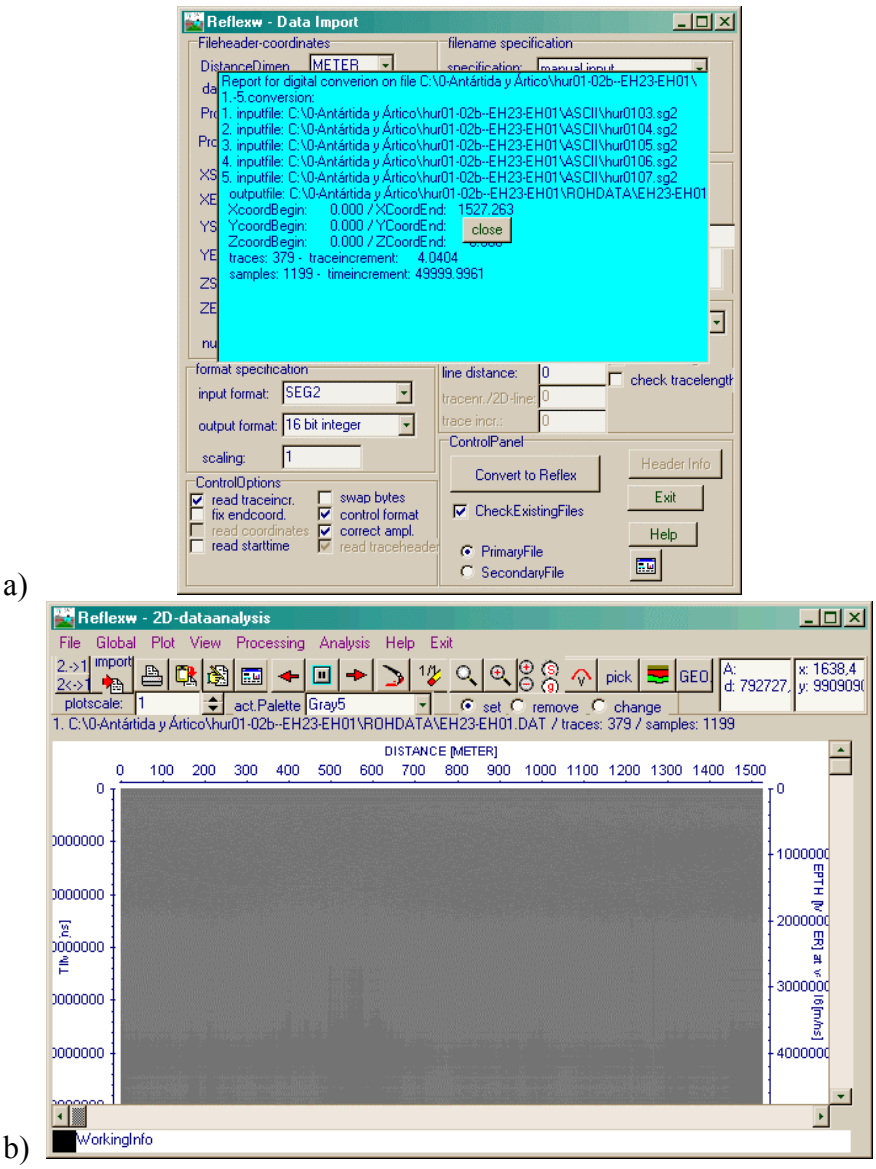

Figura 3-12 a) Ventana informativa, sobre el panel de importación.
b) Datos de campo importados al programa ReflexW.

3.2.2.3 Edición de cabeceras

Cabecera del fichero (*File Header*)

Si es necesario modificar algún parámetro o coordenada de la cabecera del fichero (CFhdr) puede realizarse en *File*→*Edit FileHeader*. En la Figura 3-13 se observa el panel de datos de la cabecera de fichero. Sus valores se guardan en el fichero del directorio ROHDATA (*e.g.*, *nombre.par*) al elegir *Save* (RW3, §1.9), cerrándose automáticamente el panel *FileHeader*.

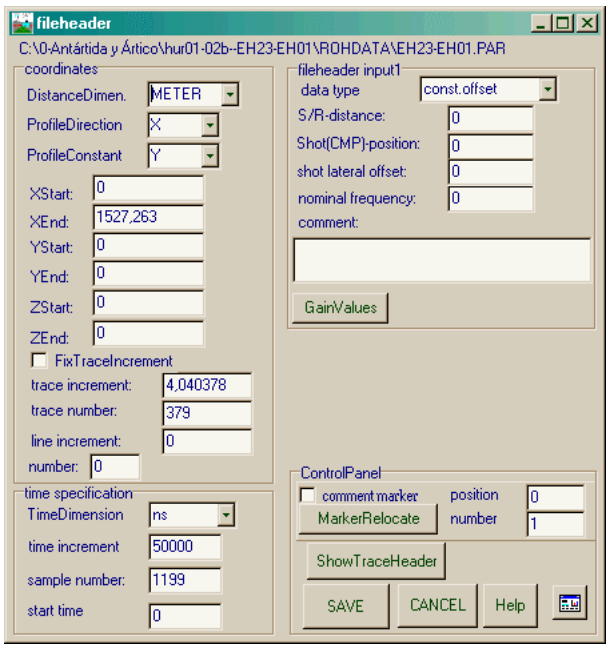

Figura 3-13 Panel de la cabecera del fichero.

La modificación del incremento temporal (*time increment*), correspondiente al período de muestreo del registro digital del georradar, afecta a la escala vertical del radargrama. Su valor se obtiene de la cabecera de fichero de los datos importados. El incremento espacial entre trazas (*trace increment*), sin embargo, se calcula con las coordenadas CFhdr y el número de trazas, si bien también puede fijarse este incremento, lo que afectará a las coordenadas.

En cualquier caso, tras modificar la cabecera de fichero, el cambio no se refleja en la visualización de forma espontánea. Los ejes permanecen con los valores previos mientras no se actualice la visualización (§3.2.2.4). Una manera de realizarlo es pulsando .

Debe tenerse en cuenta que la cabecera de fichero de cada versión del radargrama que se obtiene a cada paso, se guarda junto a él (*i.e.*, *nombre.par*, con *nombre.dat*, en ROHDATA; *nombre.xxR*, con *nombre.xxT*, en PROCDATA). Así, la cabecera de fichero no es única . Si se detecta un error en un dato de la cabecera (*e.g.*, coordenada errónea), es necesario corregirlo, de la forma arriba indicada, en las cabeceras de los radargramas de cada uno de los pasos en los que haya sido erróneo.

Cabeceras de las trazas (*Trace Headers*)

Hasta ahora se han tratado las cabeceras del fichero y sus coordenadas (CFhdr). Pero además, cada traza tiene su propia cabecera (*TraceHeader*), y sus propias coordenadas (CThdr). ReflexW contempla la importación de las coordenadas originales (CMtopo, *e.g.*, coordenadas GPS), en las cabeceras de las trazas (RW3, §1.9.6). Se precisa para ello de un fichero ASCII con extensión *.dst*, generado externamente, que debe contener 8 columnas separadas por espacios, con una fila por cada traza del perfil. Estas columnas deben estar ordenadas como sigue: número de traza (comenzando en 1 para la primera del perfil); distancia desde el comienzo del perfil; coordenada X del emisor; Y del emisor; X del receptor; Y del receptor; Z del emisor; y Z del receptor (Figura 3-14). Las coordenadas que deben utilizarse para las cabeceras de traza (CThdr) deben ser las medidas en campo (CMtopo), si se dispone de una medida para cada traza. Si no es así, y sólo se

dispone de coordenadas medidas sobre ciertos puntos, el fichero debe generarse por interpolación, o extrapolación, en su caso.

Microsoft Excel - Coordheader.dst

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	1	0.00	633484.14	3046047.31	633484.14	3046047.31	258.85	258.85
2	2	4.04	633487.36	3046049.75	633487.36	3046049.75	259.09	259.09
3	3	8.08	633490.59	3046052.18	633490.59	3046052.18	259.33	259.33
4	4	12.12	633493.81	3046054.62	633493.81	3046054.62	259.57	259.57
5	5	16.16	633497.04	3046057.05	633497.04	3046057.05	259.81	259.81
6	6	20.20	633500.26	3046059.49	633500.26	3046059.49	260.05	260.05
7	7	24.24	633503.48	3046061.92	633503.48	3046061.92	260.29	260.29
8	8	28.29	633506.71	3046064.36	633506.71	3046064.36	260.53	260.53
9	9	32.32	633509.93	3046066.79	633509.93	3046066.79	260.76	260.76
10	10	36.36	633513.15	3046069.23	633513.15	3046069.23	261	261
11	11	40.40	633516.38	3046071.66	633516.38	3046071.66	261.24	261.24
12	12	44.44	633519.6	3046074.1	633519.6	3046074.1	261.48	261.48
13	13	48.49	633522.83	3046076.54	633522.83	3046076.54	261.72	261.72
14	14	52.52	633526.05	3046078.97	633526.05	3046078.97	261.96	261.96

Figura 3-14 Ejemplo de formato de fichero *.dst* para importar en CThdr.

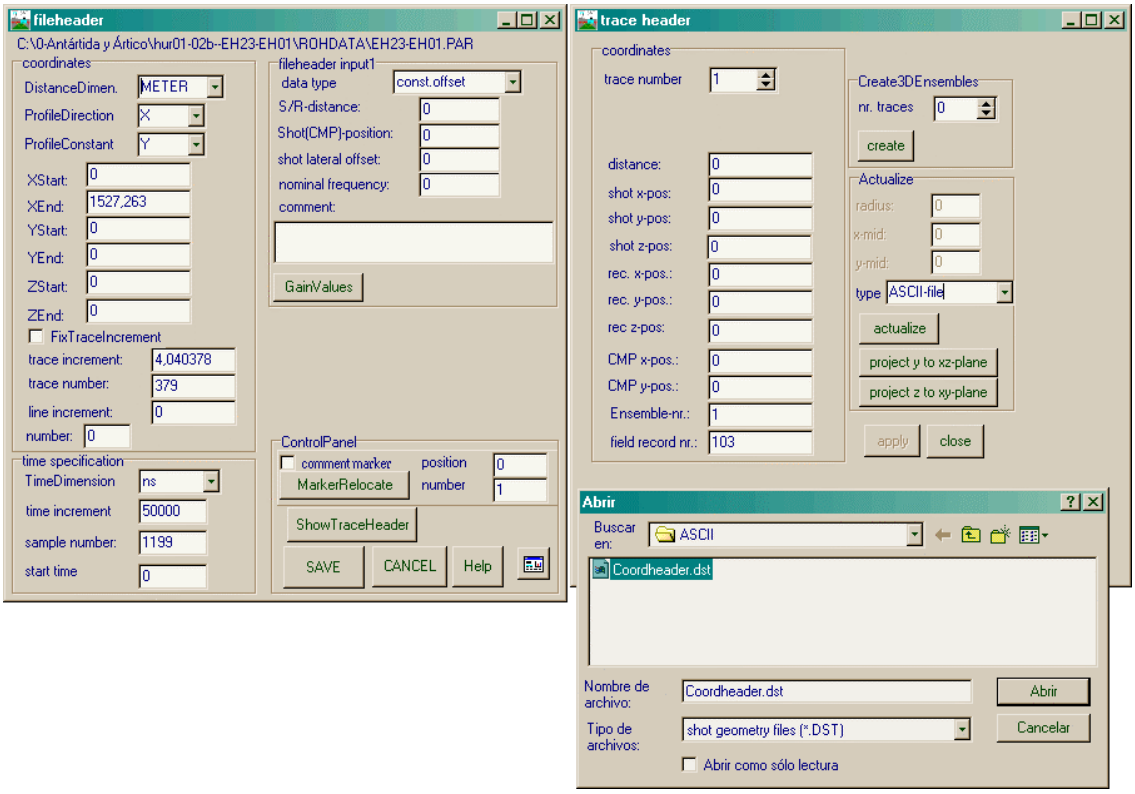

Figura 3-15 Ejemplo de importación de CThdr desde un fichero ASCII.

Para su posterior importación, el fichero debe encontrarse en el directorio ASCII del proyecto y tener extensión *.dst*. Su importación (Figura 3-15) se realiza mediante *File*→*Edit FileHeader*→*Show TraceHeader*. En el panel *Trace Header*, se elige el tipo de fichero de coordenadas (*ASCII-file*) y se activa la opción *Actualize*. Esto abre la ventana de elección del fichero *.dst*. Tras elegirlo y aceptar se produce la actualización.

- Automáticamente se crea un fichero (*dummy.dat*) en el directorio raíz del proyecto y se incorporan las nuevas cabeceras de las trazas al fichero de extensión *.dat* (*e.g.*, *nombre.dat*) del directorio ROHDATA.

- El panel *Trace Header* permanece abierto y muestra las coordenadas importadas en cada traza seleccionada (*trace number*, Figura 3-16).

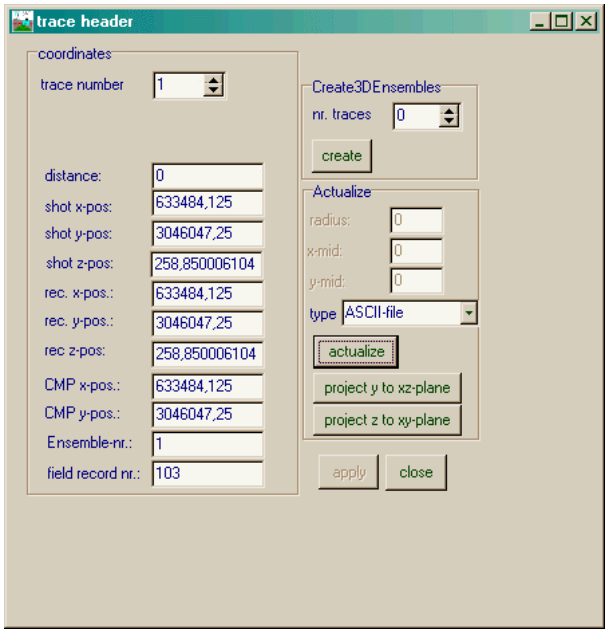

Figura 3-16 Cabeceras de traza tras la actualización de la Figura 3-15.

- Pueden cerrarse los paneles *Trace Header* y *File Header*, aún abiertos.

La visualización se presenta con la coordenada X de CInt (§3.2.2.2), calculada por ReflexW a partir de la distancia entre trazas guardada en *FileHeader* (no *TraceHeader*). Las coordenadas importadas en las cabeceras de las trazas (CThdr) no se utilizan para la visualización del fichero. Los valores importados pueden comprobarse desde la ventana de visualización activando la opción *View*→*TraceHeaderDistancies* (RW3, p. 78), que muestra estos valores en el cajetín de la esquina superior derecha al situar el ratón sobre cada traza.

Las coordenadas de las trazas se utilizan, *e.g.*, en la exportación de series de tiempos de llegada o de profundidades identificados (§3.2.3.14; RW3, §1.12.2). Cada traza, entonces, se representa en la exportación por las coordenadas de su cabecera.

Otra utilidad de la CThdr es su uso para que ReflexW gestione una interpolación de nuevas trazas, en el caso de que las trazas medidas en campo no sean realmente equidistantes (§3.2.3.2).

3.2.2.4 Configuración de la visualización

La utilidad *Plot Options* (Figura 3-17) controla la visualización de los datos (RW3, §1.7; también §1.3 y §1.4), a la que se accede desde el menú principal (*Plot*→*Options*) o desde el icono .

Las opciones elegidas se ejecutan cerrando la ventana (*Close*). Esto actualiza la visualización. En cualquier instante puede volverse a *Plot-Options* para adecuar sus opciones a las necesidades del momento. Sus efectos sólo afectan a la visualización, no al tratamiento de los datos.

En función de las necesidades, para la cómoda visión del radargrama, los valores de escalado de cada eje se eligen de forma independiente (*XScale* e *Yscale*, con valores superiores a la unidad para ampliación del detalle).

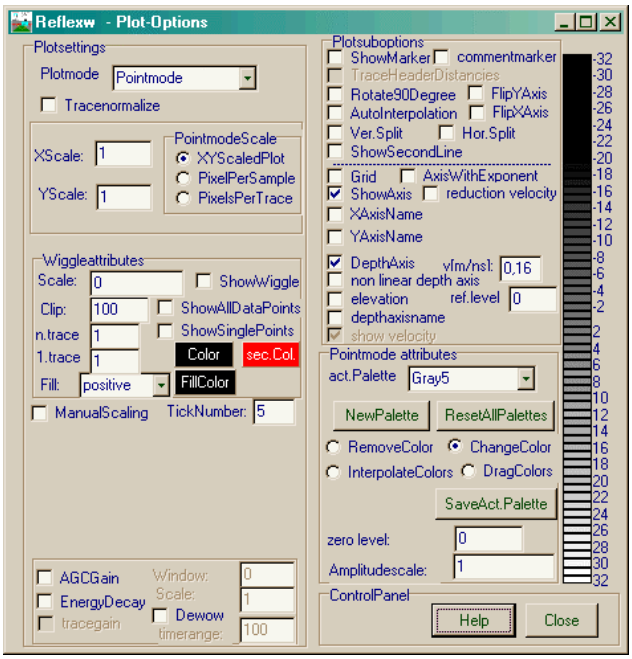

Figura 3-17 Panel de opciones de visualización de los datos.

En la columna de la izquierda se muestran las funciones llamadas *Plotsuboptions*, donde es posible elegir una velocidad de propagación en hielo para que se muestre el eje de profundidad aproximada (puede partirse del valor 0,165 en la casilla *v[m/ns]*); además, puede mostrarse o no el fichero secundario con el fichero primario, en ventana horizontal o vertical (si no se marca ninguna de estas dos opciones, el fichero secundario se representa en la ventana completa, ocultando el primario).

La zona del panel, *Wiggleattributes*, está dedicada a la representación mediante líneas continuas y la zona *Pointmode attributes* gestiona las opciones para la representación por puntos. La elección de uno u otro tipo de representación se realiza en la casilla *Plotmode* (superior izquierda). Incluso

habiendo elegido *Pointmode*, puede verse superpuesta la traza ondulante (*ShowWiggle*). Para una representación por traza ondulante, el valor de *Scale* no puede quedar con valor nulo (es el valor por defecto).

Variando *Amplitudescale*, que actúa como factor multiplicativo, se puede aplicar ganancia a la representación por puntos (no modifica los valores del perfil, sólo su visualización), hasta resaltar la imagen registrada. También puede elegirse la escala de grises o utilizar una escala de colores para la visualización (*actPalette*), e incluso crear nuevas escalas. En la Figura 3-18 se muestra un tramo de un mismo radargrama con diferentes opciones de visualización por puntos que ReflexW tiene configuradas.

No todas las funciones del panel *Plot-Options* tienen utilidad desde el comienzo, pero en cada momento se pueden ajustar los parámetros que se precise, con los valores necesarios para la correcta visión del radargrama. Por ejemplo, la componente continua de las trazas eleva los niveles, y la imagen que se obtiene, dependiendo de la escala elegida, resulta de excesivo brillo, o muy oscura, o sin contraste, o de un solo color, y, si en esa situación se activa la representación por traza ondulante con negro en los positivos, la imagen resulta negra.

En la pantalla principal de ReflexW también es posible visualizar trazas individuales, y su espectro, a través de la opción *View*→*Wiggle Window* (RW3, §1.4). La representación de la traza individual situada bajo el puntero del ratón aparece en una ventana superpuesta al radargrama (Figura 2-25a, y -c). Su amplitud se controla mediante el parámetro *Scale* del conjunto de *Wiggleattributes*, en el panel de *Plot-Options* (esta representación no aparece si *Scale* tiene valor nulo). El espectro de amplitud de la traza elegida se muestra activando la opción *act.spectrum* (Figura 2-25b y -d).

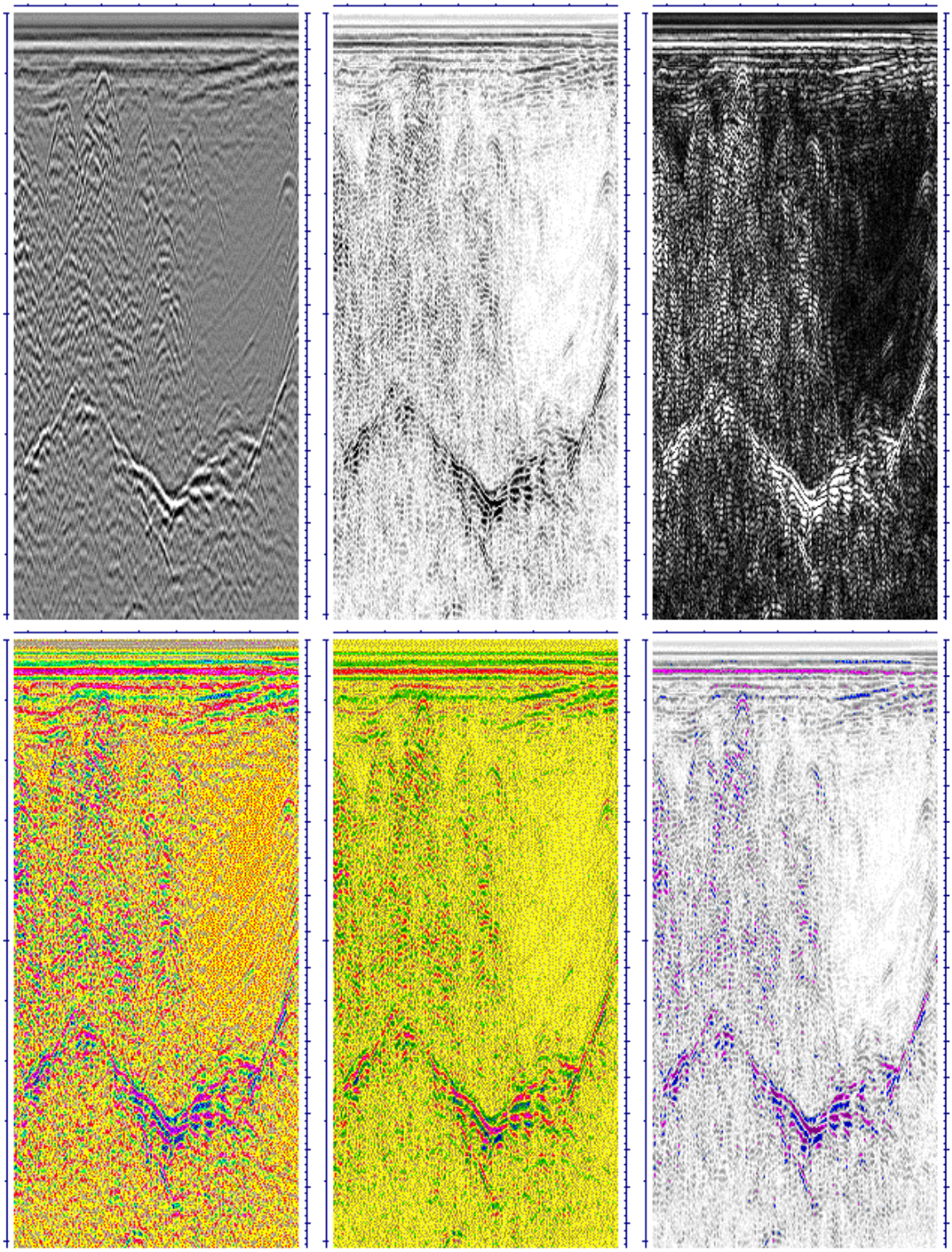

Figura 3-18 Variaciones en la representación por puntos del radargrama.

3.2.3 Procesado

Hasta aquí se ha realizado la preparación de los datos para su procesado. Los pasos iniciales del procesado (*i.e.*, eliminación del desplazamiento DC, edición de trazas, restablecimiento de la geometría y correcciones estáticas), han sido agrupados como preprocesado en el esquema general del procesado presentado en la Figura 2-28, de §2.3. Pero ReflexW agrupa todos estos pasos bajo la misma denominación de procesado, no por su significado, sino por sus consecuencias. Las acciones tomadas hasta ahora no han modificado los datos, salvo para su formato y cabeceras. En lo que sigue, cada paso modificará los valores del radargrama.

En todo momento se puede volver a la situación previa al procesado, con datos originales y cabeceras modificadas, abriendo el fichero de extensión *.dat* (*e.g.*, *nombre.dat*) del directorio ROHDATA. Los parámetros de visualización elegidos en *Plot Options*, sin embargo, no se guardan en el proyecto, siendo necesario volver a adecuarlos al gusto.

Consideraciones comunes en los paneles de opciones

- En cada paso se precisa un nuevo valor en *Processing Label*; interesa partir de cero, o uno, e ir ascendiendo; se generan ficheros en PROCDATA.

- Si se quiere generar una secuencia de proceso para una posterior automatización (§3.2.1), se activará *SequenceProc*.

- ReflexW ofrece la opción *Apply on example trace* en la parte inferior izquierda del panel de la mayor parte de las funciones (*e.g.*, Figura 3-19). Activándola, se visualiza el efecto que produce la función y los parámetros seleccionados sobre la traza ejemplo escogida. La traza ejemplo se elige en la zona superior derecha del panel. La previsualización se ofrece en dos

imágenes, una correspondiente a la traza en su estado previo (*original*) y otra a su estado tras la ejecución de la función (*filtered reference trace*, o simplemente *filtered*). Además pueden verse los espectros de la traza en sus estados previo (*original spectrum*) y posterior a la posible ejecución de la función (*filtered spectrum*). La previsualización se facilita como ayuda a la elección de los valores de los parámetros de la función.

- En cada función seleccionada puede salirse por su ejecución o por su abandono. Su ejecución se realiza activando *Start* (parte baja de la derecha, en zona del *Control Panel*, *e.g.*, Figura 3-19), lo que además provoca la creación del correspondiente fichero en PROCDATA (§3.2.1). Por el contrario, su abandono se consigue saliendo sin haber ejecutado *Start*. En cualquier caso, debe activarse *Close*, o , para salir del panel.

- En determinadas funciones de procesado (*e.g.*, §3.2.3.1, ó §3.2.3.4) su panel muestra una tabla con dos columnas (1.trace nr. y 2. trace nr.), donde introducir los intervalos de trazas sobre los que ejecutar la acción (*e.g.*, Figura 3-19). En la tabla, los intervalos se representan introduciendo el número de traza del comienzo del intervalo en la primera columna y el del final en la segunda; las trazas aisladas se representa por una fila con su número de traza en ambas columnas. En este tipo de tabla, es posible realizar la selección de estos intervalos de trazas por teclado o mediante el botón izquierdo del ratón, marcándolo sobre el radargrama de la ventana principal. Para marcar una única traza, debe seleccionarse *EditTraces*; para elegir un intervalo de trazas se emplea la opción *EditTraceRanges*. Para incluir nuevos intervalos en la tabla de trazas, es necesario que la opción *Insert* esté seleccionada; en el caso de tener que eliminar de esta tabla alguno de los intervalos que hubiésemos incluido ya, se emplea *Remove* (bajo la tabla, en la Figura 3-19).

3.2.3.1 Elección de la ventana espacial (perfil)

Es habitual que los ficheros importados contengan tazas en su inicio y su final que deban ser eliminadas. Por ejemplo, los datos contenidos en un fichero pueden pertenecer a más de un perfil (*e.g.*, datos de VIRL-2a). También es frecuente que el registro de datos en campo se realice comenzando y finalizando con el convoy parado, por lo que suele haber trazas tomadas desde la misma posición. Pero sea por estos u otros motivos, es necesario elegir las trazas que pertenecen al perfil en estudio antes de continuar con el procesado. ReflexW permite eliminar del fichero las trazas del radargrama que no pertenezcan al perfil (RW3, p. 168). Más adelante se explica cómo anular o interpolar trazas erróneas (§3.2.3.4).

La opción *Processing→Edit traces/traceranges→remove* (Figura 3-19), muestra una tabla con dos columnas (*1.trace nr.* y *2.trace nr.*), donde introducir los intervalos a eliminar. Cada intervalo se introduce en una fila.

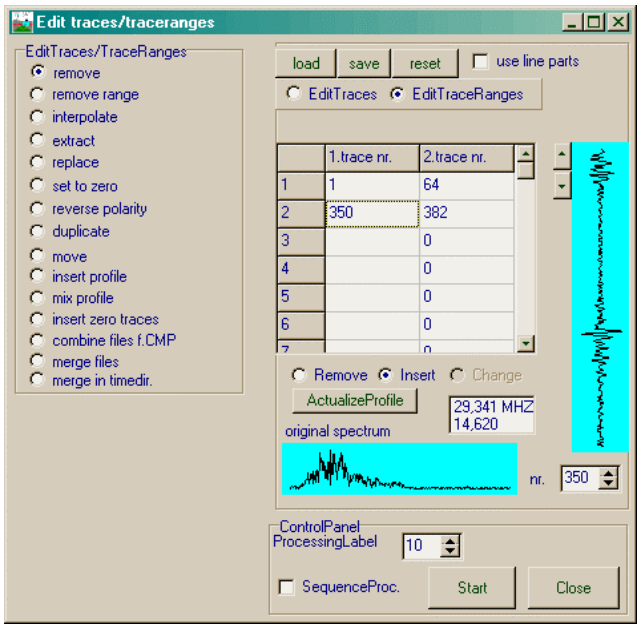

Figura 3-19 Panel para la eliminación de trazas del radargrama.

Cada traza y su espectro pueden visualizarse, una a una, seleccionándolas en la casilla *nr.*, para facilitar la elección de qué trazas eliminar.

Al modificar el número de trazas, el intervalo entre trazas puede quedar con un valor erróneo y, al hacerlo en los extremos del radargrama, incluso las coordenadas CFhdr pueden serlo también. Por ello, una vez eliminadas las trazas sobrantes, debe comprobarse que quede actualizada la distancia entre trazas y, en su caso, verificar la corrección de las coordenadas de la cabecera del fichero (CFhdr), en *File*→*Edit FileHeader*. Si la actualización de la distancia entre trazas no se ha producido, puede forzarse ésta posicionando el cursor en la casilla *trace increment*, o volviendo a escribir cualquiera de las coordenadas (*e.g.*, *Xstart*), etc. La corrección de las coordenadas CFhdr se efectúa como se indica en §3.2.2.3.

Por otro lado, si se detecta un error en un dato de la cabecera (*e.g.*, no está actualizado *traceincrement*), debe corregirse, como arriba se indica, en la cabecera de los radargramas de cada paso en que haya sido erróneo, dado que cada radargrama se guarda con su propia cabecera de fichero.

Es preferible establecer la ventana espacial antes de configurar las cabeceras, de modo que los valores de CFhdr sean correctos, y cuando se importen los de CThdr sólo se tengan en cuenta las trazas propias del perfil. Una forma de conseguirlo es estableciendo la ventana espacial tras importar los datos de campo, antes de modificar sus cabeceras. También se consigue recortando la ventana espacial antes de importar el perfil. Cabe indicar, a modo de ejemplo, que esta segunda forma es especialmente útil con los datos del georradar VIRL-2a (y VIRL6), ya que deben ser convertidos al formato SEG2 para poder ser importados por ReflexW, y esto se hace mediante el programa *drs2seg2* (*drs6seg2*), que es capaz de recortar la ventana espacial.

3.2.3.2 Redistribución e interpolación de trazas

Las trazas del radargrama no siempre son equidistantes; sin embargo, ciertos pasos del procesado exigen dicha condición (*e.g.*, análisis de velocidad o migración). Es frecuente que las medidas en campo se realicen registrando las trazas a intervalos de tiempo constantes. En tal caso, si se producen variaciones en la velocidad de desplazamiento del georradar, la distancia entre trazas resulta variable. Si se dispone de esta información, puede resolverse el problema. ReflexW dispone de funciones para redistribuir las trazas y en su caso introducir nuevas trazas como interpolación de las existentes. Para ello ofrece diferentes alternativas (RW3, §1.11.6).

Al importar un perfil se incluye la distancia entre sus trazas extremas a través de las coordenadas indicadas en la cabecera del fichero (CFhdr). ReflexW supone equidistancia entre las trazas, independientemente de lo que indiquen las coordenadas de sus cabeceras (CThdr). Esta es la manera básica de trabajar con trazas equidistantes que ofrece ReflexW. Pero existen otras más flexibles.

A partir del perfil dado, la función *markerinterpol* construye otro de trazas equidistantes, respetando la ubicación de las trazas cuya posición sea conocida, a las que se conoce como marcadores (*markers*). El acceso a esta función se realiza a través de

Processing → *Trace Interpolation/Resorting* → *markerinterpol*.

ReflexW supone que las trazas son equidistantes en cada tramo entre marcadores sucesivos. Los datos que ReflexW necesita para generar el nuevo

perfil son los números de traza de los marcadores (*trace nr.*), las distancias entre cada par de marcadores sucesivos (*marker inc.*), y la nueva distancia entre trazas que se desee conseguir (*trace increment*), que debe ser un divisor común de todas las distancias entre marcadores. Para cada par de marcadores sucesivos, ReflexW calcula el número de trazas necesario entre ambos dividiendo la distancia que los separa entre la distancia entre trazas deseada (*marker inc.* / *trace inc.*). ReflexW añade (por interpolación) o elimina trazas en cada tramo, según falten o sobren trazas en los datos, para respetar la nueva distancia entre trazas y las distancias entre marcadores impuestas. Las trazas anteriores al primer marcador y las posteriores al último son, por defecto, desechadas, si bien pueden conservarse. Los datos pueden introducirse manualmente, ya sea por teclado o interactivamente con el ratón, o a partir de las cabeceras de las trazas (subopción *ReadMarker*). También pueden grabarse (*save*) o recuperarse (*load*) desde un fichero ASCII, con el nombre que se desee, y extensión *.mar*. El fichero debe contener una fila por cada marcador, y dos columnas, con el número de traza en la primera y el incremento hasta el siguiente marcador, en la segunda (este dato se desprecia en la fila del último marcador).

Otra opción para generar un perfil de trazas equidistantes con ReflexW es la función *traceincr-resampling*, con la que se realiza un nuevo muestreo espacial (*resampling*), *i.e.*, se genera una secuencia de trazas nueva a partir de un nuevo valor para la distancia entre trazas. El acceso a esta función se realiza a través de

Processing→*Trace Interpolation/Resorting*→ *traceincr-resampling*.

ReflexW considera equidistantes todas las trazas que componen el perfil original, y tan sólo añade o elimina trazas, según falten o sobren, para

respetar la nueva distancia entre trazas. Esta función es de especial utilidad si se necesita combinar perfiles con diferente muestreo espacial (*i.e.*, diferentes distancias entre trazas en los datos). Por defecto, las trazas añadidas se obtienen duplicando otras existentes, si bien pueden obtenerse por interpolación, utilizando la opción *expand*.

ReflexW ofrece otra opción para generar un perfil de trazas equidistantes. La función *make equidist.traces*, lo realiza a partir de datos en los que las coordenadas de las trazas son conocidas, pero no equidistantes. El acceso a esta función se realiza mediante

Processing → *Trace Interpolation / Resorting* → *make equidist.traces*.

Interpolando sobre de las trazas originales, ReflexW genera otras nuevas, éstas sí, equidistantes. Para ello, es preciso que en la cabecera de las trazas el parámetro *distance* sea correcto y fiel.

ReflexW dispone de otras funciones para redistribuir las trazas, pero no resultan de utilidad para su uso con los perfiles de georradar.

3.2.3.3 Corrección del desplazamiento DC (supresión de la componente continua)

La Figura 3-20 muestra los paneles de opciones para la corrección del desplazamiento DC (§2.2.3), utilizando las tres funciones que ofrece ReflexW para ello (RW3, §1.11.1). Todas ellas son accesibles a través de *Processing→1D filter*. Estas funciones son:

- *Substract DC-shift*, que realiza la substracción, a cada muestra de cada traza, de la media de la misma. Su aplicación exige la elección de los instantes de comienzo (*1.time ns*) y fin (*2.time ns*) de la ventana temporal para el cálculo de la media que se resta a toda la traza.

- *Substract-mean* (*dewow*), que substrae, a cada muestra de cada traza, la media de una ventana móvil centrada en dicha muestra. La ventana móvil se desplaza muestra a muestra, calculando la media, que resta al punto medio de la ventana Esta función necesita como parámetro la longitud de esta ventana móvil (*timewindow ns*).

- Un filtro de paso alto de Butterworth, obtenido a partir del de paso banda que ofrece ReflexW (*bandpassbutterworth*). La eliminación de las bajas frecuencias corrige el desplazamiento DC (frecuencia nula). Para obtener el filtro de paso alto deseado se elige un valor como frecuencia de corte inferior (*lower cutoff*). A modo de orientación, se indica que debe buscarse un valor para este parámetro entre las frecuencias inferiores a la mitad de la central del pulso del georradar. Valores altos de este parámetro producen mayor efecto de filtrado. Su valor debe tantearse, escogiendo uno alto (cercano al indicado), que no llegue a perturbar a la señal.

  Aprovechando la elección de este filtro puede realizarse simultáneamente el filtrado de paso bajo que elimine el ruido de alta frecuencia, que de otro

modo habría que realizar posteriormente (§3.2.3.8). Esto se consigue introduciendo la frecuencia de corte superior (*upper cutoff*), por lo que el filtro elegido resulta de paso banda. Para ello se propone probar frecuencias superiores a una vez y media la central del pulso del georradar, tan bajos como sea posible, pero sin que suavicen la señal. Son habituales los valores situados entre dos y tres veces la frecuencia central del pulso.

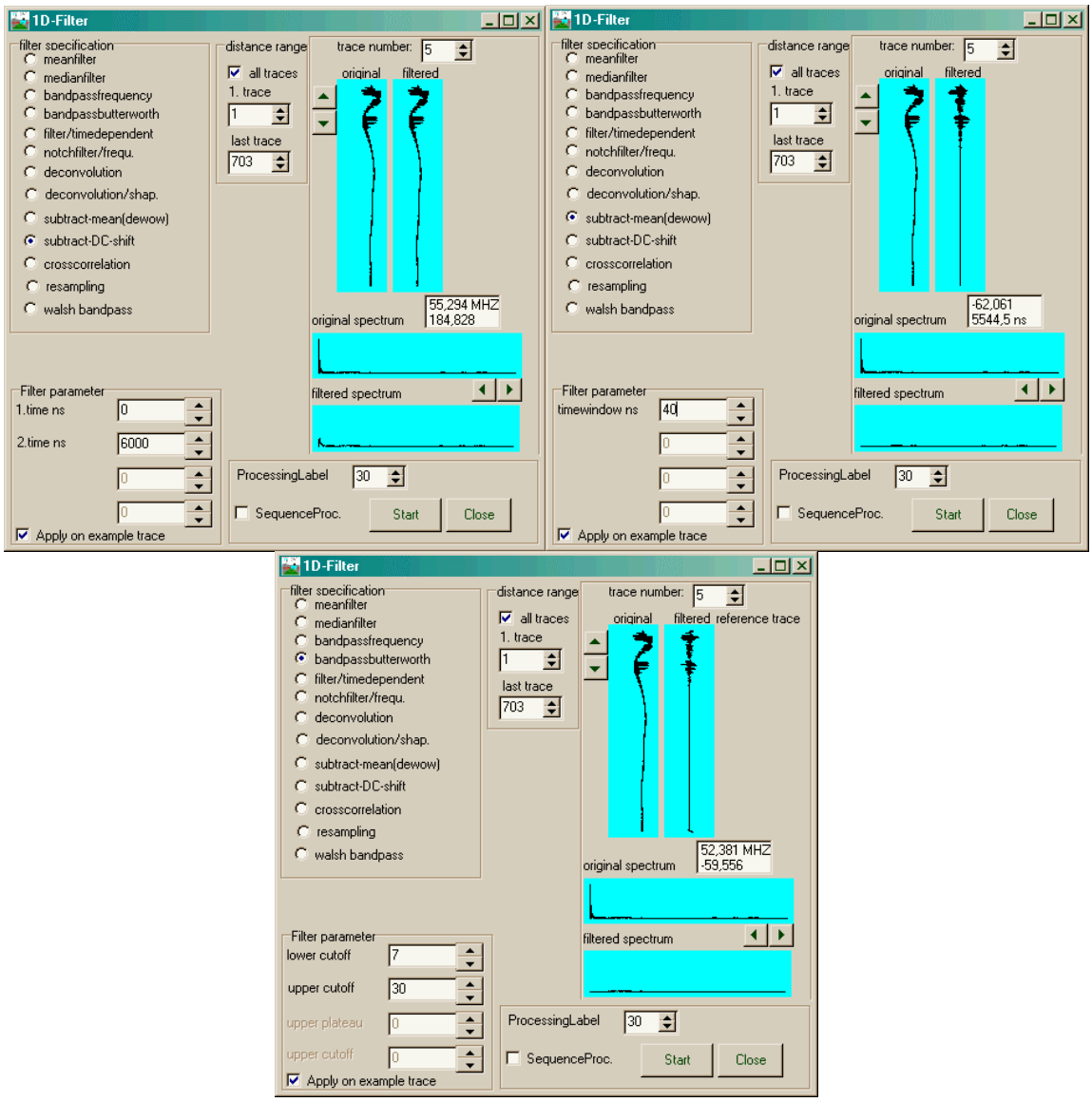

Figura 3-20 a) Corrección DC por resta de media en ventana fija;
b) Corrección DC por resta media en ventana móvil;
c) Filtro de paso banda de Butterworth (7-30 MHz).

La elección de uno u otro método depende de la calidad de los datos. Los datos que presentan un desplazamiento DC constante pueden ser corregidos por una simple substracción del valor de la media determinado para cada traza. Sin embargo, si existe una ondulación en la traza (cosa habitual), es necesario eliminar la componente de baja frecuencia superpuesta a la continua. En estos casos debe utilizarse el filtro de Butterworth o la ventana móvil (*dewow*), capaces de eliminar esa baja frecuencia (DC variable).

En los paneles de la Figura 3-20 pueden observarse los resultados de la aplicación de cada una de las distintas funciones, sobre una misma traza, registrada por un georradar con frecuencia central de 15 MHz (VIRL-2a). Cada panel presenta el resultado de su función en dos ventanas interiores, que contienen la traza antes y después de aplicar la función (*original* y *filtered*) y sus espectros respectivos en otras dos (*original spectrum* y *filtered spectrum*). La Figura 3-20a muestra la corrección DC por resta de la media en una ventana fija tomada entre 0 y 6000 ns. La Figura 3-20b presenta esta misma corrección DC, pero realizada por resta de una media en una ventana móvil (*dewow*) de 40 ns. Puede apreciarse la mejora en el resultado obtenido. En la Figura 3-20c se presente la corrección mediante un filtro de paso banda de Butterworth de 7 a 30 MHz. Su resultado resulta similar al del *dewow*, superando claramente a la substracción de la media.

Suprimida la componente DC, puede replantearse la opción de visualización de las trazas mediante líneas continuas, para lo que basta con volver al panel de *Plot-Options* (§3.2.2.4).

3.2.3.4 Edición de trazas

En los radargramas aparecen con frecuencia trazas con errores, por diversos motivos, entre los que el más frecuente es un fallo del sistema georradar. Para que no influyan en la efectividad de algunos algoritmos (*e.g.*, filtrado, migración), es necesario eliminar las trazas ruidosas, pero sin que desaparezcan, para respetar la equidistancia entre trazas. Por ello, en lugar de extraer las trazas ruidosas, se procede a modificar su contenido. Pero, como se ha mostrado en la elección de la ventana espacial (§3.2.3.1), también puede interesar eliminar físicamente las trazas sobrantes, si posteriormente se restablece la geometría del perfil. Todas estas funciones, en conjunto, se engloban en la edición de trazas (*edit traces/traceranges*, RW3, §1.11.7). El contenido de las trazas seleccionadas puede anularse (*set to zero*), puede interesar sustituirlas por duplicados de sus contiguas (*duplicate*), o por la interpolación de vecinas (*interpolate*), o corregir la polaridad de aquéllas que la tengan invertida (*reverse polarity*), o físicamente eliminar la traza (*remove*), etc.

La mecánica de la edición de trazas es muy similar en todas sus funciones, no así sus efectos. A modo de ejemplo, se presenta aquí la anulación de trazas, por ser más visible su efecto, si bien pueda ser la de menor uso. Ésta se realiza mediante *Processing*→*Edit traces/traceranges*→*set to zero*. La elección de las trazas puede realizarse utilizando el ratón sobre el perfil en la ventana principal, introduciendo manualmente sus números de traza por teclado, o también puede realizarse mediante un fichero externo (véanse las consideraciones comunes en el comienzo de §3.2.3). La Figura 3-21 muestra un ampliación del radargrama, con las trazas representadas en formato de líneas continuas, para que su efecto resulte más clarificador.

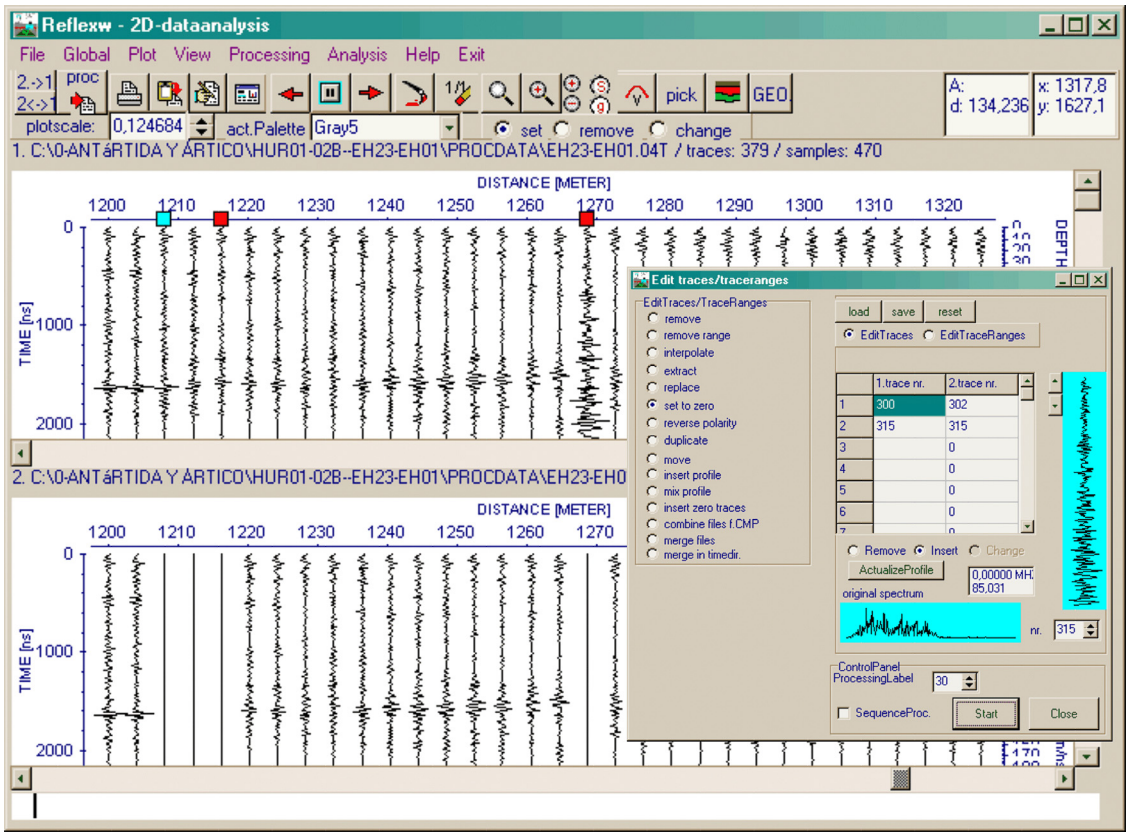

Figura 3-21 Ejemplo de edición (anulación) de trazas. Las selección de trazas aparece marcada en la ventana primaria. En la secundaria se anula la amplitud de las trazas elegidas.

Debe tenerse cuidado al editar trazas en modo secuencia de procesado (*Sequence Processing* §3.2.1), ya que no todas las funciones de edición son compatibles con dicho modo. Pero incluso en las que existe compatibilidad, es necesario entrar previamente en este panel, elegir las trazas que deben editarse, y salvarlo en un fichero (*Save*). Ahora bien, la edición de trazas erróneas puede realizarse en cualquier momento (siempre antes de la ganancia, la deconvolución y la migración), por lo que aun en el caso de procesar en modo secuencia de procesado, pueden editarse primero, y luego procesar mediante secuencia.

3.2.3.5 Correcciones estáticas y dinámicas

En §2.2.1 y §2.2.2 se han expuesto las diferencias entre las correcciones estáticas y las dinámicas, y su necesidad en el procesado de registros de georradar. Aquí se exponen las posibilidades que en este ámbito ofrece ReflexW (RW3, §1.11.3).

Tanto las correcciones estáticas como la corrección dinámica se presentan en ReflexW agrupadas en un mismo menú, accesible a través de

$Processing \rightarrow StaticCorrection/muting$.

Las correcciones agrupadas en este menú abarcan un espectro de aplicación muy amplio, y su uso se describe en diferentes apartados:

- En §3.2.3.6 se expone el uso de una corrección estática (*time cut*) para obtener la ventana temporal.
- En §3.2.3.7 se expone el uso de una corrección estática (*move starttime*) para obtener la corrección del origen de tiempos, cuyo resultado se observa en la Figura 3-23.
- La Figura 2-20 (§2.2.1, p. 71), presenta una corrección estática (*static correction*) sobre un radargrama que presenta errores en el origen de tiempos de sus trazas.
- En la Figura 2-21, del mismo apartado, se presenta la corrección estática (*move starttime*) que se ha aplicado a un perfil para establecer su forma conforme a la topografía del terreno que representa (corrección topográfica).
- En la Figura 2-24 (§2.2.2, p. 73), se ha mostrado el efecto de la corrección dinámica sobre un perfil en *offset* común de 14m, que lo aproxima al perfil equivalente de *offset* nulo.

También la función *move* es una corrección estática, a pesar de encontrarse en el menú de edición de trazas

Processing→*Edit traces/traceranges*→*Move*.

Es equivalente a la función *static correction*. Su operativa difiere en parte, aunque el resultado es similar. En *Static correction*, la tabla de selección identifica cada traza por su *distance* (*i.e.*, coordenada X del radargrama visualizado), mientras que *Move* lo hace por su número de traza. En ambos casos, la tabla de desplazamientos se puede importar o exportar. La selección interactiva por ratón es también diferente. En *Static correction*, se seleccionan puntos en la ventana primaria, y automáticamente la tabla obtiene sus coordenadas en el radargrama (CInt, §3.2.2.2); en *Move*, sin embargo, la traza seleccionada se desplaza verticalmente con el ratón, en forma de línea continua, hasta donde se desee, y la tabla obtiene el número de traza y el desplazamiento efectuado.

Por último, *Static correction* tiene tres modos de desplazamiento de los datos. Uno es descendente o de retardo (*move to positive times*), y los otros dos son de adelanto. De éstos, uno es ascendente, con recorte de tiempos negativos (*move to negative times*) y el otro ascendente sin recorte (*move to negative times/shift*), que equivale al desplazamiento descendente complementario. En éste último tipo se efectúa el desplazamiento negativo de los datos, pero simultáneamente se desplaza también el origen de tiempos hasta cancelar el mayor de estos desplazamientos (*i.e.*, desplazamiento positivo de los complementos respecto del máximo). En la Figura 3-22 se observan estos tres modos de desplazamiento sobre un mismo perfil (a), con la misma selección de valores de desplazamiento seleccionados. Los desplazamientos que ReflexW realiza son interpolaciones entre los seleccionados en la tabla.

En la Figura 3-22a se muestra además, artificialmente superpuesta, la secuencia de puntos marcados, mostrando la curva que con ellos se genera.

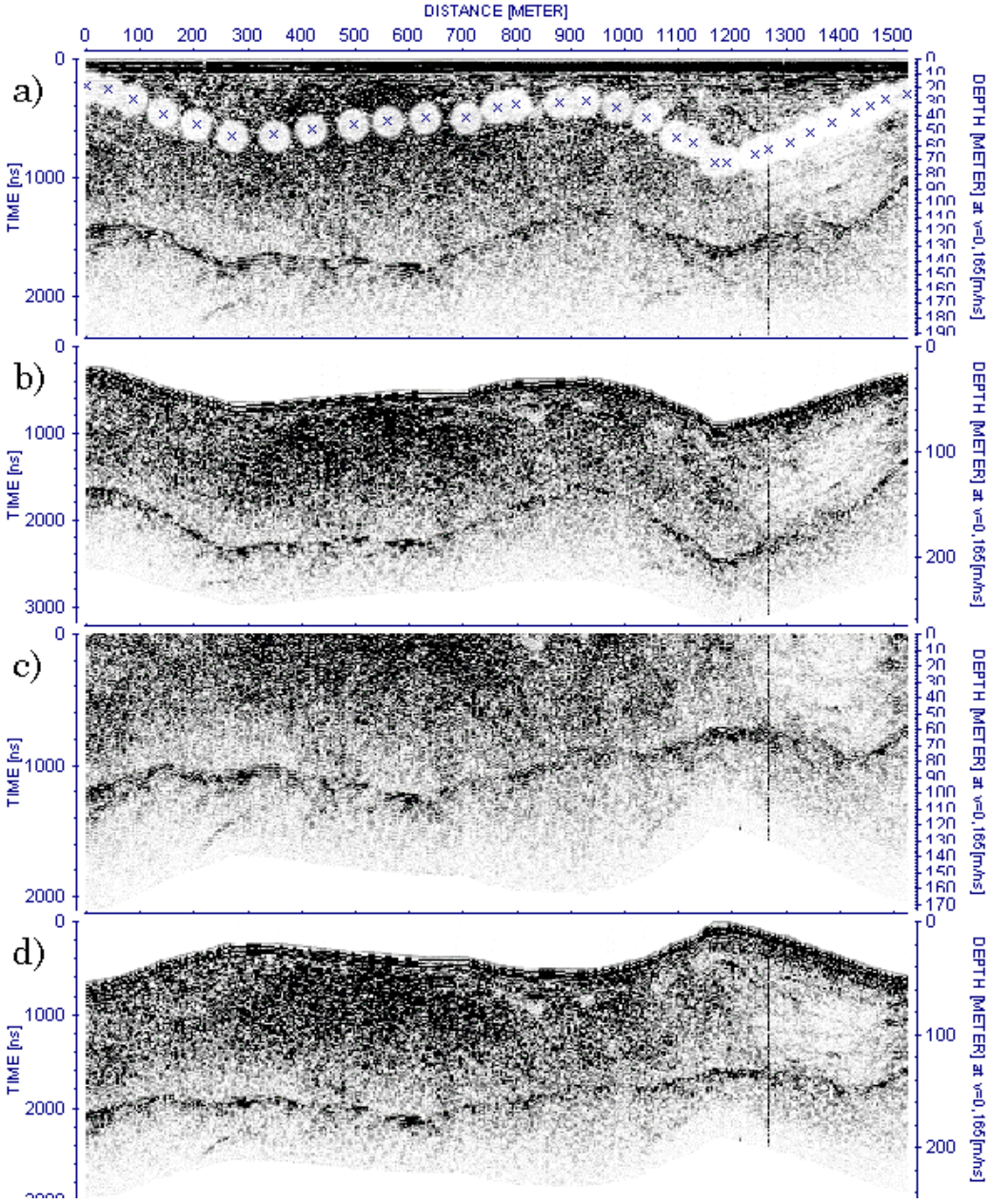

Figura 3-22 a) Perfil. Se han destacado artificialmente las selecciones de *static correction* por clic de ratón sobre la ventana primaria; b) resultado de realizar *static correction* con *move to positive times* sobre el perfil anterior; c) ídem con *move to negative times*; d) ídem con *move to negative times/shift*.

3.2.3.6 Elección de la ventana temporal

La ventana temporal de un radargrama es el intervalo de tiempo que se tiene en consideración, de todo el tiempo que se ha registrado en las trazas.

La reducción de la ventana temporal de trabajo agiliza los pasos del procesado y permite visualizarlos más eficazmente.

Durante la medición en campo con georradar, el registro de las trazas comienza antes de la transmisión y finaliza una vez transcurrido el tiempo preestablecido (*i.e.*, que previamente se ha determinado, para que las reflexiones en el lecho sean registradas). A posteriori, visualizadas ya las trazas, puede valorarse el exceso de tiempo de registro efectuado.

La duración de este exceso en su parte final es, habitualmente, muy superior a la del de su inicio. Por ello, se habla de la elección de la ventana temporal en referencia a la eliminación de las muestras sobrantes a partir de un tiempo máximo (*e.g.*, posteriores a 3500ns), mientras que se habla de corrección del origen de tiempos (§3.2.3.7), para referirse al recorte en su inicio.

El tiempo máximo de la nueva ventana temporal se establece mediante *Processing*→*StaticCorrection/muting*→*time cut* (RW3, p. 146).

3.2.3.7 Corrección del origen de tiempos

El registro anticipado que se realiza en la toma de datos mediante georradar supone un desplazamiento en el origen de tiempos de propagación o tiempo cero de las trazas, que es preciso corregir.

Mediante *Processing*→*Static correction/muting*→*move Start time* (RW3, p. 98) se puede desplazar el tiempo origen de las trazas. La Figura 3-23 muestra un detalle de la corrección del origen de tiempos en un radargrama.

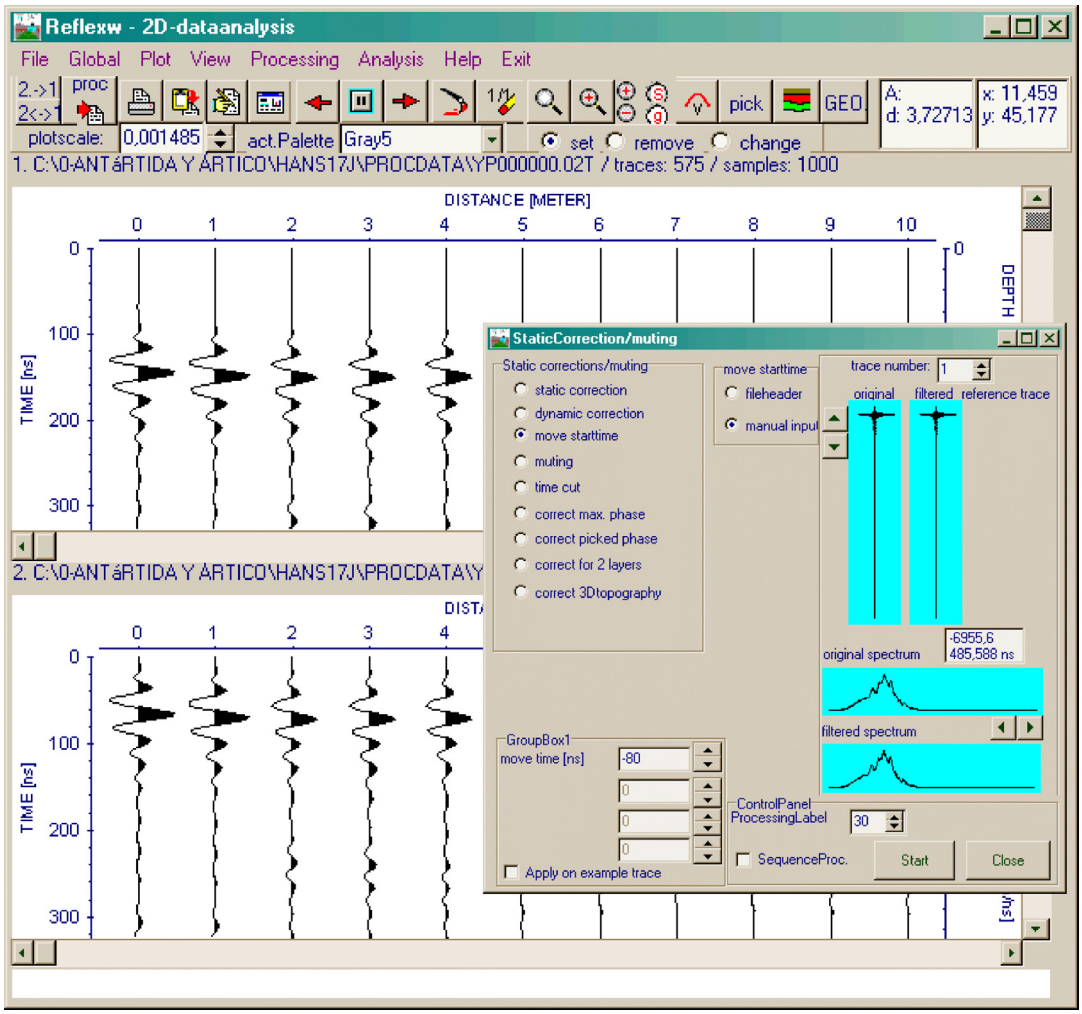

Figura 3-23 Ampliación de la corrección del origen de tiempos.
El panel *move start time* se muestra superpuesto a la ventana de los ficheros, mostrando la corrección de -80 ns.

El cálculo del parámetro *move time*, *i.e.*, de la corrección necesaria en el origen de tiempos, depende de la distancia entre las antenas durante la adquisición de los datos (*offset*, *d*). El desplazamiento temporal necesario (Δt), es igual al tiempo de llegada de la onda aérea a la antena receptora (t_A), menos el tiempo que tarda en viajar esta onda desde la antena emisora hasta la antena receptora. El valor negativo implica un desplazamiento ascendente de la traza en el eje temporal.

$$\Delta t = -\left(t_A - \frac{d}{c} \right), \tag{3.1}$$

donde c es la velocidad de propagación de la onda en el aire. Expresando la distancia en metros, el tiempo en ns, y suponiendo una velocidad de propagación de la onda en el aire de $3\ 10^8$ m s^{-1}, se tiene

$$\Delta t = -\left(t_A - \frac{d}{0'3} \right). \tag{3.2}$$

En el caso presentado, el tiempo de llegada de la onda directa es de $t_A \simeq 100$ ns y el *offset* del georradar $d = 6\,\mathrm{m}$, luego $\Delta t \simeq -80$ ns. La elección del instante de llegada de la onda directa influye en la futura determinación de las profundidades. En el ejemplo aquí expuesto, este instante se toma previo al primero de los tres picos principales del pulso. Esto determina la manera en que deben medirse las profundidades posteriormente. Si como llegada de la onda aérea se escoge otro instante del pulso, la corrección del origen de tiempos debe ser diferente, pero la elección de las profundidades se modifica de igual manera. Como referencia para valorar posibles errores futuros, nótese que 100 ns en el tiempo doble del radargrama, a una velocidad media de propagación en el hielo de $0'168\,\mathrm{m\,ns^{-1}}$ suponen, aproximadamente, 8'4 m de profundidad en el hielo.

3.2.3.8 Filtro de paso bajo

El ruido de alta frecuencia se elimina mediante un filtro de paso bajo.

La aplicación de un filtrado de paso bajo en ReflexW se realiza partiendo del filtro de paso banda (*bandpassbutterworth*). Para obtener el filtro de paso bajo deseado se elige un valor como frecuencia de corte superior (*upper cutoff*). Es recomendable realizar pruebas con diferentes frecuencias de corte superior. A modo de referencia, se propone probar valores entre una vez y media y tres veces la frecuencia central del pulso del georradar.

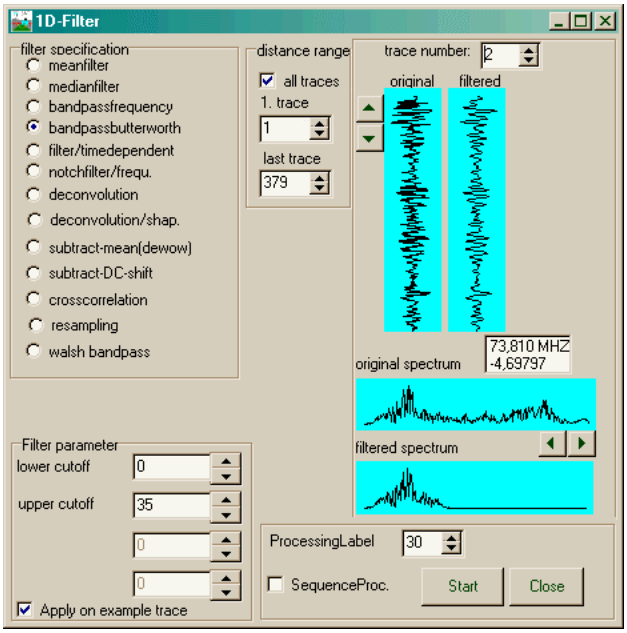

Figura 3-24 Panel de opciones de un filtro Butterworth de paso bajo.

La Figura 3-24 muestra el panel de opciones de un filtro de paso bajo, con frecuencia de corte a 35 MHz sobre una traza registrada por un georradar con frecuencia central de 15 MHz (VIRL-2a). El panel muestra además, en dos ventanas interiores, la traza antes y después de serle aplicada la función (*original* y *filtered*) y sus espectros respectivos en otras dos (*original spectrum* y *filtered spectrum*). En la Figura 3-25 se presenta un detalle del

resultado de la aplicar este filtro sobre el radargrama al que pertenece la traza anterior. Puede observarse en ambas figuras cómo el ruido de alta frecuencia queda eliminado tras la aplicación del filtro.

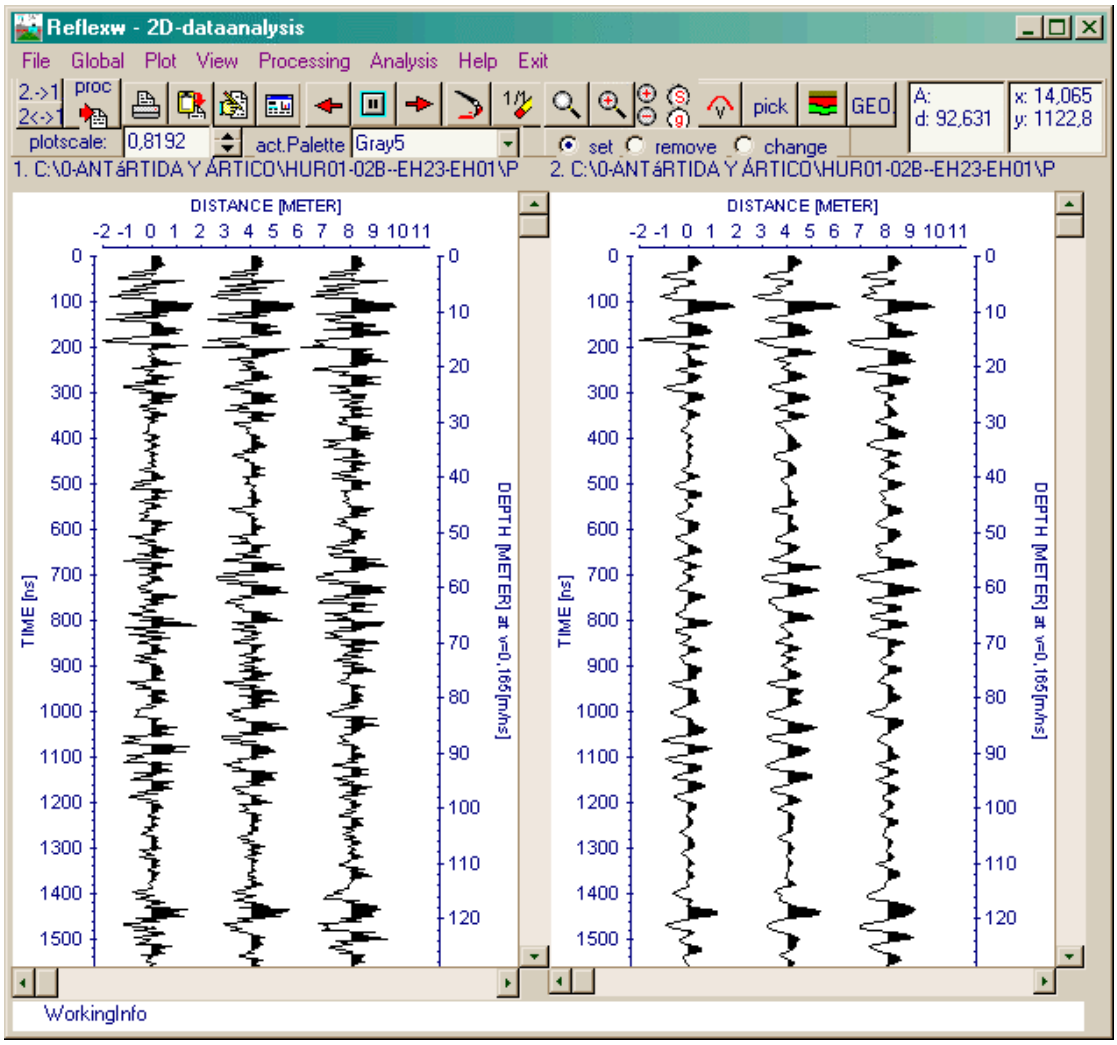

Figura 3-25 Ejemplo de filtrado de paso bajo.

Este paso no es necesario si se ha utilizado un filtro de paso banda de Butterworth para corregir el desplazamiento DC (§3.2.3.3). En otro caso, sin embargo, conviene probar un filtrado de paso banda, en lugar del de paso bajo, para eliminar los restos de bajas frecuencias espurias existentes.

3.2.3.9 Escalado de amplitudes

Bajo el menú *Processing*→*Gain*, ReflexW ofrece diferentes funciones para aplicar una ganancia a la amplitud de los datos de entrada (RW3, §1.11.2).

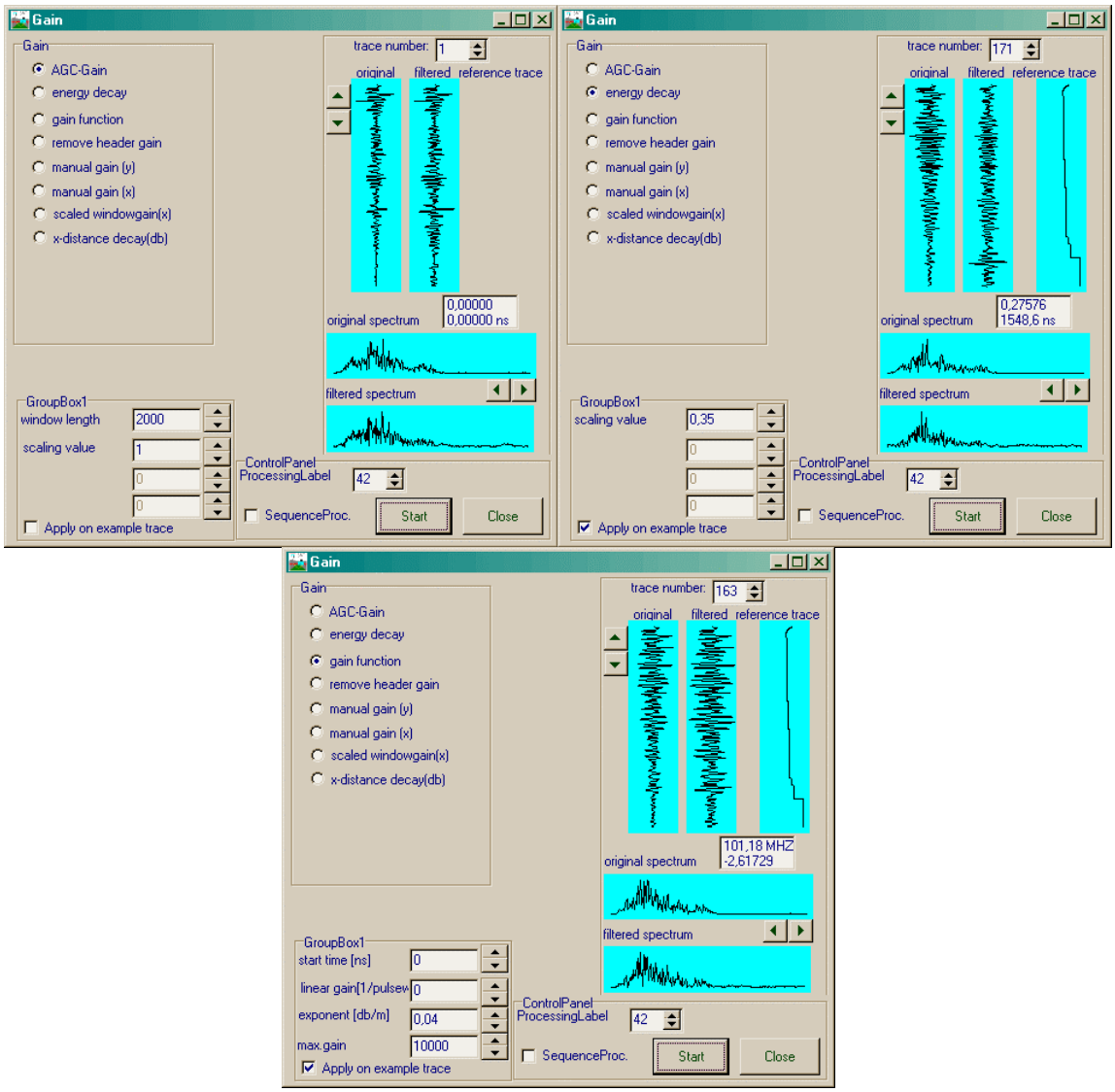

Figura 3-26 Panel de opciones de ganancias AGC, energy decay, y función con términos lineal y exponencial.

La Figura 3-26 muestra el panel de opciones *Gain*, con tres tipos de ganancia diferentes seleccionadas, cuyos resultados se muestran en la Figura 3-27.

La ganancia AGC (*Autamatic Gain Control*), regula la distribución de amplitudes media en una ventana temporal cuya dimensión se introduce a través del parámetro *window length*. Elegido un tamaño corto para esta ventana, el efecto del filtro resulta muy acentuado, siendo menor su efecto cuanto mayor sea aquélla.

Existe otra ganancia de amplitud automática y variable. Se adapta al decaimiento energético de la traza en el tiempo. El filtro *energy decay* calcula la curva de variación temporal de la energía en una traza, obtenida como media de todas las trazas del perfil. Suavizada esta curva por un filtro de mediana, se aplica en cada muestra de cada traza, dividiendo el valor de la muestra entre el valor de la curva de decaimiento obtenida.

Ambas funciones tienen un parámetro de escala, que sirve para aprovechar el margen dinámico que proporciona el formato de los datos en que se trabaje (enteros de 16 bit, o coma flotante con 32 bits).

En ambos casos puede aparecer un efecto no deseado sobre las perturbaciones superficiales. La gran amplitud de la onda directa ejerce un efecto atenuante sobre las perturbaciones que le sean cercanas. Utilizando ventanas AGC grandes, este efecto resulta de menor importancia.

En la Figura 3-27 se pueden comparar, sobre un mismo perfil, los efectos de estos dos filtros automáticos de ganancia con el de un tercero, el de ganancia exponencial. A diferencia de los anteriores, la aplicación de una ganancia exponencial mantiene la amplitud de estas señales tempranas, aumentando las recibidas desde mayores profundidades. ReflexW añade un término lineal a esta ganancia nombrando su suma como *gain function*. Esta función es más conforme con la realidad de las reflexiones, ya que no eleva su ganancia por ser de amplitud baja, sino por la profundidad donde se ha generado.

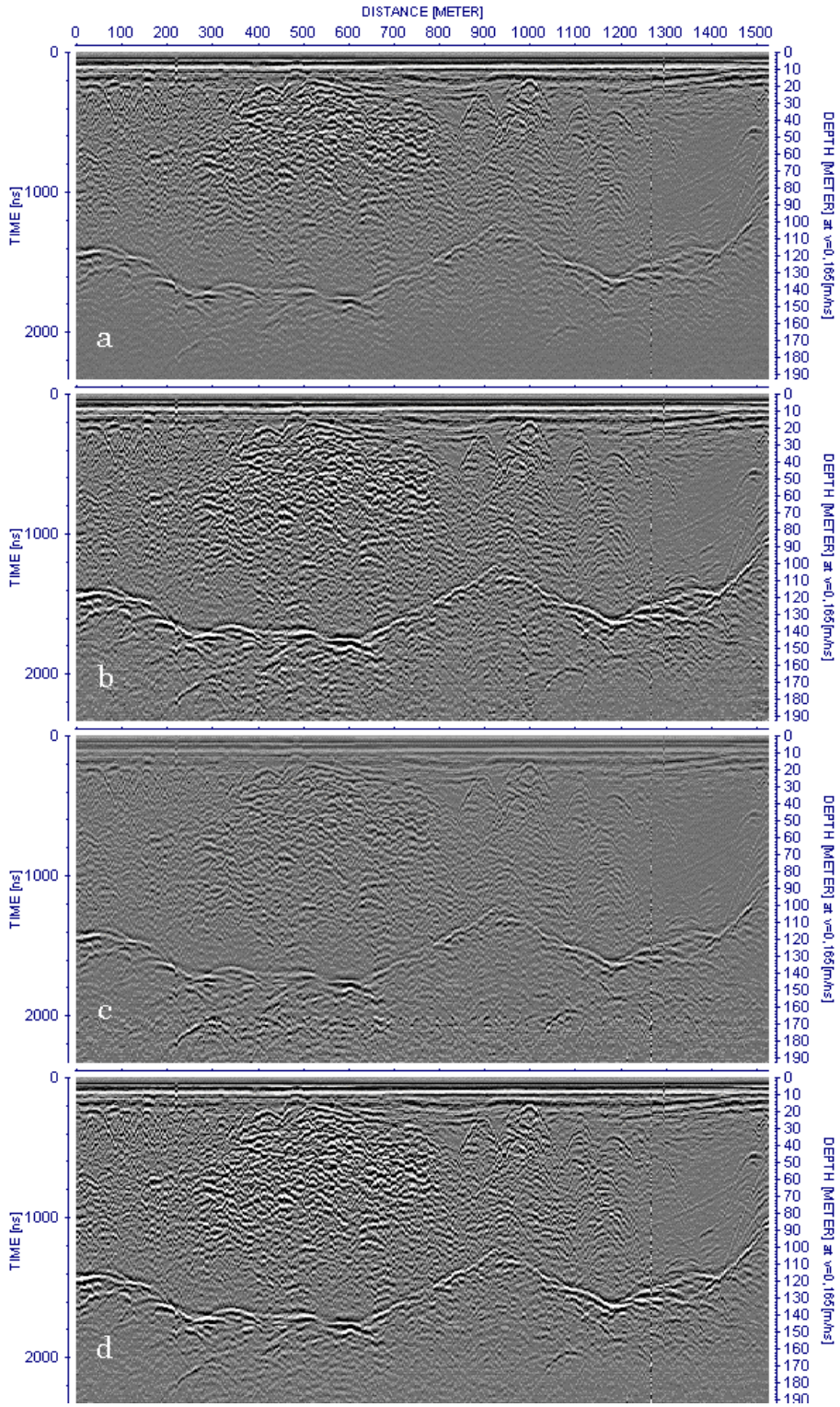

Figura 3-27 a) Perfil sobre el que se aplican las 3 ganancias (Figura 3-26);
b) Resultado de la ganancia AGC (ventana de 2000ns);
c) Resultado de la ganancia *energy decay*;
d) Resultado de la ganancia exponencial.

Puede compararse el resultado obtenido en este perfil con el presentado en la Figura 3-28. En ella se presenta otro perfil, sobre el que se han aplicado los tres mismos tipos de ganancia. En la Figura 3-28b se observa el resultado de una ganancia AGC, con longitud de ventana AGC de 2000 ns. La Figura 3-28c muestra el mismo perfil, sobre el que se ha aplicado una ganancia *energy decay*. En la Figura 3-28d puede apreciarse el efecto de una ganancia exponencial, aplicada sobre el perfil mostrado en la Figura 3-28a.

Utilizando la función de ganancia AGC disminuyen las amplitudes de las señales más superficiales, lo que afecta a la parte más superficial de los reflectores de interés. Puede observarse la pérdida de amplitud de las perturbaciones recibidas en los primeros 1300 ns, debido al efecto de la onda directa, mientras que en la zona situada bajo la señal I, a una distancia inferior a los 300 m, y a partir de 1500 ns se producen espurios por saturación de la gran ganancia obtenida en esta zona sin señal aparente.

Con el filtro *energy decay* aparece un nuevo efecto indeseable. Si bien la atenuación de las reflexiones superficiales no es tan considerable, a partir de los 1800 ns el perfil queda anulado. Este efecto de corte se produce por la saturación de la ganancia en profundidades donde la traza toma valores muy bajos. Pero en este filtro, la curva se obtiene para todas las trazas por igual.

En la práctica es necesario evaluar uno u otro filtro de ganancia, sopesando la presencia de reflexiones superficiales y los efectos producidos, para elegir cuál debe utilizarse. ReflexW ofrece también la posibilidad de introducir manualmente una curva de ganancia [*manual gain (y)*], que puede ajustarse interactivamente. Puede ser de utilidad para casos complicados. Además, se ofrecen ganancias con variación horizontal (en *x*), sin utilidad en los registros de georradar, por *offset* común.

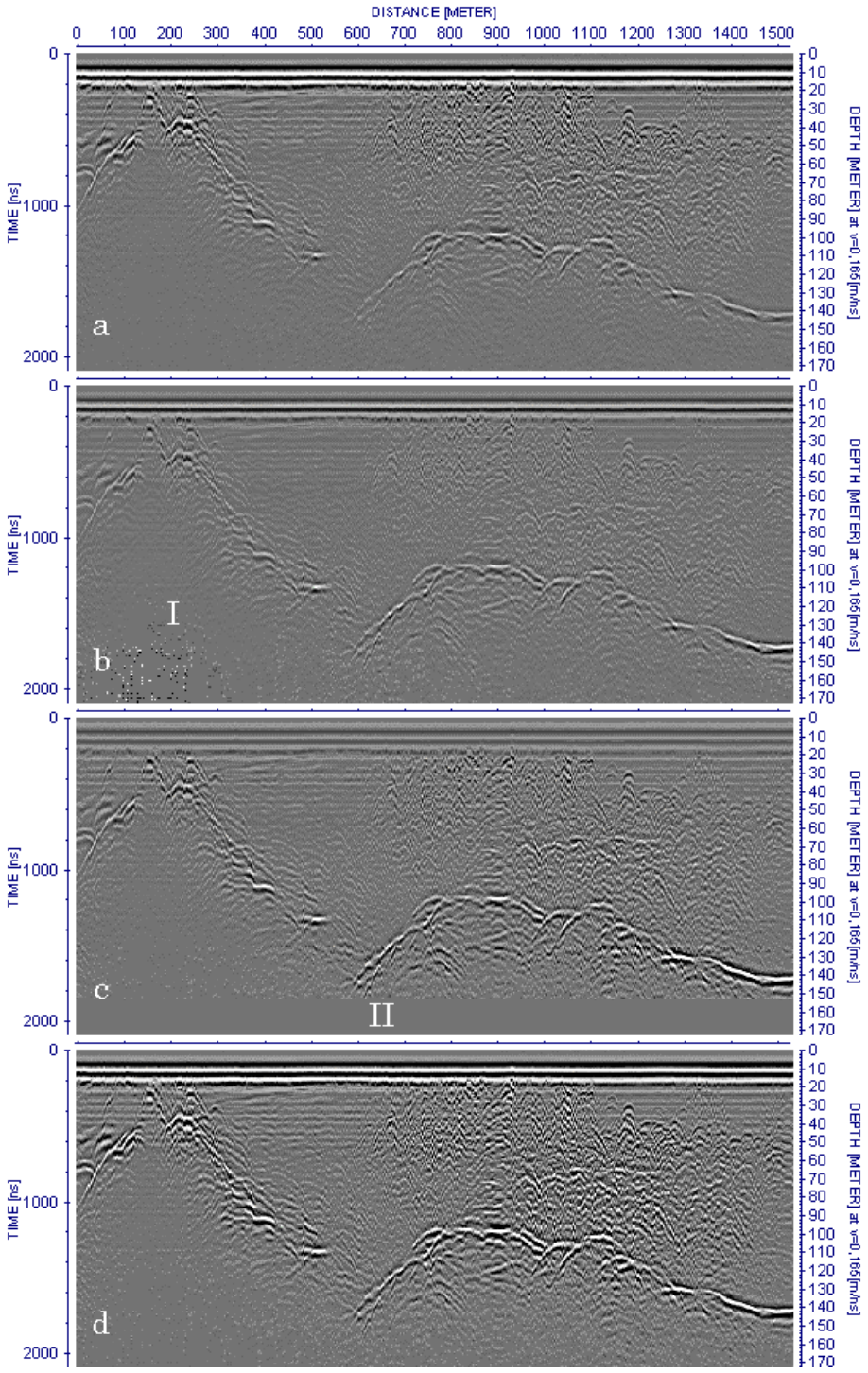

Figura 3-28 a) Perfil sobre el que se aplican las 3 ganancias siguientes:
b) Resultado de una ganancia AGC (ventana de 2000ns);
c) Resultado de una ganancia *energy decay*;
d) Resultado de una ganancia exponencial.

3.2.3.10 Deconvolución

Entre sus funciones de procesado, ReflexW ofrece varios tipos de deconvolución (RW3, p. 129-130), a las que se accede a través del menú *Processing*→*1D Filter*. Dentro de este menú, hay dos posibles grupos de filtrado dedicados a la deconvolución (Figura 3-29).

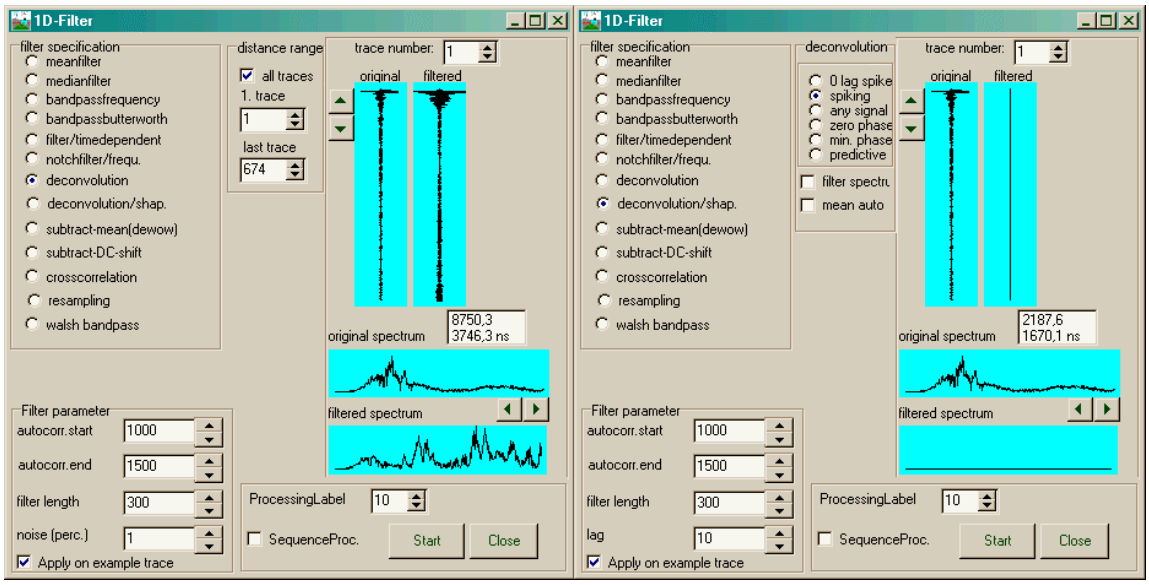

Figura 3-29 Paneles de opciones de las deconvoluciones impulsivas.

Las deconvoluciones que ReflexW ofrece son de tipo estadístico (§2.2.6), por lo que utilizan la autocorrelación de la traza para estimar la forma de onda del pulso generado en la fuente.

Hay tres parámetros comunes a todos los tipos de deconvolución ofrecidos: los dos primeros son los instantes de comienzo y fin de la ventana temporal donde realizar la autocorrelación (*autocorr. start* y *autocorr. end*), y el tercero es la longitud que debe tener este filtro deconvolutivo (*filter length*).

El primer tipo de deconvolución ofrecida es una deconvolución impulsiva, que se obtiene a través de la opción *deconvolution*, y que dispone de un cuarto parámetro, que es el porcentaje de ruido blanco que se debe introducir para estabilizar la inversión (*noise perc.*).

A diferencia del anterior, el segundo grupo de filtrado ofrece una variedad de tipos de deconvolución. Se accede a éste mediante *Deconvolution/shap*, donde se encuentran las deconvoluciones de tipo 0 *lag spike*, *spiking*, *any signal* (no disponible en ReflexW 3), *zero phase*, *min. phase* y *predictive*, que a continuación se detallan. Estas deconvoluciones tienen un cuarto parámetro, *lag*, que es el retardo en la predicción. Además disponen de dos opciones de cálculo, denominadas *mean auto* y *filter spectrum*. La activación de la primera supone que la autocorrelación utilizada para cada traza es la media de las autocorrelaciones de todas las trazas. Es conveniente activarla, dado que se asegura el mantenimiento de la coherencia espacial de los resultados. La segunda opción (*filter spectrum*) ofrece la posibilidad de que en el mismo paso de la deconvolución, aunque tras ésta, se realice un filtrado de paso banda del resultado. La existencia de esta opción se fundamenta por la tendencia general de la deconvolución a introducir ruido de alta frecuencia. En determinados casos puede ser útil como herramienta provisional para observar el resultado filtrado y decidir así los parámetros deconvolutivos más adecuados, sin necesidad de perder el panel de la deconvolución. Sin embargo, es mucho más eficiente realizar el filtrado en un paso posterior, con la elección más adecuada de las frecuencias de corte.

Tanto 0 *lag spike*, como *spiking* son también deconvoluciones impulsivas, pero basadas en diferentes implementaciones del algoritmo deconvolutivo. La deconvolución 0 *lag spike* proporciona una deconvolución impulsiva con concentración de la energía al comienzo de la forma de onda (el parámetro *lag* no es operativo en esta deconvolución), mientras que la deconvolución

spiking pretende concentrar la energía de cada forma de onda en la posición (retardo) que indique el parámetro *lag*, cuyo valor ideal es el del instante de máxima energía en la forma de onda del pulso.

Las deconvoluciones *zero phase* y *min. phase* transforman la forma de onda en su equivalente de fase nula y mínima, respectivamente. En la práctica su diferencia es poca, aunque la segunda precisa de mayor tiempo de cálculo.

Por último, la deconvolución predictiva (opción *predictive*), cuyos parámetros se han detallado en §2.2.6, puede suprimir las reverberaciones posteriores al retardo, en la longitud del filtro, pero también las reflexiones múltiples generadas por caminos indirectos (conocidas como múltiples). Dado su funcionamiento, la supresión de reverberaciones se consigue estableciendo un pequeño valor del *lag* (que proporciona el ancho del pulso obtenido tras la deconvolución) y un tamaño de filtro igual al tiempo doble que dura esta reverberación. Para suprimir múltiples, sin embargo, debe establecerse como valor de *lag*, el retardo, en tiempo doble, donde aparece el múltiple.

La Figura 3-30 muestra un ejemplo de deconvolución sobre un radargrama registrado el 23 de julio de 2003 en la línea denominada C1-C4 del glaciar Hansbreen (Hornsund, Spitsbergen). A la izquierda se encuentra éste tras un preprocesado que incluye filtrado y corrección de ganancia. A su derecha se muestra el resultado de una deconvolución 0 *lag spike*. Puede apreciarse el incremento en la resolución vertical, que a la vista aparece como un efecto de enfoque o incremento de la nitidez. La Figura 3-31 muestra un detalle de la anterior, donde puede observarse que la resolución temporal mejora tras el proceso de la deconvolución. Pero también se aprecia el aumento del ruido de alta frecuencia. Por ello, un apropiado complemento de la deconvolución es el posterior filtrado, que limpie de parásitos la imagen obtenida.

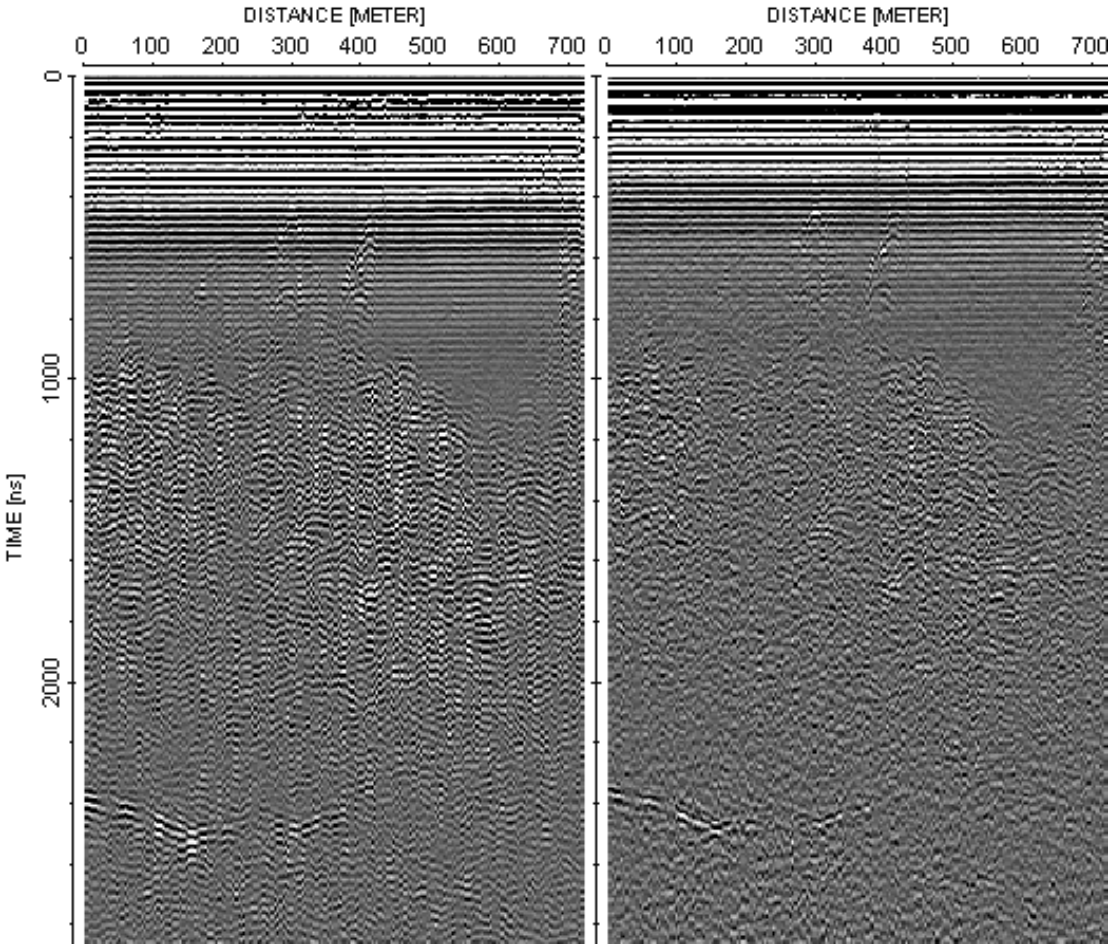

Figura 3-30 Ejemplo de la aplicación de una deconvolución (derecha) al fichero de entrada (izquierda).

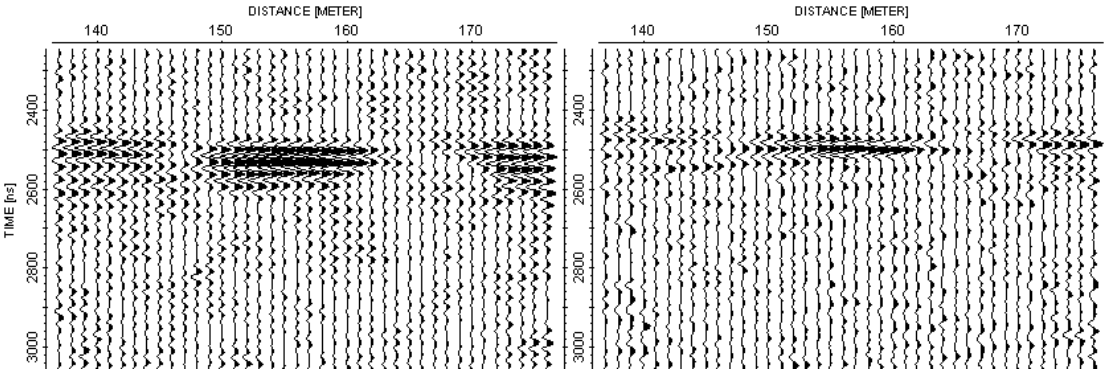

Figura 3-31 Detalle de la Figura 3-30:
- Izquierda: fichero de entrada.
- Derecha: después de la deconvolución.

3.2.3.11 Estudio de velocidades por ajuste de hipérbolas

Utilizando registros en configuración CMP existen varios métodos para el cálculo de las velocidades de propagación de la onda, como se detalla en §4.1. Sin embargo, no siempre es posible utilizar la técnica CMP para realizar este cálculo. La geometría habitual de adquisición de los datos de campo mediante GPR es la de *offset* común.

Un método para calcular la velocidad de propagación de la onda sobre un perfil de *offset* común consiste en estudiar las hipérbolas de difracción. Como se ha descrito en §2.1.14, la forma de la hipérbola depende de la profundidad (o del tiempo doble) y de la velocidad de propagación de la onda en el medio. Pueden realizarse plantillas acordes con la ecuación (2.66) para adaptar sobre las hipérbolas encontradas en el radargrama y reconocer así la velocidad existente. ReflexW tiene una herramienta que proporciona dichas plantillas y calcula automáticamente la velocidad a partir del ajuste a una hipérbola (RW3, §1.12.1).

Esto se realiza a través del menú *Analysis* → *Velocity Adaptation*, o mediante el icono del panel superior (Figura 3-32). Para ello ReflexW ofrece como plantilla una hipérbola azul de parámetros variables, que debe ser adaptada a las que existan en el radargrama. ReflexW permite realizar un fichero que represente una distribución 2D de velocidades, pudiendo también dejarse una sola velocidad para todo el plano. Esta distribución se genera fijando hipérbolas que se encuentren en diferentes posiciones *X-T*. La distribución generada puede guardarse en un fichero, como se explica más adelante, en este mismo apartado.

La Figura 3-32 muestra el ajuste realizado con una plantilla hiperbólica, y que se corresponde con una velocidad de 0'1692 $m\,ns^{-1}$.

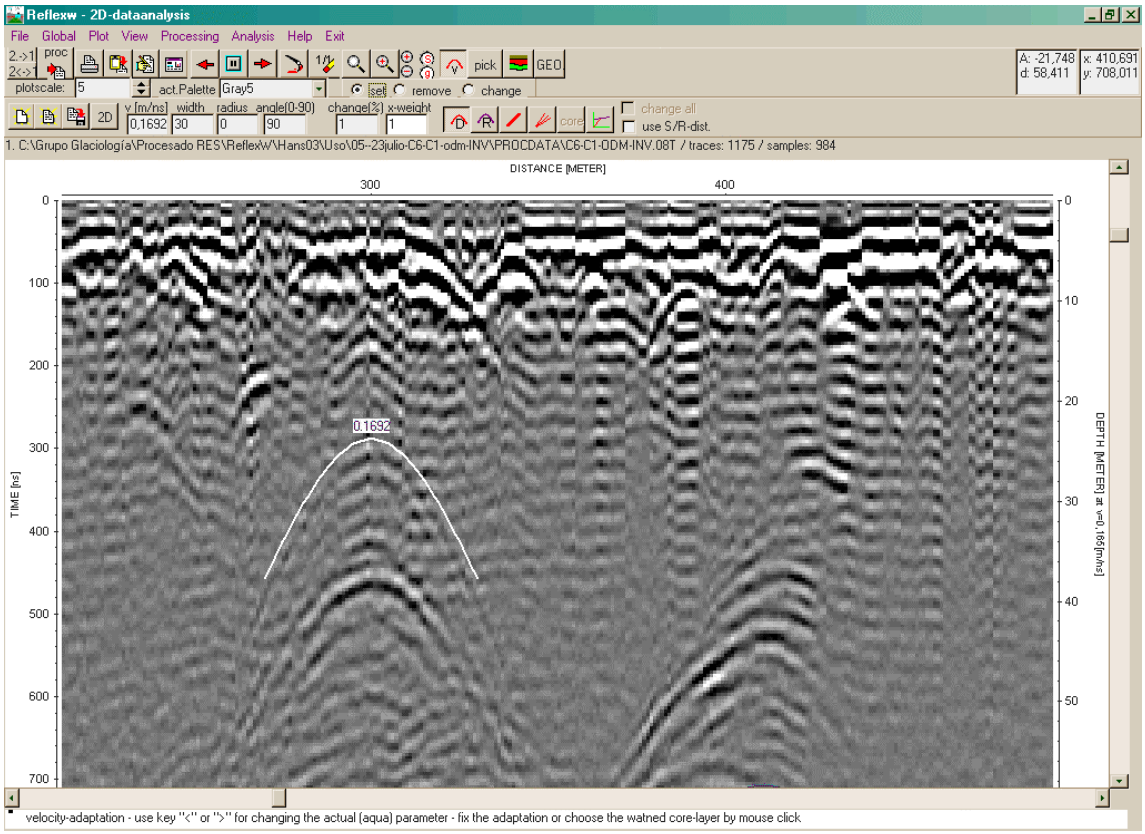

Figura 3-32 Ejemplo de cálculo de velocidades a partir del ajuste de la hipérbola de difracción.
La hipérbola, que el programa muestra en azul, ha sido blanqueada artificialmente para la figura.

Velocity Adaptation realiza el análisis tanto de hipérbolas de difracción (Icono D), como de reflexión (Icono R, que se utilizará en el caso de disponer de datos CMP). Es necesario que los datos de difracción sean de *offset* nulo (o equivalente, a través de la corrección dinámica), o en su defecto, que la distancia entre emisor y receptor resulte despreciable frente a la profundidad del objeto difractor, mientras que para los de reflexión se necesitan datos CMP.

Las opciones *change*, *set* y *remove* permiten, respectivamente, modificar los parámetros de la plantilla hiperbólica para adaptarla a una existente en el perfil; fijar la hipérbola (clic del ratón), con su correspondiente cálculo de velocidad; o eliminar una hipérbola previamente fijada, colocándonos nuevamente sobre ella (clic del ratón).

Los parámetros de la hipérbola en modo *change* son:

- *v*: velocidad ($\mathrm{m\,ns^{-1}}$) de propagación de la onda. Es el valor buscado. Debe modificarse hasta conseguir adaptación con cada hipérbola del perfil.

- *width*: número de trazas que debe ocupar la hipérbola mostrada

- *radius*: radio presumible del objeto fuente de la difracción. Póngase 0 si se supone puntual

- *angle*: ángulo presumiblemente formado entre la onda transmitida y la superficie del objeto difractor. Si se presume puntual, póngase 90 º.

- *x-weight*: Ponderación del eje x en la interpolación de velocidades, para obtener un distribución 2D (x-t). Valores suficientemente grandes generan distribuciones verticales de velocidad, sin dependencia con x; mientras que un valor nulo provoca distribución horizontal de velocidades, sin dependencia con t. El valor de ponderación neutra es el 1.

- *change* %: porcentaje que cuantifica el salto en el incremento o decremento para la variación de la velocidad.

Entrando en ellos en el panel de iconos con el ratón, pueden modificarse utilizando las teclas > y <, o tecleando nuevos valores.

Es posible deshacer todo el conjunto de hipérbolas fijadas, utilizando el icono *resets all adaptations* (primer icono de la última fila en la izquierda del panel *Velocity Adaptation*).

Puede también abrirse una distribución de velocidades ya creada (segundo icono de la última fila).

Una vez determinada la velocidad para las hipérbolas que consideremos oportunas, puede mostrarse la distribución de velocidades en un gráfico (icono 2D, cuarto de la última fila), generando además dos ficheros (veloc0001.dat y veloc0001.par, en ROHDATA).

Para generar una distribución de velocidad constante, se realiza este proceso utilizando una sola hipérbola con la velocidad deseada.

La distribución generada puede guardarse en un fichero con extensión *hyp*, utilizando el icono de *save adaptations on file* (tercer icono de la última fila). Estos ficheros son guardados por ReflexW en el directorio ROHDATA.

3.2.3.12 Migración

En §2.2.8 se ha introducido la migración y sus diferentes tipos. ReflexW ofrece varios algoritmos de migración (RW3, §1.11.9), a través de *Processing*→*Migration / Time-depth conversion* (Figura 3-33).

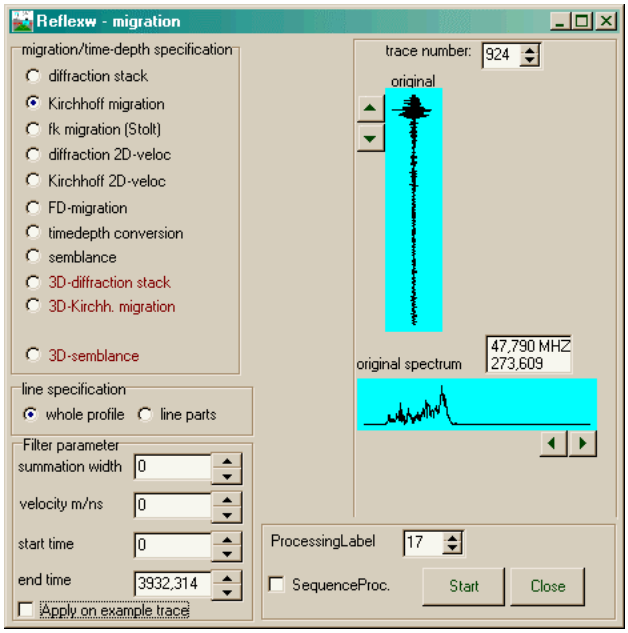

Figura 3-33 Panel de parámetros para la migración.

De estos algoritmos, *diffraction stack*, *Kirchoff migration* y *F-K migration* utilizan valores constantes para la velocidad. El resto de algoritmos (*diffraction 2D-veloc*, *Kirchoff 2D-veloc* y *FD migration*) requieren el uso de distribuciones de velocidad en el plano (*x-t*), si bien éstas podrían también estar definidas por una velocidad constante.

La bondad de un resultado depende de la elección de una serie de parámetros críticos (§2.2.8). A continuación se presenta el resultado obtenido de la aplicación de los algoritmos *Kirchoff migration*, *F-K migration* y *FD migration* para distintos valores de sus parámetros críticos, sobre un mismo perfil.

Migración de Kirchoff

Los parámetros críticos en la aplicación de la migración de Kirchoff son la apertura (número de trazas) para la realización de la suma y la velocidad de migración (§2.2.8).

La Figura 3-34 muestra un ejemplo de la influencia de la velocidad utilizada al aplicar una migración de Kirchoff al radargrama mostrado en a. En b, c, d y e se presenta el resultado de la migración para velocidades constantes de valores 145, 165, 185 y 205 $\mathrm{m}\,\mu\mathrm{s}^{-1}$, respectivamente, con apertura de 300 trazas en todas ellas.

Observando las difracciones existentes (*e.g.*, hipérbolas en 800 m), en el radargrama b se aprecian migraciones insuficientes (las hipérbolas no desaparecen) debido al empleo de una velocidad de migración baja, mientras que en los d y e se aprecian sobremigraciones (sonrisas o *smiles*) por exceso de velocidad. La velocidad correspondiente a c es la que consigue colapsar las hipérbolas, sin sobremigrar (165 $\mathrm{m}\,\mu\mathrm{s}^{-1}$).

En el lecho, a una distancia de 300 m puede apreciarse cómo el pico queda sobremigrado a partir de d, inclusive (aparecen artefactos con forma de bigote en el cambio de pendiente), y por comparación con b, la migración correcta se obtiene en c, al obtener mejor continuidad en la curva.

Pueden observarse más puntos del radargrama, confirmando como mejor velocidad de migración la correspondiente al radargrama c, 165 $\mathrm{m}\,\mu\mathrm{s}^{-1}$.

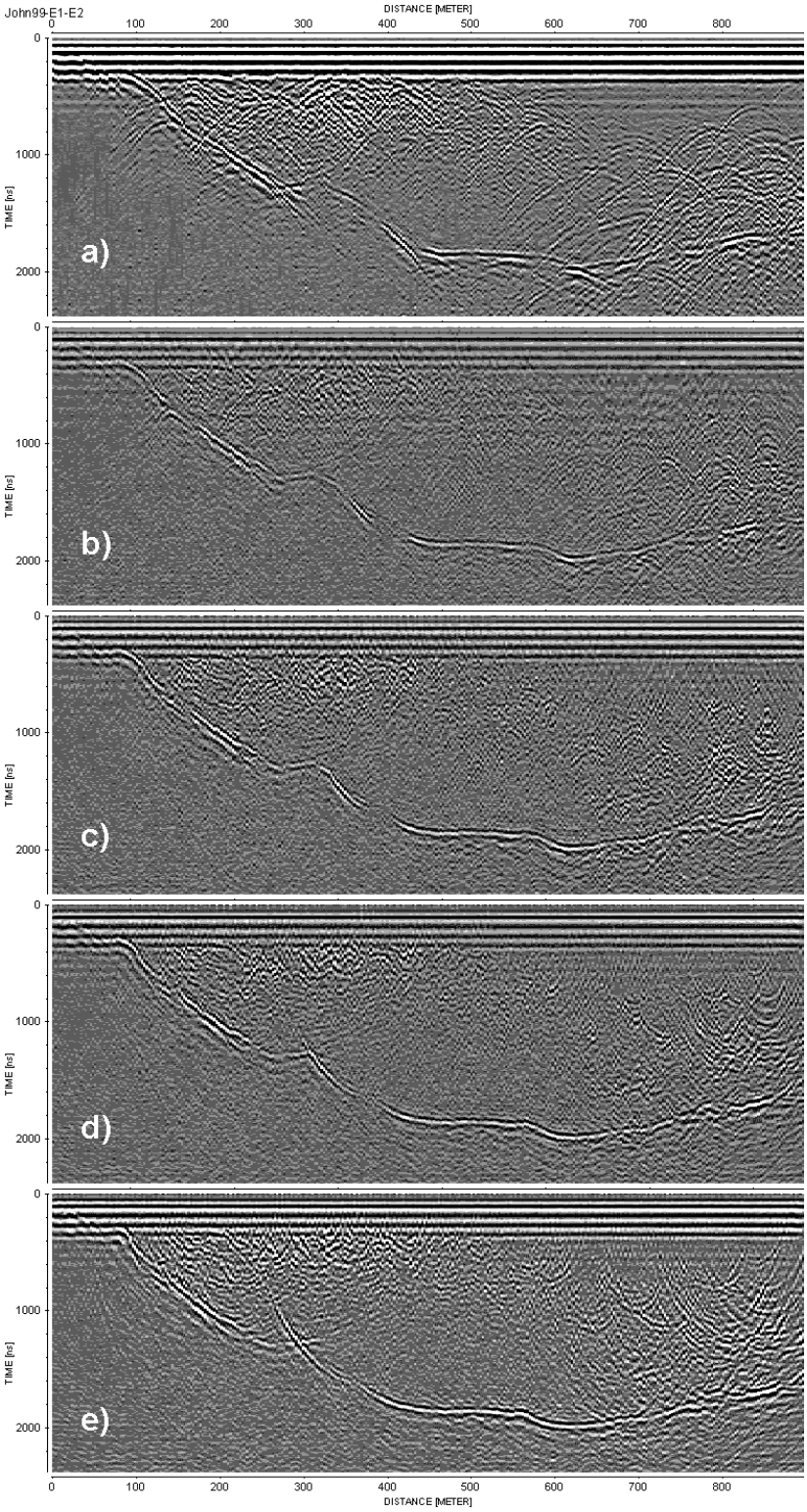

Figura 3-34 Influencia de la velocidad en la migración de Kirchoff.
a) Sección sin migrar;
b, c, d y e) Secciones migradas usando velocidades constantes de 145, 165, 185 y 205 m μs^{-1}. respectivamente.

El uso de aperturas pequeñas provoca la desaparición de las superficies de alto buzamiento tras la migración, y por otro lado, genera una tendencia a agrupar horizontalmente el ruido, formando reflectores horizontales ficticios. Sin embargo, el empleo de un valor excesivo para la apertura tiene como contrapartida la mayor necesidad de potencia de cálculo y una posible disminución en la relación señal-ruido.

Habitualmente se obtiene de forma experimental el valor óptimo de la apertura. Sin embargo, Yilmaz (1987, §4.3.1) propone la posibilidad de calcularla utilizando la expresión con la que Chun y Jacewitz (1981) relacionan la migración de un punto con la velocidad de propagación de la onda en el medio (v) y la pendiente del reflector al que pertenece:

$$d_x = \left(v^2\, t \tan\theta_t\right)/4\,. \tag{3.3}$$

Yilmaz propone el uso de d_x como valoración de esta semiapertura óptima, en metros, para la migración de una sección. Para ello aconseja utilizar la pendiente más escarpada de la sección, y en ella medir el tiempo doble hasta el reflector (t) y la pendiente aparente de dicho reflector en el radargrama sin migrar ($\tan\theta_t$). Cabe destacar que la relación de aspecto del radargrama afecta a la pendiente, pero lo hace de igual manera sobre d_x, por lo que el número de trazas obtenido como semiapertura no se ve afectado.

Yilmaz recomienda el uso de la apertura constante para todos los perfiles de una misma zona, para mantener la uniformidad en las características de amplitud de un perfil a otro.

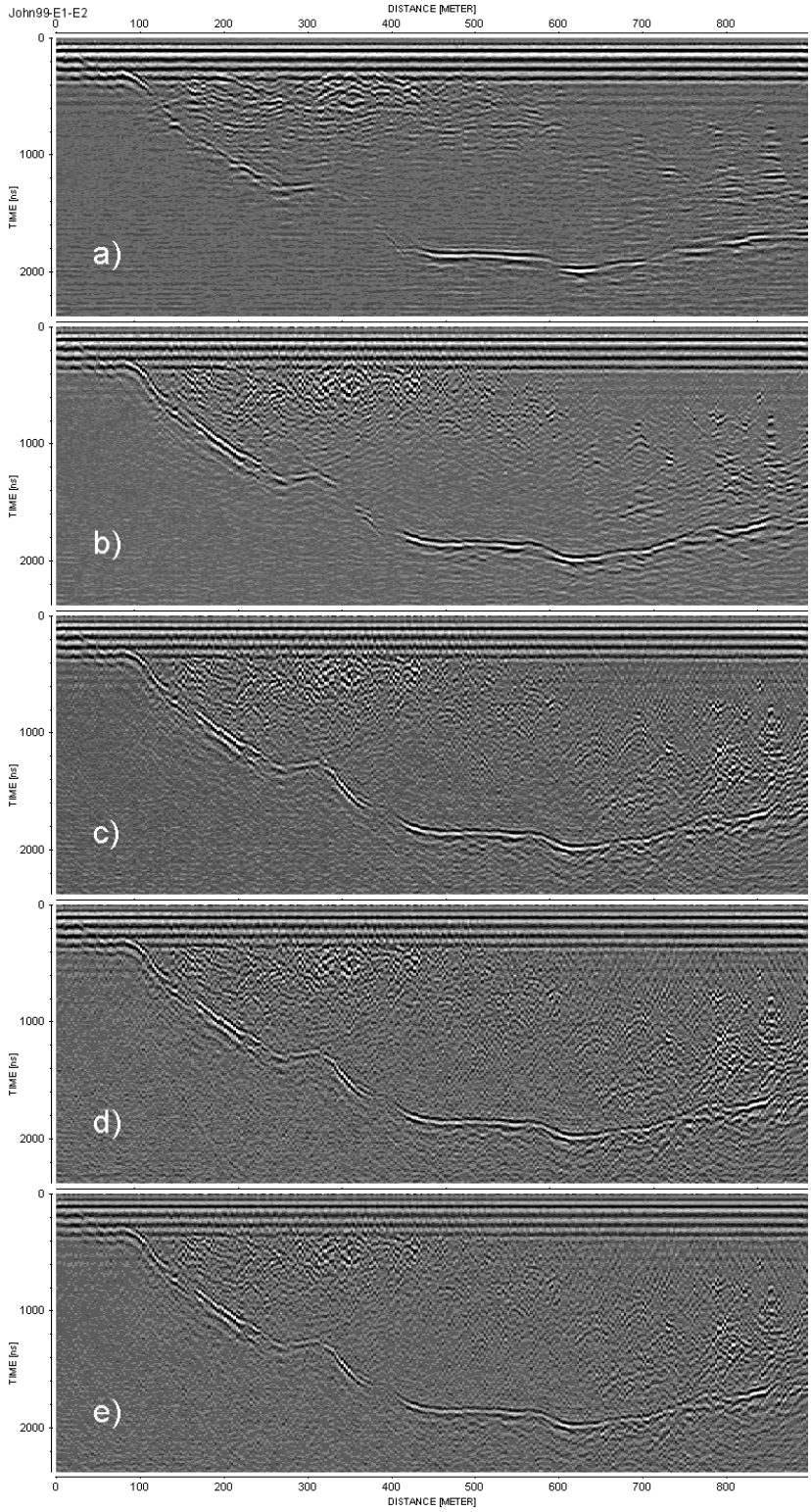

Figura 3-35 Influencia de la apertura en la migración de Kirchoff.
De arriba a abajo, secciones migradas del radargrama de la Figura 3-34a, todas con la misma velocidad que la usada en la Figura 3-34c, y con aperturas de 10, 30, 70, 150 y 300 trazas.

La Figura 3-35 presenta los resultados de la migración de Kirchoff sobre el perfil mostrado en la Figura 3-34a, con la velocidad utilizada en la Figura 3-34c, utilizando diferentes aperturas, cuyos valores son, de arriba a abajo, 10, 30, 70, 150 y 300 trazas. Nótese cómo con bajas aperturas desaparecen los buzamientos elevados, destruyéndose la continuidad del reflector entre los 325 y los 425 m, en a y b. Obsérvese también (fundamentalmente en a) la tendencia a la aparición de artefactos horizontales, motivados por el uso de bajas aperturas. Descendiendo al panel c de la figura, aún no se ha conseguido el valor óptimo, ya que se observa mejora en d. Sin embargo, en el paso al e no aumenta ya la calidad, por lo que se estudian valores entre los de c (70 trazas) y los de d (150 trazas), para obtener la apertura óptima.

Migración F-K o migración de Stolt

Como se ha explicado en §2.2.8, este método opera en el dominio F-K, aplicando la transformada de Fourier (Stolt, 1978).

ReflexW requiere que el radargrama a transformar (*x-t*) tenga en el eje t una longitud mínima de 10 a 15 veces la longitud de onda. Puede alargarse la ventana de tiempo utilizando un factor de escala (*scaling factor*) superior a 1, antes de aplicar la migración propiamente dicha.

La Figura 3-36 presenta el resultado de aplicar la migración F-K o de Stolt con factores de escala 1, 2, 4 y 8 (Figura 3-36 a, b, c y d, respectivamente), sobre el perfil mostrado en la Figura 3-34a, con la velocidad utilizada en la Figura 3-34c.

El paso de un factor de escala 1 (a) a 2 (b) mejora considerablemente el resultado de la migración, desapareciendo los artefactos de A, B y C

existentes en el panel a. El paso a un factor 4 (c) elimina el artefacto de D, no apreciando mejora al aumentar el factor de escala hasta 8 (d).

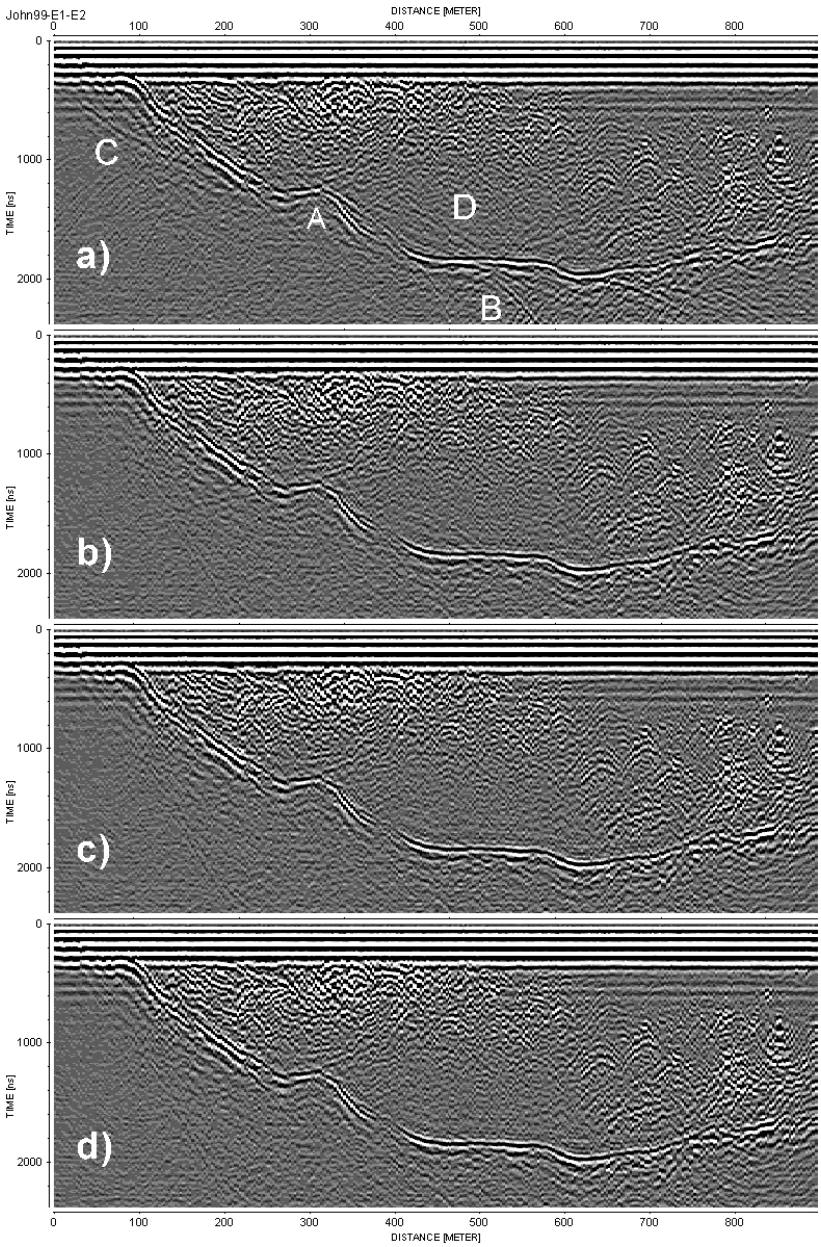

Figura 3-36 Influencia del factor de escala en la migración F-K de Stolt. De arriba a abajo, secciones migradas del radargrama de la Figura 3-34a, todas con la misma velocidad que la usada en la Figura 3-34c, y con factores de escala 1, 2, 4 y 8.

Migración mediante diferencias finitas (Migración FD)

El parámetro crítico para la optimización de la migración FD es el tamaño del incremento de profundidad para cada paso en la extrapolación descendente del frente de ondas (Yilmaz, 1987). Sin embargo, no es posible seleccionar este parámetro en ReflexW, pero en su lugar se solicita la frecuencia principal de la señal (*nom.frequency*) en MHz (si la dimensión temporal es ns), o en Hz (si la dimensión temporal se utiliza en ms o en μs).

ReflexW permite además introducir una distribución 2D de velocidades en el perfil, ya sea obtenida por CMP, o por adaptación de hipérbolas.

El algoritmo que ReflexW utiliza para esta migración es el llamado de 15º (*15-degree finite-difference algorithm*) de Claerbout (§2.2.8). Este algoritmo está basado en la aproximación parabólica del la ecuación escalar de ondas, por lo que está teóricamente limitado al manejo de pendientes no superiores a los 15º. Sin embargo, en la práctica es capaz de migrar reflectores con buzamientos de incluso 35º con suficiente precisión. Esto se debe principalmente (Yilmaz, 1987, §4.3.2) a que los errores asociados con la aproximación por diferencias finitas utilizadas en la implementación de este algoritmo son ajustados para cancelar parte del error asociado con la ecuación diferencial (continua).

La Figura 3-37 muestra el resultado de las migraciones obtenidas por los tres métodos descritos, sobre el mismo perfil antes presentado en la Figura 3-34a, y que vuelve a mostrarse en la Figura 3-37a. Todos son realizados con la misma velocidad, ya utilizada en la Figura 3-34c, que se muestra como óptima. La Figura 3-37b muestra el resultado de la migración de Kirchoff con una apertura de 150 trazas. La sección migrada mediante algoritmo F-K (el factor de escala es 4) se presenta en la Figura 3-37c, mientras que la Figura 3-37d contiene el resultado de la migración FD (frecuencia 14MHz),

que resulta incapaz de migrar la zona de mayor pendiente del reflector, como puede apreciarse a una distancia de 350 a 400 m.

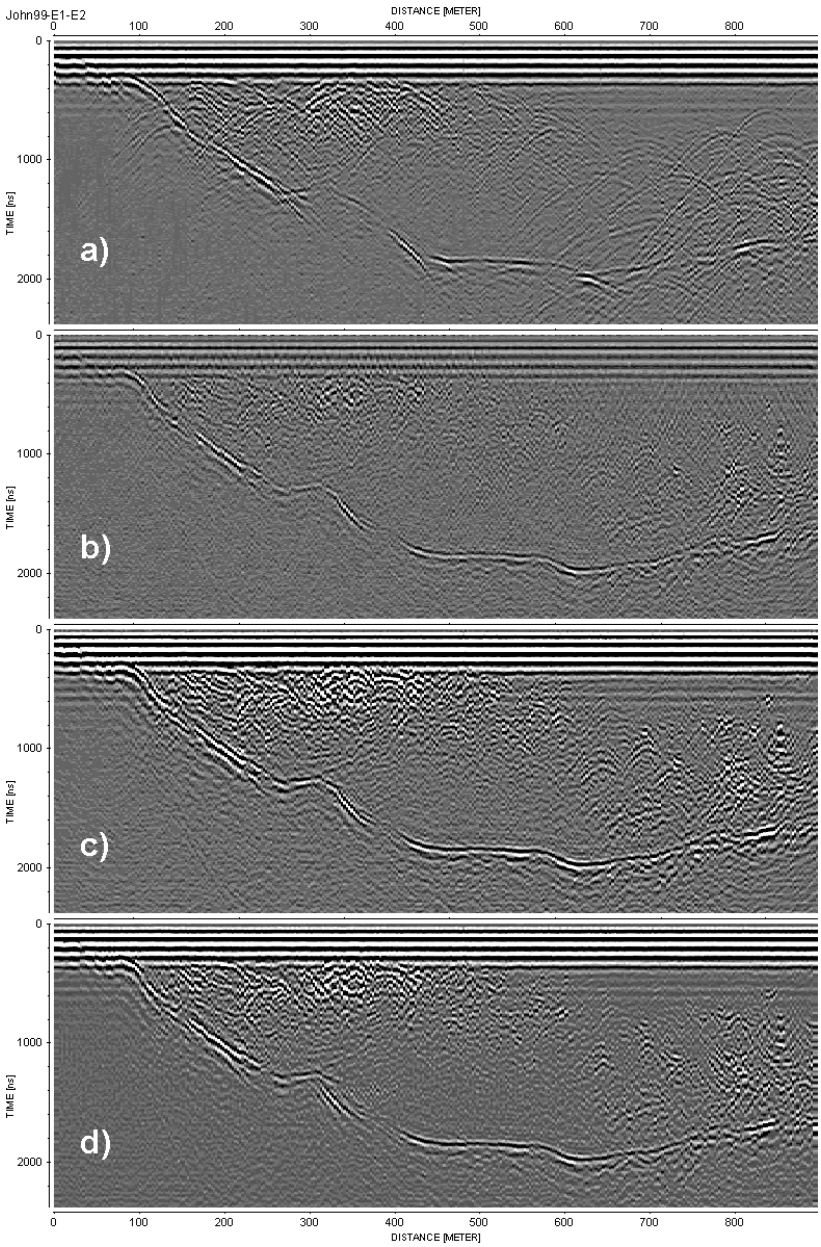

Figura 3-37 a) Sección sin migrar.
b) Sección migrada por Kirchoff (apertura 150 trazas).
c) Sección migrada por FK-Stolt (factor de escala 4).
d) Sección migrada por diferencias finitas.

3.2.3.13 Conversión a profundidad

ReflexW realiza la conversión de una sección de tiempo a su equivalente en profundidades, solicitando para ello la distribución de velocidades en el plano *x-t*. Esta conversión se realiza, mediante la función de procesado *Processing→Migration/Time-depth conversion*.

En la Figura 3-38 se muestra el panel de opciones de esta función. ReflexW permite utilizar como distribución de velocidades la obtenida a partir del ajuste de hipérbolas (*hyperb.adapt.*), o por un análisis CMP. En esta conversión a profundidades puede establecerse un último recorte en la ventana vertical del radargrama, ya que deben establecerse los valores mínimo y máximo de profundidad en la conversión. Habitualmente el mínimo será cero, pero escogiendo el máximo pueden eliminarse los artefactos producidos por la migración por efectos de borde.

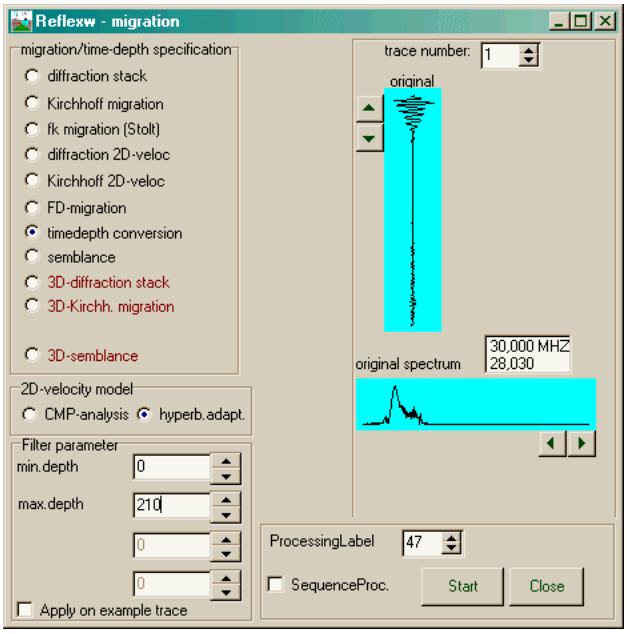

Figura 3-38 Panel con las opciones para la conversión a profundidad de una sección en tiempo.

3.2.3.14 Medida de la profundidad en cada traza

Una de las principales aplicaciones del procesado del perfil de georradar es la determinación de la profundidad del lecho glaciar y, con ella, los espesores de hielo.

ReflexW permite medir de forma interactiva la profundidad a la que se encuentra cualquier punto del radargrama. En su panel principal se muestran permanentemente las coordenadas *X* e *Y* del cursor, según el sistema de coordenadas de presentación (CInt, §3.2.2.2), en el que *Y* es el valor del tiempo doble, si el perfil está en tiempos, o la profundidad, si ya ha sido pasado a profundidades (en adelante, profundidades).

Pero además existe una herramienta para seleccionar puntos concretos y exportar sus coordenadas. Esta herramienta se conoce como *Pick*, y puede accederse a ella desde el menú (*Analysis*→*Pick*) o a partir del icono pick del panel principal (RW3, §1.12.2). Con esta herramienta puede medirse la profundidad del reflector de interés en cada traza o en el conjunto de ellas que se desee. Como se explica más adelante, en este mismo apartado, estas medidas pueden guardarse en ficheros con diferentes formatos.

El panel de opciones correspondiente a esta herramienta se muestra en la Figura 3-39, junto a un ejemplo de aplicación. Existen varias opciones para obtener las profundidades del reflector:

- puede realizarse una identificación manual de la llegada de interés en las trazas deseadas, traza por traza en cada clic del ratón (*manual pick*), o por selección continuada durante el clic del ratón (*continuous pick*);
- también pueden elegirse parámetros para la selección automática de puntos (*auto pick*);

- además, existe un automatismo, el llamado *phase follower*, por el que, marcando con el ratón en un punto, el programa selecciona un punto en cada traza hacia la derecha, buscando continuidad y utilizando como referencia la fase del punto elegido. Si el reflector pierde su continuidad de fase, el algoritmo de seguimiento cometerá errores.

En la Figura 3-39 se aprecia cómo el seguimiento es erróneo a partir de una distancia de 5560 m. Los tiempos dobles (o profundidades) marcados pueden cambiarse (opción *change*) o eliminarse (opción *remove*) de forma interactiva.

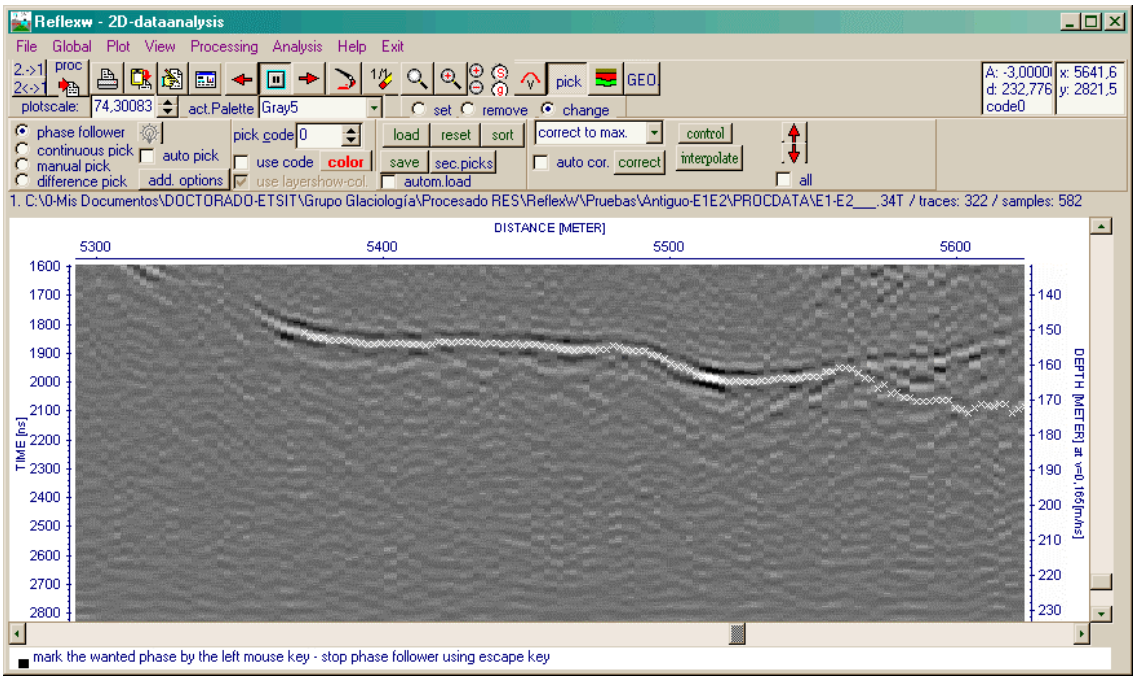

Figura 3-39 Resultado de la identificación del lecho (cruces blancas) mediante la opción *phase follower*. Tomando como referencia la primera llegada marcada por el usuario, el programa marca las llegadas en las otras trazas de forma automática. (Las cruces son originalmente rojas y han sido artificialmente blanqueadas para su impresión).

Como puede observarse en la Figura 3-40, existen diferentes formatos para guardar estas medidas (RW3, §1.12.2.1), entre los que cabe destacar:

- *ReflexWin*, con el que se genera un archivo (extensión .PCK, en el directorio LINEDATA) que permite volver a cargar la secuencia de puntos marcados en el radargrama,
- y *ASCII-3D Tomography*, que exporta a un fichero ASCII (extensión .TOM, en el directorio ASCII) la profundidad y las coordenadas de la cabecera de la traza correspondiente (CThdr, §3.2.2.2), junto con un código que puede asociarse a cada pick realizado (valores distribuidos en columnas, con una fila por cada traza señalada).

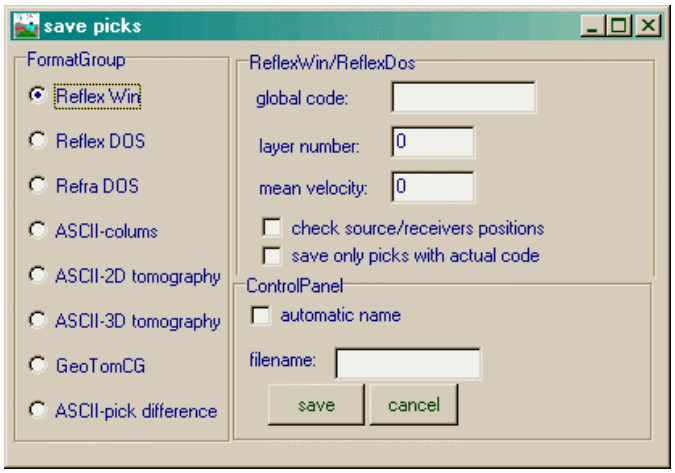

Figura 3-40 Panel de opciones para guardar los *pick* seleccionados.

3.3 Secuencia de procesado

Ya se han explicado los diferentes pasos de procesado de los datos de georradar, tanto teóricamente (§2.2) como su metodología de aplicación mediante el software de procesado que se va a utilizar (ReflexW, §3.2). En este apartado se describe la secuencia de procesado desarrollada por el autor, que se detalla a través de un ejemplo concreto.

El perfil que a continuación se procesa, a modo de ejemplo, fue registrado por el director de esta tesis el 23 de julio de 2003 en el glaciar Hansbreen (Hornsund, Spitsbergen), como parte de un trabajo conjunto realizado con investigadores rusos y polacos. El glaciar Hansbreen se describe más adelante, en §5.1.2, donde además, se localiza este perfil sobre el glaciar (Figura 5-4).

El perfil fue medido con un georradar RAMAC, equipado con la unidad de control CUII (frecuencia de repetición de pulsos de 100 kHz) y antenas de 25 MHz no apantalladas (4'06 m de longitud). La separación entre antenas fue de 6 m. Cada traza se compone de 1000 muestras, registradas con período de muestreo de 4 ns. La cadencia de disparo se fijó en uno por metro, controlada por odómetro. Con los registros se almacenó también su posición GPS, gracias a un equipo portátil (Garmin II-plus). La posición GPS de los puntos C1, C4 y C6 fue medida con un GPS diferencial Leica SR530.

Como norma general, en una fase previa al procesado debe establecerse la geometría del perfil (§3.2.2.2). La línea establecida por el convoy en la

superficie debe ser recta, lo que no siempre es cierto, como precisamente ocurre en la medición del perfil que se procede a procesar (Figura 3-41). A pesar de ello, ReflexW lo procesará como si fuera recto[35].

Figura 3-41 Recorrido realizado de este a oeste (C6-C4-C1) en la línea de radioecosondeo con odómetro, del 23 de julio de 2003 en el glaciar Hansbreen (Isla Spitsbergen, Ártico).

3.3.1 Decisiones previas: rectificación del perfil y sistema de coordenadas

Existe una serie de dificultades que requieren la toma de una serie de decisiones previas a la importación:

- El perfil se considera plano y bajo una recta horizontal en superficie, aunque se introduzcan las coordenadas reales. El módulo *2D data analysis* utiliza las coordenadas de CFhdr sólo como fuente de cálculo de la distancia entre trazas, que calcula despreciando la variación en *Z*. En consecuencia, las coordenadas CFhdr se valoran sólo de manera relativa, calculando con ellas la distancia *X* de CInt, que se utiliza también para la visualización. Esta coordenada CInt se calcula para cada traza como la suma de la coordenada de PDr de la primera traza, más la distancia en *XY* de cada traza a la primera.

[35] No sólo se considera recto en *XY*, sino que, además, se procesa como si fuera horizontal.

- Conviene unificar los tres sistemas de coordenadas[36] que ReflexW utiliza (CFhdr, CThdr y CInt);
- Se desea que el perfil se muestre con una orientación concreta (*e.g.*, este a la derecha y oeste a izquierda).

  ReflexW sólo permite que el origen de la coordenada PDr esté en el extremo con menor valor, por lo que, si se introducen sus coordenadas reales, la presentación del radargrama tiene una orientación obligada, que puede coincidir o no con la deseada.
- Los cálculos con las coordenadas de las trazas se realizan en coma flotante; este formato puede no ser adecuado si los valores de las coordenadas son muy elevados y las diferencias entre ellas son bajas (*e.g.*, coordenadas UTM), por lo que ReflexW recomienda utilizar números bajos en las coordenadas CFhdr (RW3, p. 120).

  Para mitigar este problema, ReflexW introduce, en esta versión 3.0, dos nuevos formatos de datos, que utilizan representación de 64 bit en coma flotante para CThdr. A pesar de ello, es preferible que los valores que toman las coordenadas no sean muy grandes frente a sus diferencias.

Todos estos condicionantes se superan si se utiliza una distancia como coordenada de cada traza. Es posible utilizar otro tipo de coordenada, pero el uso de la distancia tiene las siguientes ventajas:

- Se trabaja con números bajos, lo que facilita la exactitud de los cálculos.
- Muestra en el eje horizontal del radargrama las distancias al origen. Esto resulta especialmente útil en la identificación de objetos y en la localización y edición de trazas (§3.2.3.4).

---

[36] Los diferentes sistemas de coordenadas de ReflexW se explican en §3.2.2.2.

- Permite orientar el radargrama en el sentido registrado o en el opuesto, según se desee. Basta con colocar la distancia (d) en *Xend* para orientarlo en un sentido ($Xstart = 0$, $Xend = d$), o hacerlo en *Xstart*, para orientarlo en el sentido opuesto ($Xstart = d$, $Xend = 0$).

Pero la distancia de cada traza a la primera puede calcularse de diferentes maneras. En la Figura 3-42 se muestran dos estrategias diferentes de cálculo de esta distancia, sobre el perfil en estudio.

En la Figura 3-42a se representa el cálculo de las coordenadas como la distancia real entre cada traza y la primera, a partir de sus coordenadas. Esta manera de rectificar el perfil es muy útil en las situaciones en que el perfil describe, de forma aproximada, una recta. Pero si durante el registro del perfil se realiza un giro, como es este caso (en C4), el segundo tramo queda acortado, como se aprecia en dicha figura.

ReflexW calcula CInt de esta manera, pero, además, suma a todas la coordenada PDr de la traza de inicio.

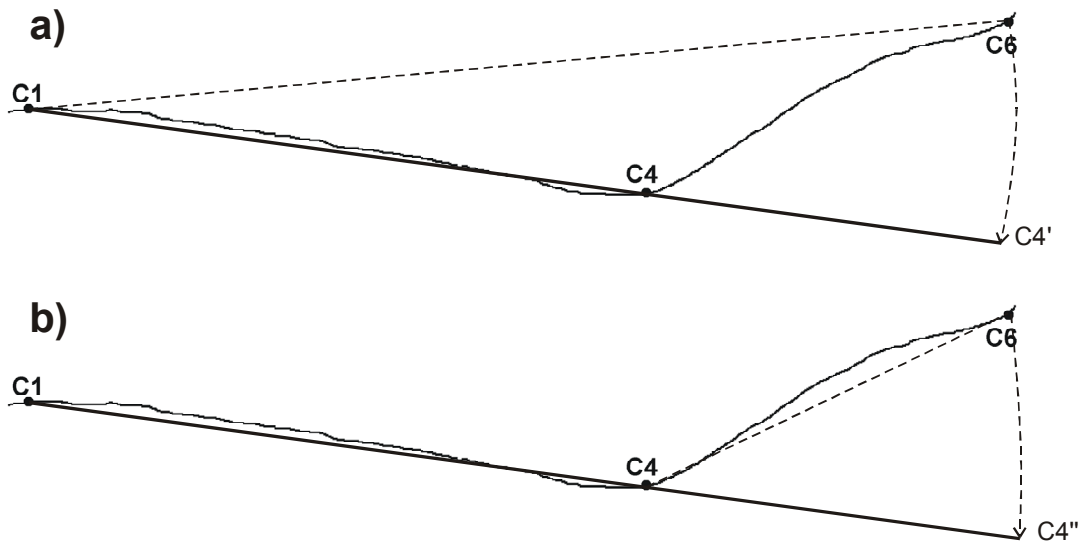

Figura 3-42 Estrategias de rectificación de la línea del perfil:
a) distancia de la traza a C1;
b) distancia de la traza a C1, a través de C4.

Para evitar este error de rectificación de la línea del perfil, podría obtenerse otra que calcule la distancia a cada traza como la acumulación de distancias mutuas desde la primera. Pero la línea quedaría irregularmente alargada.

La manera más eficaz encontrada para forzar esta rectificación se muestra en la Figura 3-42b. Entre C1 y C4 se procede como antes, pero a partir de C4, punto en el que el perfil vira, las distancias se calculan sumando a la de C4 (distancia C1-C4) la distancia de C4 a la traza. De esta manera el perfil completo queda dividido en dos, que se rectifican cada uno por el método inicial y se colocan unidos, uno a continuación del otro. En lo sucesivo, nos referiremos a éstas como distancias de cada traza a C1, a través de C4.

Dado que las coordenadas son distancias y establecen un perfil plano, puede escogerse uno de los ejes de CFhdr como dirección del perfil (*e.g.*, *X*), sin variaciones en el otro ($Y = 0$). Aunque podría elegirse *Y*, resulta más cómodo hacerlo en *X*, ya que así se hace coincidir con su homónima en las coordenadas de representación CInt, donde el perfil se extiende a lo largo de *X* y los TWT sobre el eje *Y* (no existe *Z* en CInt). Para ello:

- Se toma la orientación del eje *X* de CFhdr a lo largo del perfil (PDr $= X$).
- A continuación se orienta el perfil como se desee (izquierda-derecha): si la orientación con que se registró el perfil coincide con la deseada, se introducen valores ficticios, con coordenada de inicio en PDr inferior a la del final (*e.g.*, $Xstart = 0$; $Xend = 100$), procediendo recíprocamente en caso contrario (*e.g.*, $Xstart = 100$; $Xend = 0$). Las demás coordenadas resultan irrelevantes, dado que se realiza una importación con coordenadas ficticias. Se recomienda dejarlas nulas.
- Más adelante se introducirán las coordenadas en CFhdr y en CThdr, acordes con las distancias a C1, a través de C4, una vez que se haya adecuado la ventana espacial del perfil.

3.3.2 Importación de los datos

Una vez abierto un nuevo proyecto de ReflexW (§3.2.2.1), se copian los ficheros de datos del radioecosondeo al directorio ASCII del proyecto. A continuación, se importan los datos (§3.2.2.2), como indica la Figura 3-43.

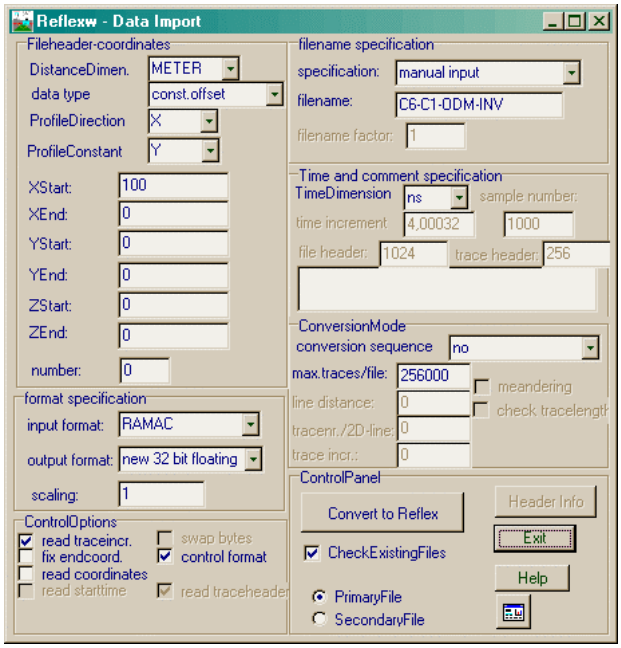

Figura 3-43 Parámetros elegidos en la importación de datos.

El perfil que se procesa fue registrado partiendo de C6, hacia C1. Para conseguir que C1 se muestre a la izquierda, es necesario invertir el sentido del perfil como muestra la Figura 3-43 ($Xstart = 100$; $Xend = 0$).

Como formato de salida se elige *new 32 bit floating*, con el que los registros se representan en coma flotante de 32 bit , y las coordenadas CThdr en coma flotante de 64 bit (§3.2.2.2).

3.3.3 Eliminación de la componente DC

Habiendo realizado el proceso anterior, se han importado los datos con la orientación deseada, pero se visualizan con dificultad, debido a la componente continua de los datos registrados, por lo que se procede a su eliminación (§3.2.3.3). Esto se realiza con *subtract-mean*(*dewow*), con 40 trazas como ventana de cálculo.

El perfil visualizado, eligiendo en *Plot-Options* (§3.2.2.4) los valores $Scale = 0'1$ para *Wiggle* y $Amplitudescale = 5$, se presenta en la Figura 3-44.

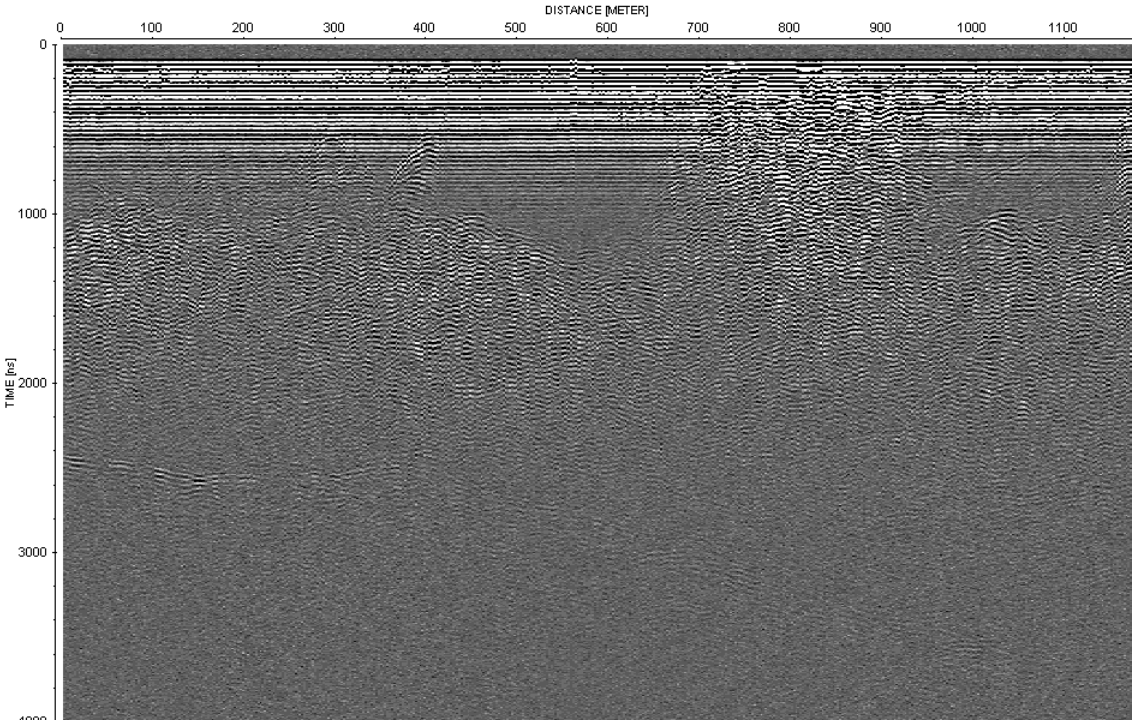

Figura 3-44 Perfil tras eliminar de la componente DC.

3.3.4 Configuración de la geometría del perfil

Para proceder como se ha descrito, es preciso realizar la siguiente secuencia de cálculos con las coordenadas:

A- conversión del formato de las coordenadas de GPS, de latitud-longitud, a coordenadas *Universal Transversa Mercator* (UTM);
B- localización de las trazas correspondientes a los puntos C1, C4 y C6;
C- recorte de la ventana espacial en el perfil y en las coordenadas (ReflexW);
D- cálculo de la distancia de las trazas a C1, a través de C4;
E- introducción de las coordenadas calculadas en CFhdr y CThdr (ReflexW);
F- eliminación de las trazas ruidosas en la ventana espacial (ReflexW);
G- redistribución e interpolación de las trazas (ReflexW).

El paso A se ha realizado generando una plantilla de importación de datos de latitud y longitud, mediante la que se importan en el software de gestión de datos de GPS, *Trimble Survey Office*, del cual se exportan en formato UTM.

Para localizar las trazas correspondientes a los puntos fijos del perfil (paso B), se utiliza el mismo software. Para resolver con sencillez este paso se ha tenido la precaución de nombrar previamente (en el paso A) cada medida del GPS con el número de registro de la traza a la que se corresponde.

El perfil que se procesa se compone de 979 trazas, de las que C1 está en la 974, C4 en la 388 y C6 en la 3.

En el siguiente paso (C) se recorta la ventana espacial, para eliminar las trazas que quedan fuera del perfil. Es frecuente comenzar el registro antes de pasar por el punto de inicio, y continuarlo tras el que señala su final, para asegurar un correcto registro de datos. Este perfil se midió en el sentido que parte de C6 hacia C1, por lo que las trazas anteriores a C6 se eliminan, al igual que las posteriores a C1. Dado que se ha invertido el perfil al realizar la importación, será necesario eliminar las trazas 1 a 5 y 978 a 979 en el perfil importado[37], utilizando en ReflexW la opción *remove* en el menú de edición de trazas, *Edit traces/traceranges* (§3.2.3.4). En la Figura 3-45 se muestra el perfil así obtenido.

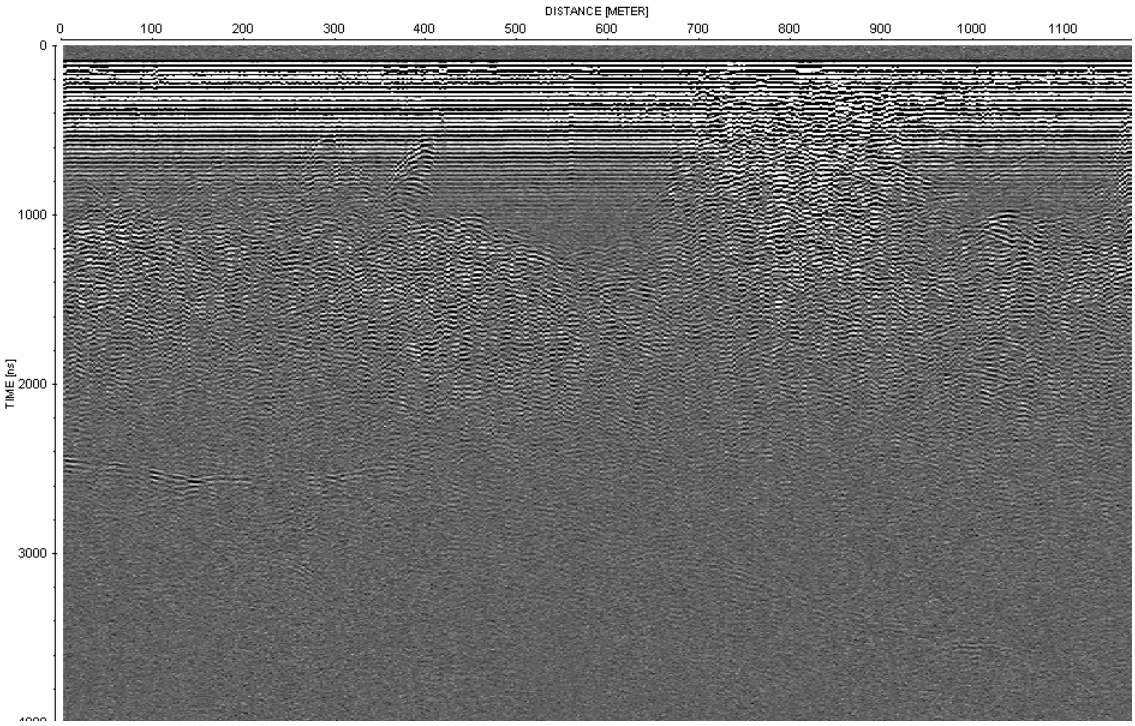

Figura 3-45 Perfil tras el recorte de la ventana espacial.

[37] nº en perfil invertido = (nº de trazas + 1) – nº en perfil sin invertir.

Una vez realizado el paso C, el punto C1 se sitúa en la traza número 1, el C4 en la 587 y C6 en la 972.

En el paso D, recortada ya la ventana espacial en C, se realiza el cálculo de las distancias de cada traza hasta C1, a través de C4. Para realizarlo se puede utilizar una hoja de cálculo o bien una subrutina, siguiendo las directrices indicadas en §3.3.1, hasta generar un fichero ASCII, con extensión *.dst* (§3.2.2.3).

Las columnas de este fichero se organizan teniendo en cuenta que la primera fila, indicada con el número 1 en su primera columna, corresponde al extremo elegido como inicio o *Start*; las coordenadas en los ficheros *.xyz* corresponden al punto medio entre el emisor y el receptor, por lo que las correspondientes al emisor y al receptor habrían de calcularse teniendo en cuenta las distancias que existieron entre ambos en las medidas de campo, y la dirección de movimiento, o bien despreciar estas diferencias[38] y utilizar CThdr de *offset* nulo, dejando por tanto iguales las columnas de coordenada de emisor o de receptor; la columna de distancias al inicio del perfil se puede obtener por Pitágoras entre las coordenadas (X,Y) de la traza en cuestión y las de la traza de inicio. Tras organizar sus columnas para adecuarse al formato descrito, se guardará como archivo de texto MS-DOS, o como texto separado por tabulaciones, guardándolo en el directorio ASCII, si bien lo hace con extensión *.txt*. Con el explorador se modificará a continuación su nombre, para darle extensión *.dst*.

[38] Esta información es sólo para CThdr, y no se utiliza en el procesado.

A continuación (paso E), se introducen las coordenadas calculadas en las cabeceras de fichero (CFhdr) y en las cabeceras de traza (CThdr) del perfil. ReflexW facilita una ventana de edición de la cabecera del fichero (Figura 3-13) y, a través de ésta, otra para la importación del fichero de coordenadas de las trazas (Figura 3-15). En la ventana de CFhdr (Figura 3-46) se introduce la distancia calculada de C6 a C1, vía C4, como *Xend*, dejando nulas las demás coordenadas en el fichero (*Xstart*, y las coordenadas en *Y* y en *Z*). En este caso, esta distancia es 1174'445 m.

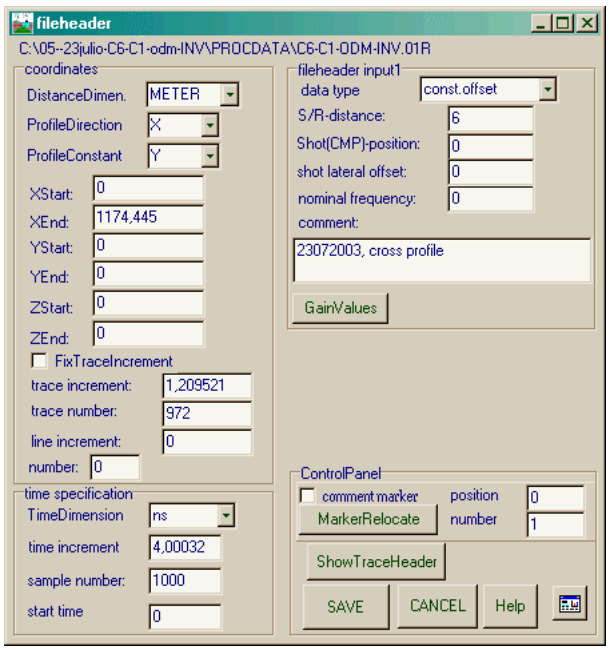

Figura 3-46 Panel de edición de CFhdr, con las coordenadas actualizadas.

En este panel se pueden ajustar otros parámetros, como *e.g.*, el intervalo de muestreo (*time increment*), si fuera necesario. La modificación en este parámetro afecta a los ejes; sin embargo, su cambio no se visualiza de forma automática. Para obtenerlo es suficiente con actualizar la visualización, ya sea utilizando el icono , o realizando algún cambio en la configuración (§3.2.2.4).

Seleccionando *Show Traceheaders*, desde el panel anterior, se accede a la ventana de importación de las coordenadas CThdr, que realizamos haciendo uso del fichero con extensión *.dst*, antes creado.

Habiendo procedido como se ha indicado, los tres sistemas de coordenadas se habrán unificado, reflejando *X* en todos ellos la distancia de la traza hasta el comienzo del perfil. Esto permite identificar fácilmente cada traza a través de su distancia, que no debe confundirse con el número de traza.

En el siguiente paso (F) se eliminan las trazas defectuosas, habitualmente debidas a errores en el funcionamiento del georradar.

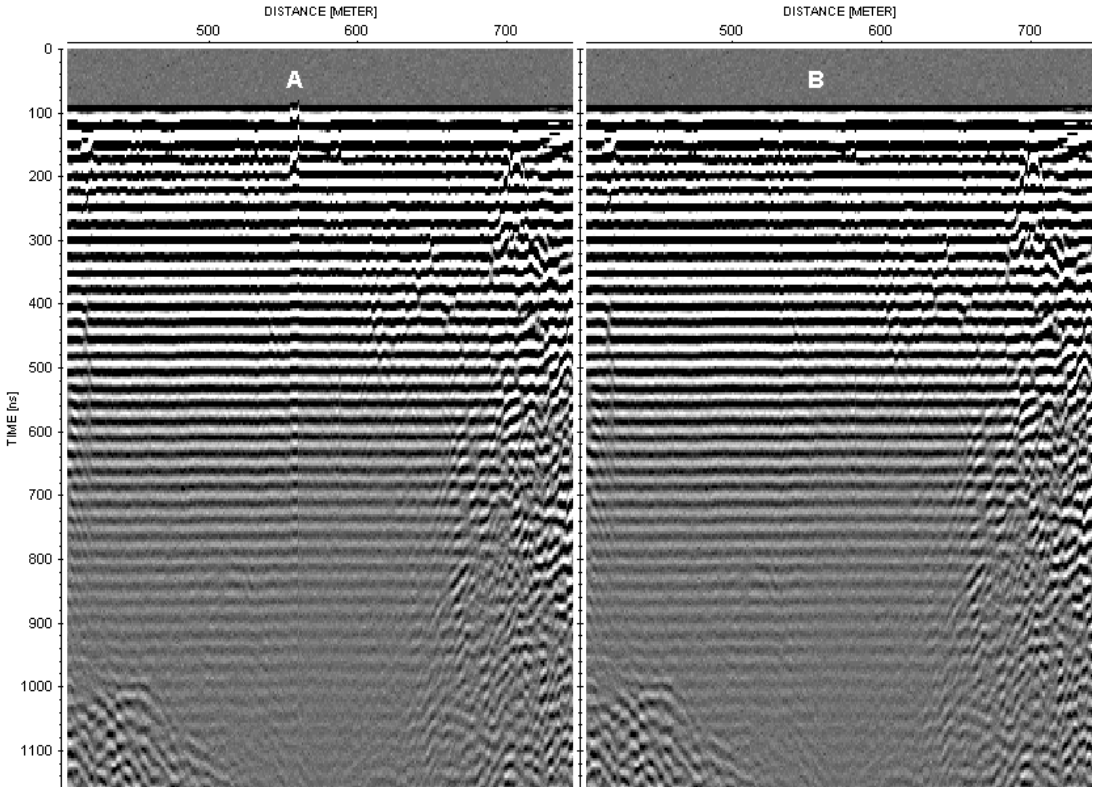

Figura 3-47 Detalle de la edición de trazas.
Izquierda: conjunto de trazas erróneas bajo la indicación A.
Derecha: bajo la indicación B las trazas han sido eliminadas.

En la línea que nos ocupa es necesario eliminar las trazas 461 a 465 (distancias 556 m a 562 m), debido a un error que se aprecia en superficie y se diluye en profundidad, y que por tanto no puede eliminarse mediante una corrección estática (§3.2.3.5). Puede observarse este error bajo la indicación A en el panel de la izquierda de la Figura 3-47, y su eliminación en el de la derecha, cuya posición se localiza bajo la indicación B.

Como paso final de la configuración de la geometría del perfil (paso G), y una vez realizado este proceso, si la distancia entre trazas no fue constante durante el sondeo, conviene realizar una redistribución e interpolación de trazas en el perfil (§3.2.3.2). De esta manera se asegura que las formas registradas (*e.g.*, hipérbolas de difracción) no están deformadas.

En el caso que nos ocupa, la medida se realizó controlando el disparo del georradar mediante un odómetro. A pesar de ello y debido a la acumulación de agua en la superficie del glaciar, la distancia entre las trazas no fue uniforme, por lo que es procedente realizar la reorganización.

Se ha decidido realizar esta interpolación de manera que la separación entre trazas sea de 1 m. De esta manera, además, el número de traza es superior en una unidad a la distancia al origen, facilitando más la identificación de cada traza. Para ello, basta con introducir los valores $trace\ incr. = 1$, para establecer la separación constante de 1 m entre trazas, $start\ distance = 0$ y $start\ end = 1174'45$, indicando que el perfil debe incluir la ventana espacial completa (Figura 3-48). En la Figura 3-49 se aprecia un detalle de la reubicación de trazas producida.

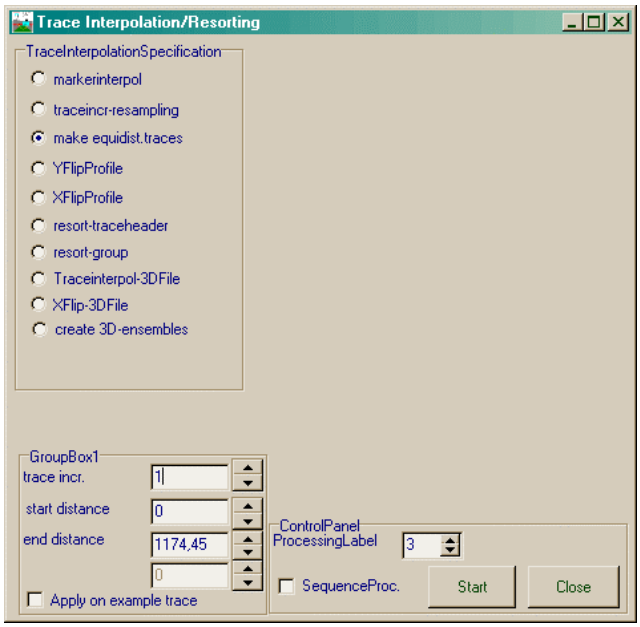

Figura 3-48 Panel de reordenación de las trazas del perfil.

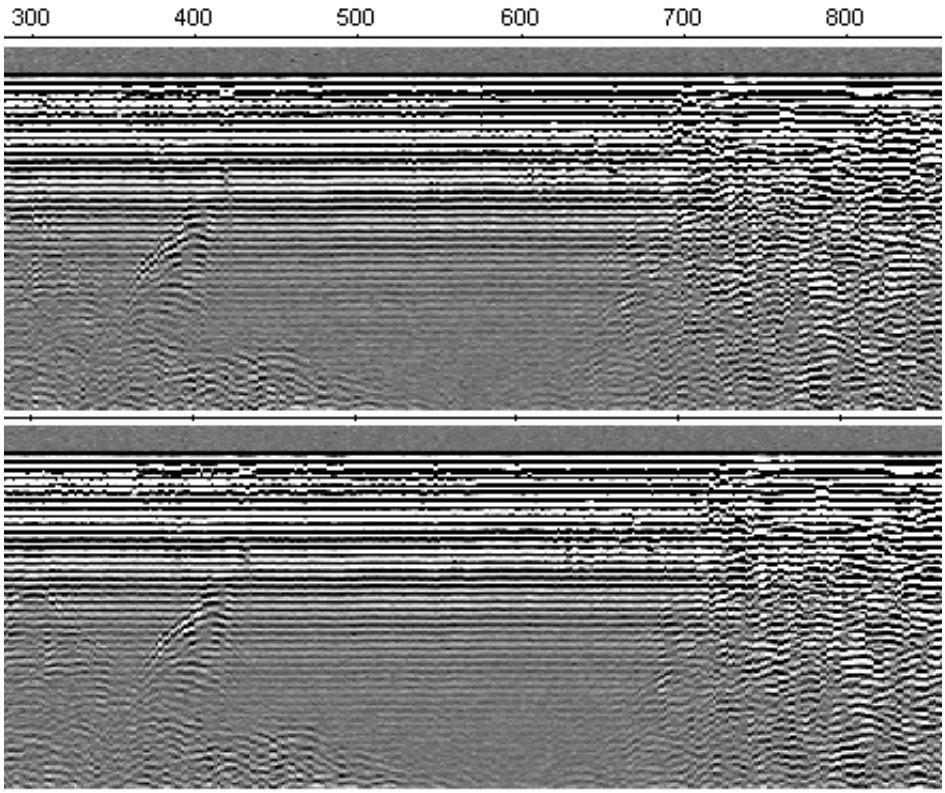

Figura 3-49 Detalle del resultado de la reorganización de las trazas.
Arriba antes y abajo después de la reorganización.

3.3.5 Procesado final

El perfil contiene todas y sólo las trazas deseadas y en las cabeceras del fichero y de cada traza las coordenadas son las deseadas. Se puede, pues, proceder a procesar el contenido del perfil.

Antes de realizar cualquier función con dependencia temporal debe ajustarse el origen de tiempos con la función *move starttime* (§3.2.3.7). El cálculo del desplazamiento temporal necesario se realiza mediante la expresión (3.2).

La distancia entre antenas en el perfil bajo proceso es $d = 6\ \mathrm{m}$, mientras que el tiempo de llegada de la onda aérea es $t_A = 85'3\ \mathrm{ns}$, por lo que el desplazamiento necesario es de $-65'3\ \mathrm{ns}$.

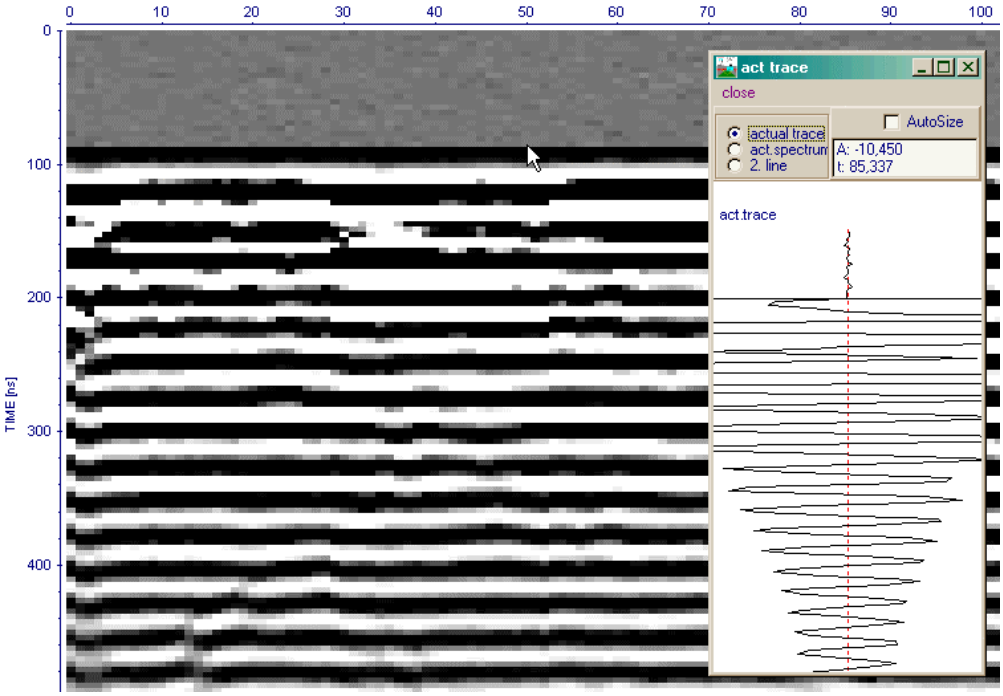

Figura 3-50 Ampliación de la llegada de la onda aérea en el perfil. La ventana *Wiggle Window* muestra la traza bajo el cursor (*X*) y con una línea horizontal su posición *Y*. En el recuadro, amplitud (A) y TWT (t) de la muestra (*X*,*Y*) bajo el cursor.

Es el momento de recortar la ventana temporal por el extremo final (*time cut* §3.2.3.6), si procede. En el perfil que se estudia no es necesario realizar este paso, debido a que el lecho se aproxima al límite de lo registrado.

Se pretende realizar la deconvolución del perfil, pero previamente es necesario restablecer las amplitudes aplicando una ganancia (§3.2.3.9) y (§3.2.3.3) realizar un filtrado que elimine los restos de baja frecuencia no eliminados mediante el filtro *dewow*, y el ruido de alta frecuencia.

En la Figura 3-51 se muestra el perfil obtenido tras la aplicación de una ganancia de tipo exponencial que eleva el valor de la señal en 0'05 dB por metro, supuesta una RWV media de 0'168 m μs^{-1}.

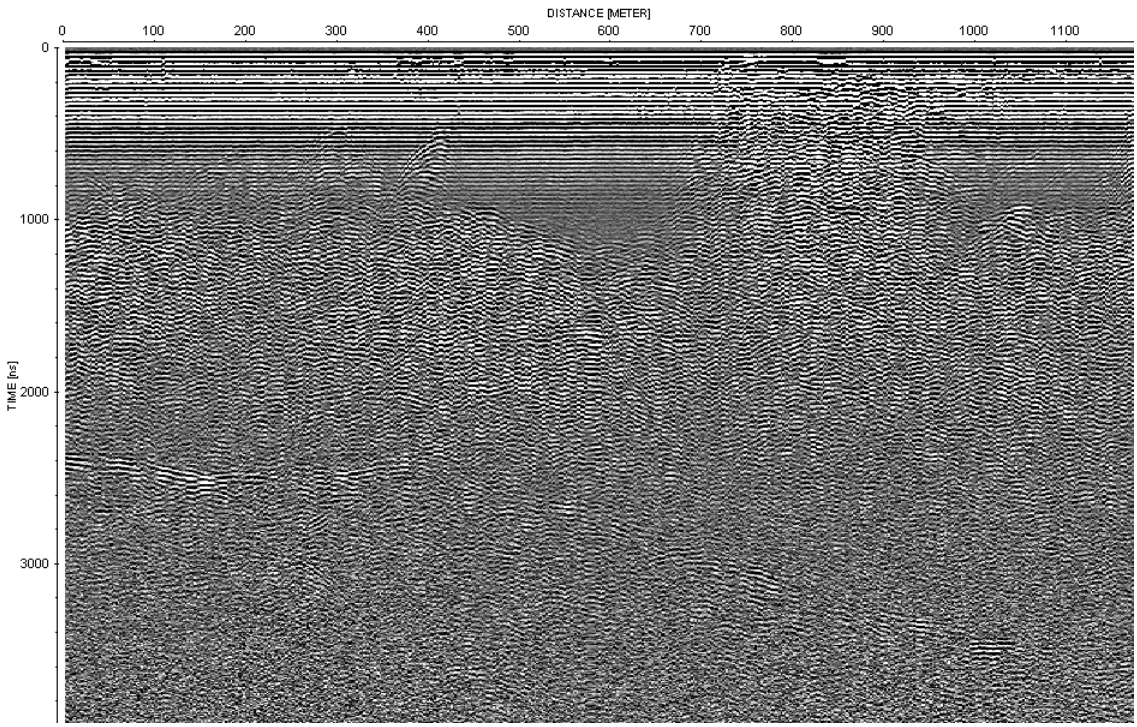

Figura 3-51 Perfil tras la aplicación de la ganancia.

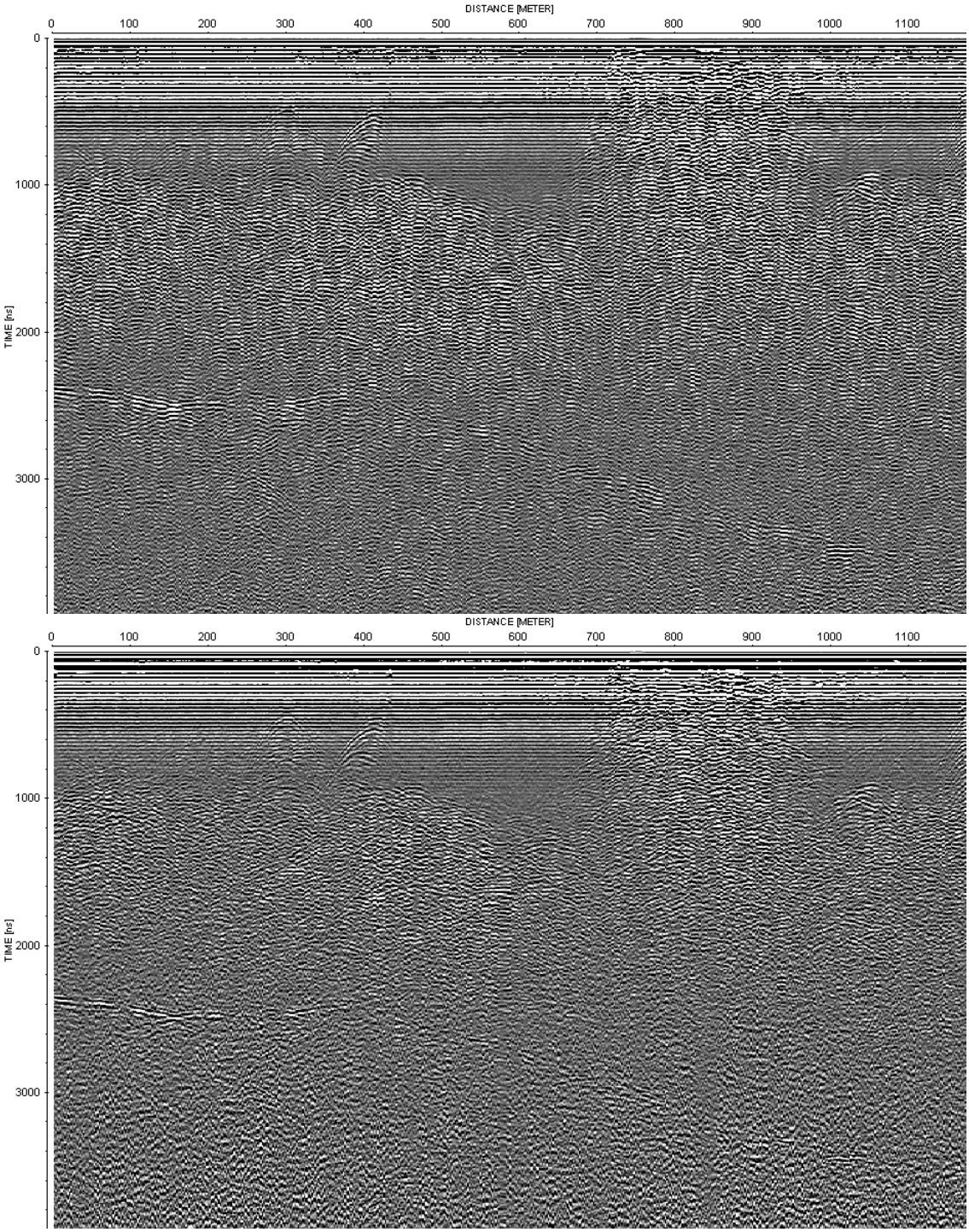

Figura 3-52 Arriba: perfil tras el filtrado previo a la deconvolución.
Abajo: perfil tras la aplicación de la deconvolución.

Después de la ganancia se aplica un filtro de paso banda de Butterworth, con frecuencias de corte en 12 y 48 MHz (panel superior en la Figura 3-52).

La deconvolución elegida (panel inferior en la Figura 3-52) es del tipo impulsivo, 0 *lag spike* (§3.2.3.10), y la forma del pulso se obtiene por autocorrelación de la traza media del perfil, en la ventana comprendida entre 1200 ns y 1500 ns , donde no afecta ya el ruido producido por las ondas aérea y directa. El tamaño del filtro utilizado es de 100 muestras.

La gran afectación por las ondas aérea y directa de los 1100 ns iniciales puede reducirse realizando un filtrado horizontal, que ReflexW proporciona en su menú *Processing→2D Filter*. El filtro que mejores resultados ha proporcionado ha sido *subtracting average*. Este filtro resta de cada traza el promedio obtenido en una ventana móvil. El resultado de su aplicación al intervalo temporal afectado (1100 ns iniciales), con una ventana de promediado de 50 trazas, se muestra la Figura 3-53. El algoritmo que ReflexW utiliza para realizar este filtrado no elimina correctamente el valor medio en las primeras trazas. En este caso se aprecia con claridad en las *ca.* 70 primeras trazas.

Es interesante realizar un filtro de paso banda de Butterworth, similar al antes realizado, para reducir el ruido de alta frecuencia introducido en la deconvolución.

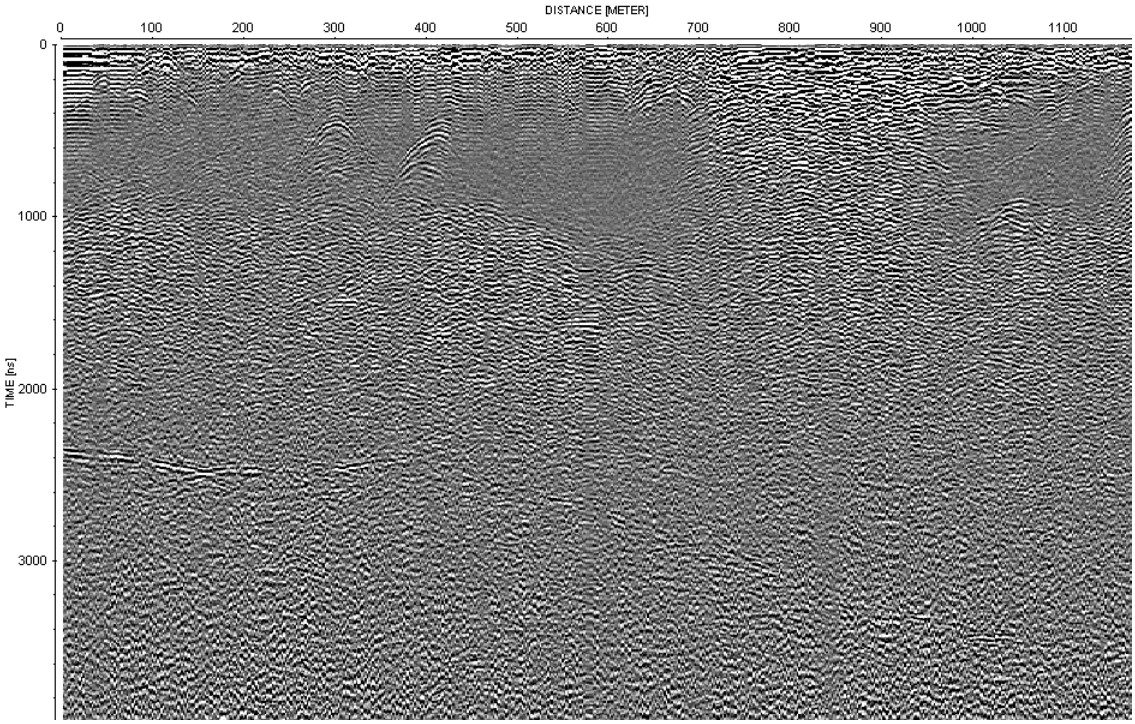

Figura 3-53 Perfil tras la aplicación del filtro *subtracting average*.

Antes de proceder con la migración, debe realizarse una corrección dinámica al perfil, para aproximarlo a su equivalente de *offset* nulo (§3.2.3.5).

En este caso, la distancia entre antenas es de 6 m, por lo que su efecto es muy limitado y se restringe a la zona más superficial.

Los últimos pasos del procesado son la migración (§3.2.3.12) y el paso a profundidades (§3.2.3.14). Adicionalmente puede realizarse la corrección topográfica (§3.2.3.5), para restituir la forma de la superficie y con ella la del subsuelo, modificando así sus pendientes.

En el panel superior de la Figura 3-54 se muestra el perfil migrado con el algoritmo de Stolt (migración FK), con un factor de escala 16.

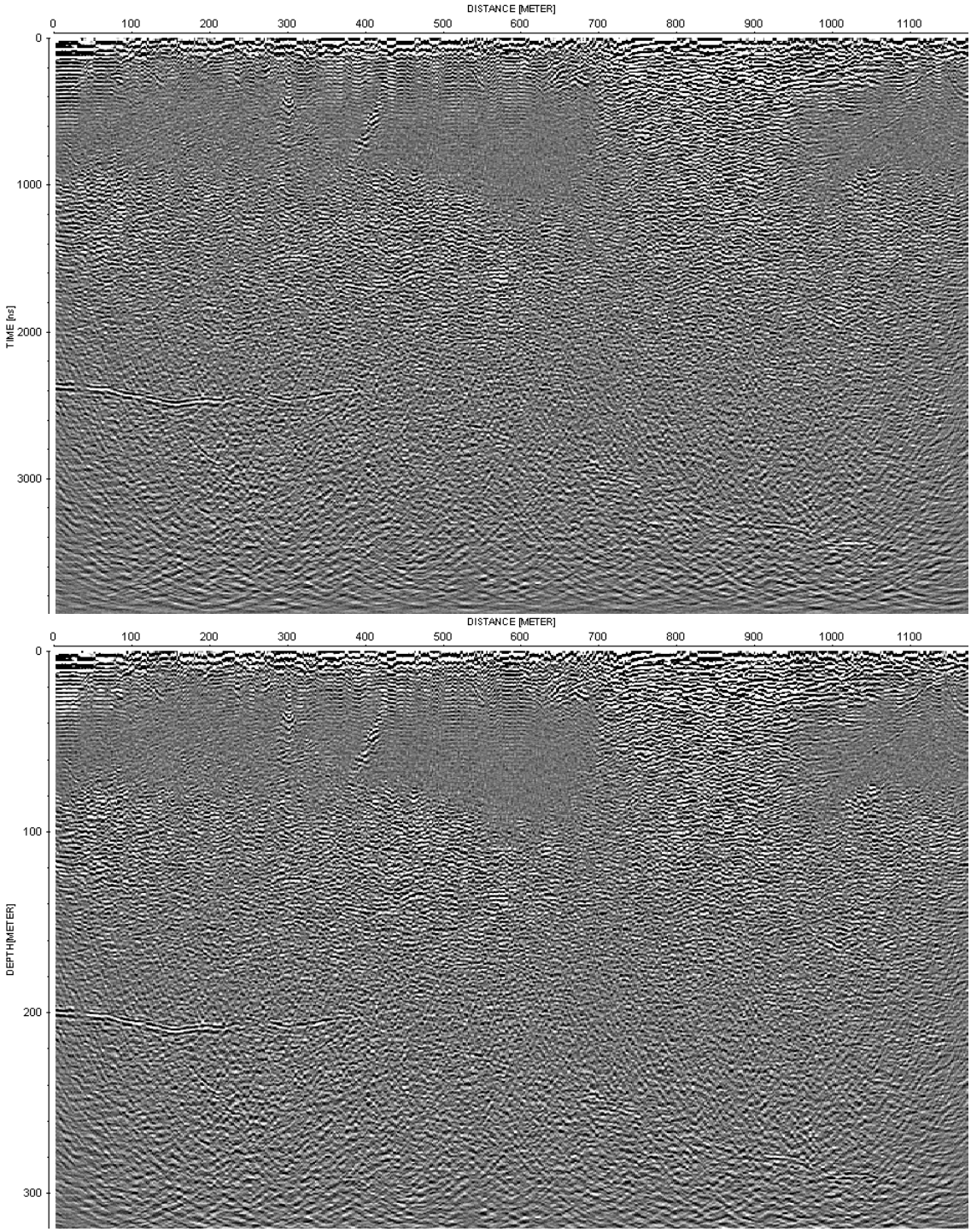

Figura 3-54 Arriba: perfil migrado.
Abajo: perfil procesado y convertido a profundidades.

El panel inferior muestra el resultado de la conversión a profundidades.

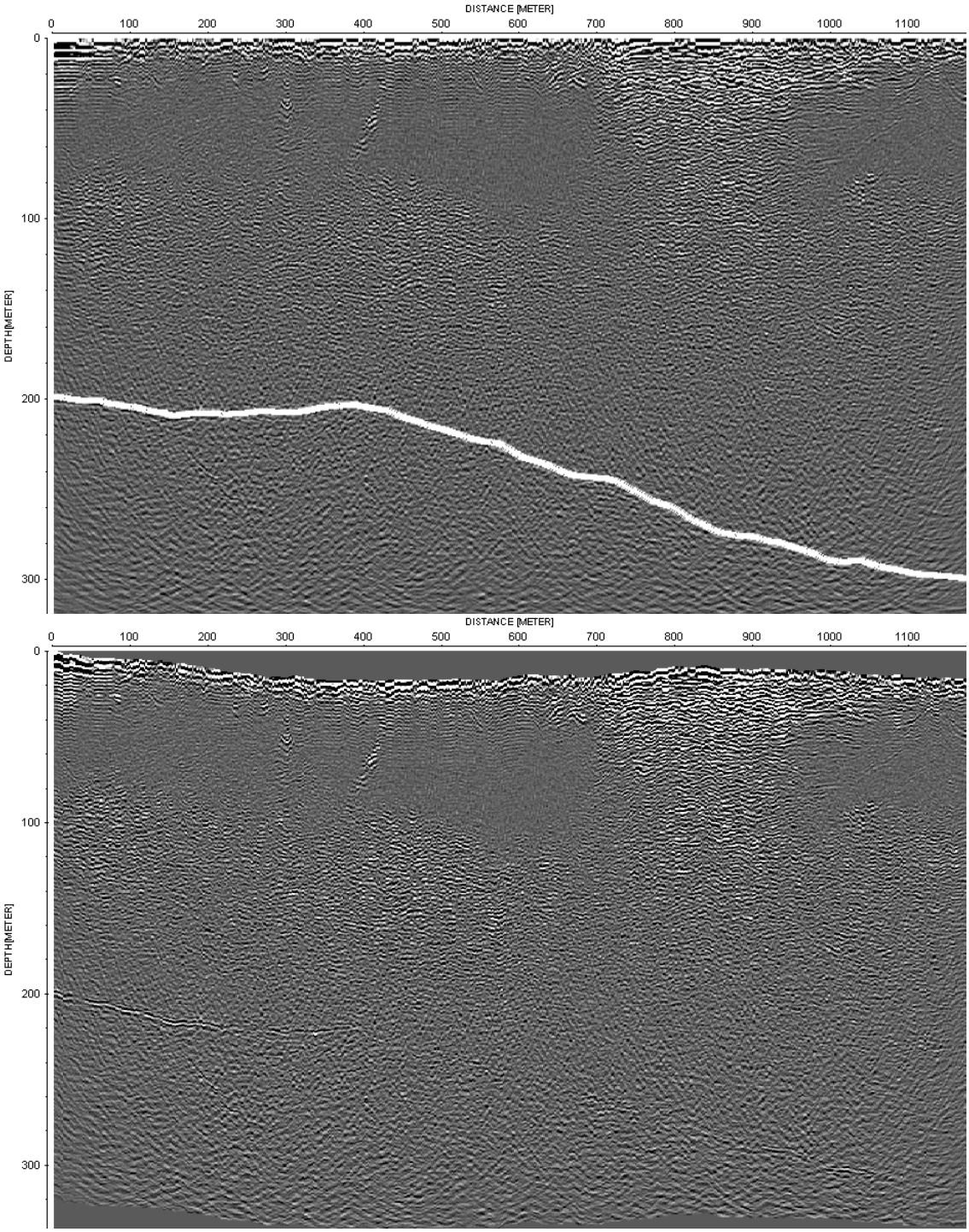

Figura 3-55 Arriba, perfil procesado, sobre el que se ha marcado el lecho mediante la función *pick*, para exportar sus profundidades. Abajo: perfil procesado, tras la corrección topográfica.

La Figura 3-55 muestra en el panel superior la detección del lecho y en el inferior la corrección topográfica, realizada a partir de los datos de la topografía superficial del perfil.

Habitualmente, el punteado del lecho mediante la función *pick* de ReflexW (§3.2.3.14) es el último paso y se realiza con el perfil ya procesado. Con esta función se extrae del perfil la información de profundidad de los objetos que se seleccionen. En este caso, se ha punteado el lecho, por lo que se obtendrán los espesores del glaciar en el perfil.

Capítulo 4

Determinación de parámetros físicos del hielo a partir de registros georradar

En el capítulo anterior se ha desarrollado un método de procesado de los perfiles de georradar, finalizando con la medida de los espesores de hielo. En éste se ofrecen métodos para estimar los valores de ciertos parámetros físicos del hielo en los glaciares, partiendo de registros de georradar. Entre éstos se encuentran la RWV, el contenido en agua en el hielo y en la neviza, la densidad de éstos, etc. La RWV en el hielo es uno de los parámetros de mayor importancia, dado que se necesita para migrar el perfil y para convertirlo a profundidades. Los demás parámetros influyen en la RWV y además, junto con ésta, sirven para caracterizar el glaciar, son ayuda en su estudio hidrológico, en la detección de las zonas de acumulación y ablación, en la localización del paso de nieve a hielo, pueden utilizarse en el estudio de la naturaleza del lecho, o de los interfaces entre los estratos de hielo frío y templado en los glaciares politérmicos, etc.

4.1 RWV

La propagación del pulso emitido por el georradar se rige por las ecuaciones de Maxwell (§2.1.2) y su velocidad viene descrita por la de las ondas electromagnéticas en el medio. El valor de ésta en un material es siempre inferior a la velocidad de la luz en el vacío (§2.1.4).

Si en mecánica la velocidad con que se desplaza un elemento por un medio se rige por la capacidad de éste para almacenar energía contra la fuerza externa que provoca el elemento, en electromagnetismo esto está descrito por las propiedades de polarización del medio (§2.1.3). Para las frecuencias habituales del georradar (*ca.* 1-1.000 MHz), la velocidad de propagación de la onda a través de un medio con bajas pérdidas y permeabilidad unitaria, como el agua o el hielo, no depende de la frecuencia transmitida y está determinada por la ecuación (2.46),

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r'}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_{efr}}} \ .$$

Pero depende de otros factores, entre los cuales, los principales son la densidad, su estructura y el contenido en agua (Bogorodsky *et al.*, 1985; Macheret *et al.*, 1993), que afectan a su permitividad.

Frolov y Macheret (1999) valoran los datos de diferentes autores y concluyen que la mejor aproximación para la permitividad dieléctrica en el hielo es

$\varepsilon_i = 3'19 \pm 0'04$ y $\varepsilon_w = 86$ en el agua, a $0\,^{\circ}\mathrm{C}$. Lo que se corresponde con una RWV en el hielo de *ca.* 168 mμs^{-1}, descendiendo a *ca.* 32 mμs^{-1} en el agua[39].

Pero la velocidad de propagación en los glaciares resulta muy variable y puede tomar valores muy diferentes de los 168 mμs^{-1} medidos en laboratorio para el hielo puro. La mayor parte de las medidas en glaciares fríos proporcionan valores de velocidad superiores a ésta. Bogorodsky *et al.* (1985, p. 46) proponen el uso de una RWV de 169 mμs^{-1}, como valor estándar para el georradar sobre hielo. Por su parte, Macheret *et al.* (1993) indican que la velocidad más baja que cabe esperar en un glaciar frío es 167'7 mμs^{-1}, siendo normales velocidades que incluso superen los 180 mμs^{-1}. Por contra, en los glaciares templados aparecen velocidades inferiores a los 167 mμs^{-1} e incluso descienden a valores por debajo de los 150 mμs^{-1}, dependiendo fuertemente del contenido en agua del glaciar. En concordancia con lo anterior, en los glaciares politérmicos biestratificados, la velocidad resulta mayor en el estrato superior, más seco y de menor temperatura, mientras que el inferior, cuya temperatura es próxima o igual a la de fusión y presenta mayor contenido en agua, la velocidad es más baja (*e.g.*, 176'8 mμs^{-1} y 165'4 mμs^{-1}, respectivamente, medidas en Hansbreen, según Macheret *et al.*, 1993).

La RWV en la nieve y la neviza secas es superior a la del hielo, debido a su mayor proporción de aire, por lo que pueden aparecer velocidades elevadas en las medidas más superficiales. A modo de ejemplo, en el interior del

---

[39] $\lambda = \frac{v}{f}$. Esto supone que una onda de 30 MHz tenga una longitud de onda de 10 m en el vacío; entre 5 y 6 m en el hielo; y del orden de 1 m en el agua.

glaciar Johnsons de la Isla Livingston (Shetland del Sur, Antártida), Benjumea *et al.* (2003) miden velocidades entre 157 y 166 $\mathrm{m}\,\mu\mathrm{s}^{-1}$ (con media de $162'3 \pm 3\ \mathrm{m}\,\mu\mathrm{s}^{-1}$), llegando a 174 $\mathrm{m}\,\mu\mathrm{s}^{-1}$ en zonas superficiales, que se ven afectadas por el estrato de neviza y nieve, más poroso y de mayor RWV. Por su parte, Moore *et al.* (1999) estiman una velocidad de 220 $\mathrm{m}\,\mu\mathrm{s}^{-1}$ en el estrato de nieve y neviza que sondean mediante georradar de 200 MHz en Hansbreen (Svalbard). Mientras que Clarke y Bentley (1994), en Ice Stream B2 (Antártida), obtienen una velocidad en superficie de 213 $\mathrm{m}\,\mu\mathrm{s}^{-1}$ y una ley de descenso lineal de la velocidad con la profundidad en los primeros 50 m, donde la nieve se compacta hasta convertirse en hielo (se describe en 4.1.1).

La ecuación (2.46) ha permitido calcular el valor de la velocidad de propagación de la onda en el medio a partir de la permitividad dieléctrica del mismo. En la práctica la relación suele invertirse, *i.e.*, la medida de la velocidad de propagación de la onda en un medio suele ser fuente de información para valorar su permitividad dieléctrica.

Existen diferentes métodos útiles para estimar la velocidad de las ondas electromagnéticas en el hielo utilizando el georradar (*e.g.*, Bogorodsky *et al.*, 1985, §6.2; Macheret *et al.*, 1993; Yilmaz, 1987). Se puede realizar un perfil en las cercanías de un pozo perforado hasta el lecho, o utilizar técnicas de transiluminación para realizar sondeos electromagnéticos en pozos, o hacer uso de los métodos derivados de las técnicas de registro WARR y CMP, como el análisis de semblanza o la medida de las hipérbolas de difracción, e incluso puede valorarse la velocidad por comparación de paneles de migración a velocidades constantes (Figura 3-34, §3.2.3.12). Se expone a continuación el fundamento de estas técnicas.

4.1.1 Hipérbolas de difracción

Un método sencillo para valorar la velocidad en un perfil realizado con *offset* nulo (incluso con *offset* constante), consiste en el estudio de las hipérbolas de difracción presentes en el perfil.

En §2.1.14 se explica la aparición de las hipérbolas de difracción ante la presencia de anomalías puntuales en el subsuelo. Las hipérbolas de difracción vienen caracterizadas por la expresión (2.66)

$$\frac{T^2}{(2d/v)^2} - \frac{x^2}{(2d)^2} = 1 \ ,$$

cuyos parámetros están definidos en la Figura 2-19.

Para determinar la velocidad del medio y la profundidad del elemento difractor, pueden utilizarse plantillas de hipérbolas construidas según esta expresión, para adaptarlas a las del registro. También se puede adaptar gráficamente una hipérbola con parámetros variables directamente sobre la imagen del registro CMP en el ordenador, utilizando algún programa para ello, como se ha mostrado en §3.2.3.11.

Deben distinguirse estas hipérbolas de difracción que aparecen en los perfiles de *offset* nulo (previas a la migración), de las hipérbolas de reflexión que aparecen en los registros CMP (previas al NMO y reagrupación). Ambos tipos se rigen por la ecuación (2.66), pero el significado de x no es el mismo en una y en otra (la mitad de la distancia horizontal al reflector puntual en el perfil de *offset* nulo, y el *offset* en CMP, Figura 2-19, §2.1.14).

Para valorar la velocidad de propagación mediante hipérbolas de difracción, deben escogerse únicamente aquéllas que sean simétricas, ya que son éstas las que se corresponden con reflectores puntuales o lineales (grietas), atravesados por el perfil de georradar (*e.g.*, Benjumea *et al.*, 2003; Clarke y Bentley, 1994; Macheret, 2000). Las hipérbolas asimétricas, típicamente producidas por difractores lineales inclinados, como son los canales de agua, requieren ser estudiadas al menos a través de dos o tres perfiles, para poder calcular correctamente su dirección y pendiente, y la RWV (Macheret, 2000).

Una vez conocida la velocidad de propagación en el medio, las hipérbolas de difracción pueden utilizarse también para otros cálculos. A modo de ejemplo, Clarke y Bentley (1994) realizan un estudio de la diferencia de azimut (θ) que las grietas enterradas bajo la nieve presentan respecto de la dirección de sondeo. Obtienen el valor de este ángulo a partir de la forma de la hipérbola de difracción que generan. Utilizan para ello una dependencia lineal de la velocidad con la profundidad ($v = a + bz$), que experimentalmente encuentran en los primeros 50 m de profundidad[40], obteniendo

$$t'' = t' \sqrt{\left(\frac{lb \operatorname{sen}\theta}{a\left(e^{bt'} - 1\right)} \right)^2 + 1} \quad . \tag{4.1}$$

En la Figura 4-1 se muestra la definición de los parámetros de esta expresión, así como un ejemplo de las plantillas hiperbólicas para medir el ángulo de las grietas respecto a la dirección del sondeo.

[40] Para el Ice Stream B2 (Antártida), obtienen valores de $a = 213 \pm 10\,\mathrm{m}\,\mu\mathrm{s}^{-1}$ y $b = -0'87 \pm 0'06\,\mathrm{m}\,\mu\mathrm{s}^{-1}$.

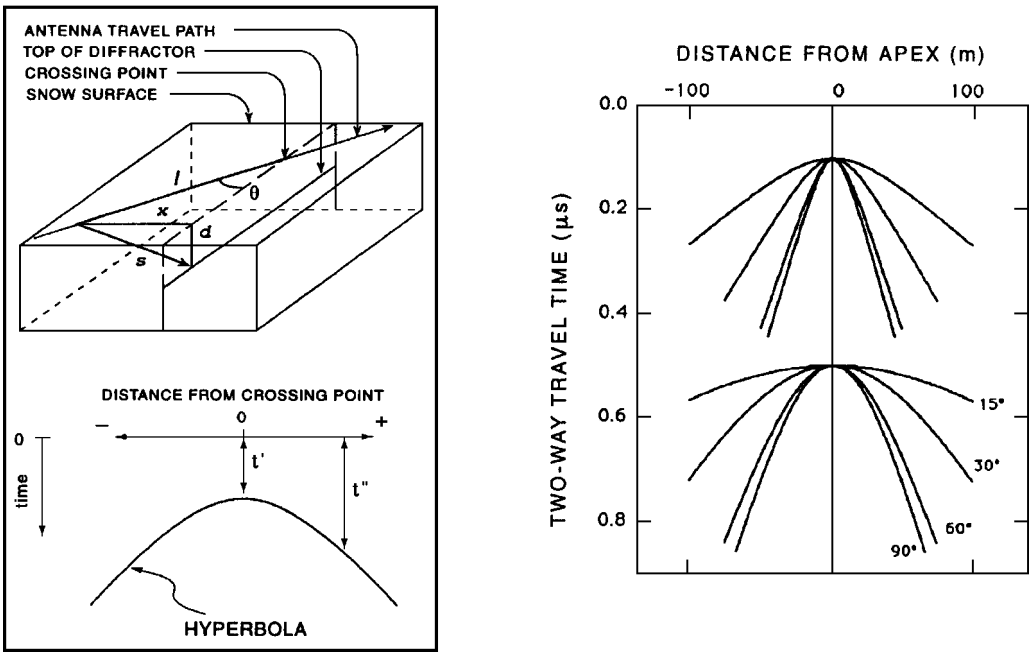

Figura 4-1 Izquierda: Geometría y parámetros que intervienen en el cálculo de la orientación de grietas ocultas.
Derecha: Hipérbolas teóricas para difractores lineales a profundidades de 10m (arriba) y 48m (abajo), atravesados con ángulos de 15º, 30º, 60º y 90º (Clark y Bentley, 1994).

Puede obtenerse otro método para medir la orientación de una grieta sepultada, partiendo de las hipérbolas de difracción que se obtienen si se realizan dos perfiles de georradar paralelos por encima de ella (datos no publicados de Navarro *et al.*[41]). El ángulo, θ, que la grieta forma con respecto a la dirección de ambos perfiles paralelos, se determina mediante

$$\theta = \tan^{-1}(d/D) \ , \tag{4.2}$$

donde d es la distancia entre los perfiles paralelos y D es la distancia horizontal entre los máximos de las hipérbolas de difracción en las secciones

[41] Navarro, F.J., Macheret, Yu.Ya. y Benjumea, B.

de georradar. En la Figura 4-2 se muestra la distancia *D*, medida en la hipérbola H1. Los ángulos que se obtienen en estas tres grietas, de acuerdo con esta fórmula, son 33, 39 y 44 grados, para H1, H2 y H3, respectivamente.

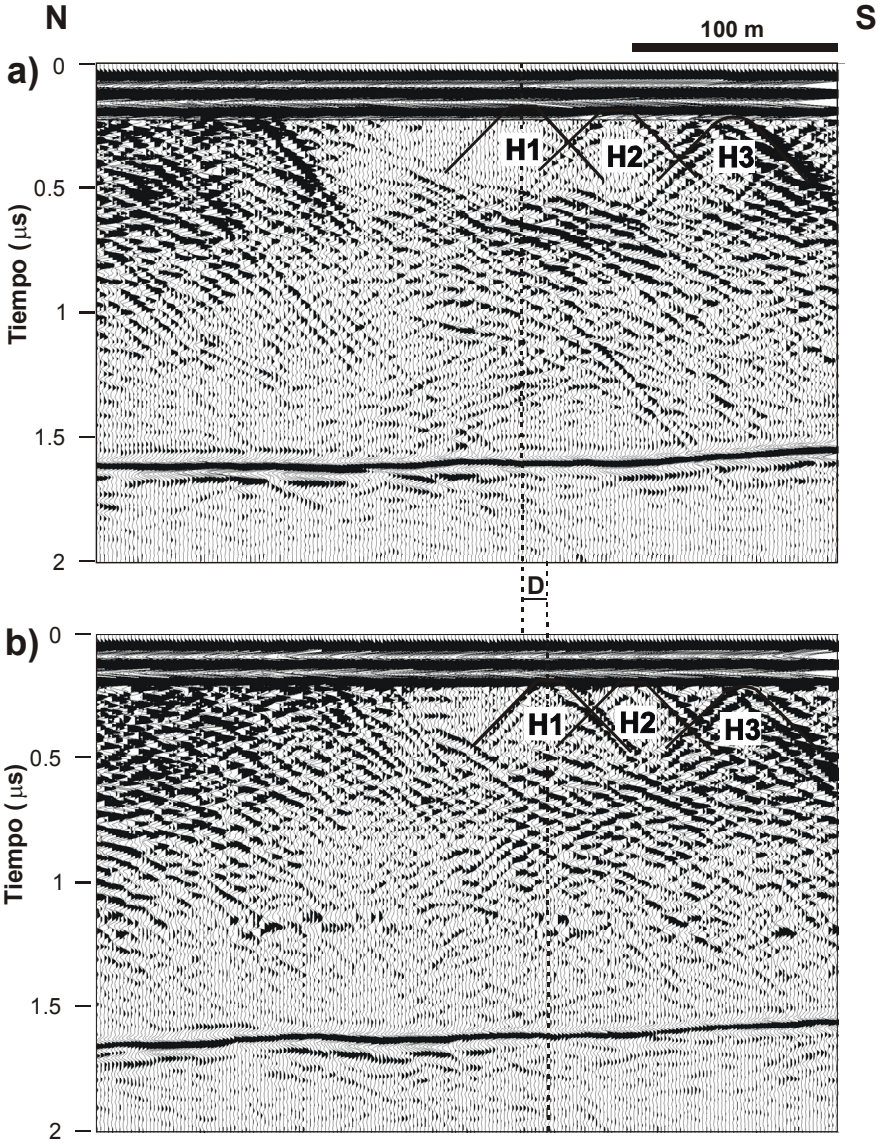

Figura 4-2 Sección de georradar de dos perfiles paralelos, a) y b), separados 10 m, que transcurren sobre varias grietas. Sus hipérbolas de difracción están etiquetadas como H1, H2 y H3.

4.1.2 CMP / WARR

Las técnicas de adquisición de datos CMP y WARR (§2.1.8) permiten calcular tanto la profundidad de las interfaces del subsuelo, como el perfil de velocidades en función de la profundidad. Este cálculo se realiza a través de la variación obtenida en el tiempo de llegada de la señal desde los reflectores (tiempos dobles), según cambia la distancia entre antenas (Figura 4-3), *i.e.*, la variación del *moveout* en función del *offset*. En el registro CMP ambas antenas se alejan mutuamente, manteniendo fijo el punto central (CMP), mientras que la técnica de registro WARR mantiene una antena en un punto fijo mientras la otra se desplaza alejándose de ella.

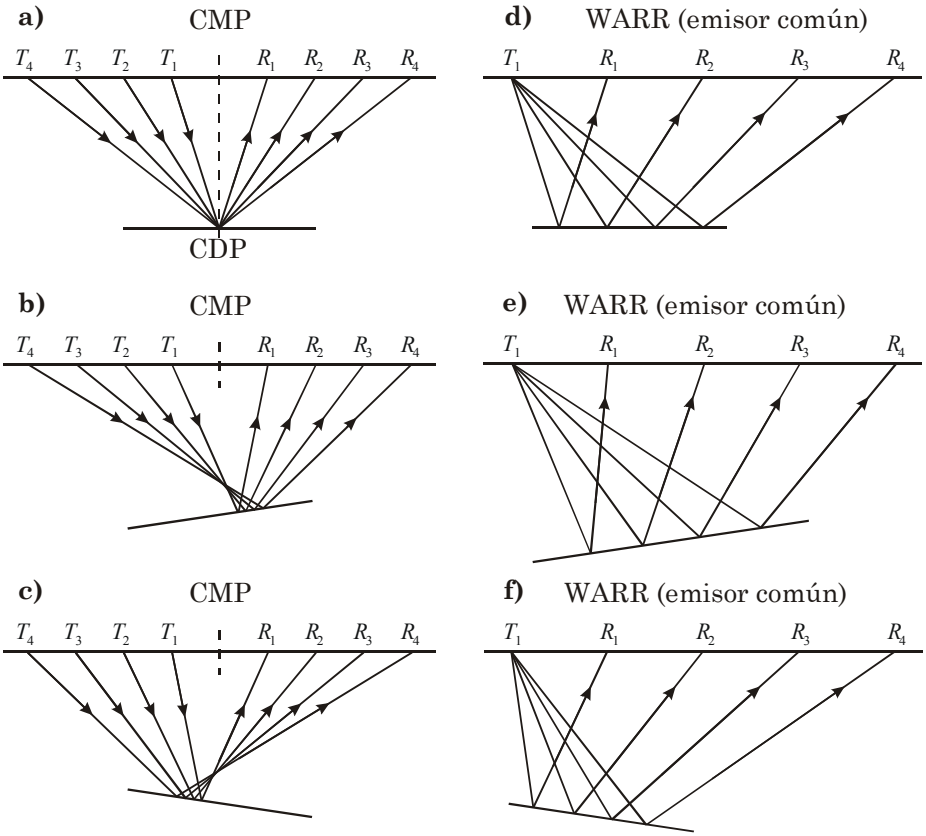

Figura 4-3 a, b y c) Registros CMP sobre reflectores horizontal (CDP), de pendiente positiva y de pendiente negativa, respectivamente. d, e y f) Registros WARR sobre reflectores horizontal, de pendiente positiva y de pendiente negativa, respectivamente.

Es preferible realizar registros CMP, ya que mientras las técnicas WARR precisan de un plano horizontal en el lecho, el CMP idealmente necesita un solo punto (CDP) y en la práctica resulta menos sensible a la pendiente del lecho. En la Figura 4-3 se muestra gráficamente la sensibilidad de los métodos WARR a la pendiente. En los paneles a, b y c se representa el registro CMP sobre un reflector horizontal y sobre reflectores con pendientes positiva y negativa. En los paneles d, e y f se representan los mismos casos para un registro realizado por técnica WARR (emisor común). Los registros de los paneles a y d resultan equivalentes[42], ya que las distancias T_i-R_i en a, son iguales a las T_1-R_i en d. Sin embargo, no ocurre así cuando el reflector está inclinado. En tal caso, el registro CMP utiliza una pequeña zona para sus reflexiones, que resulta de igual tamaño, ya sea ésta de pendiente positiva o negativa. Sin embargo, el registro WARR utiliza una región más extensa del lecho, al quedar fijo uno de los extremos. El registro WARR representado en la Figura 4-3 es de emisor común, por lo que sólo se desplazan los receptores. Esto hace que las pendientes positivas (e) expandan más el abanico de reflexiones que las negativas (f). La relación sería recíproca si se tratara de una técnica de receptor común.

En la situación ideal, con reflectores horizontales, ambas técnicas producen el mismo resultado, pero cuando los reflectores tienen pendiente, es mejor el obtenido mediante CMP. Por ello, en la práctica es preferible esta técnica. En adelante se hará referencia a las técnicas CMP, pero los mismos métodos serán de aplicación también en técnicas WARR. Como ejemplo, Jiracek y Bentley (1971) describen su cálculo de RWV en registros de emisor común.

[42] Para que el registro del panel a de la Figura 4-3 resulte equivalente al del panel d, las distancias T_i-R_i en a, deben ser iguales a las T_1-R_i en d. Dado que en un registro WARR de emisor común sólo se desplazan los receptores, éstos deben distanciarse el doble que en su equivalente CMP.

4.1.2.1 Velocidades involucradas

En el estudio de la velocidad en registros CMP aparecen diferentes tipos de velocidad, como la de un intervalo, la media, la aparente o cuadrática media, la instantánea, la de fase, la de grupo, la del NMO o la del reagrupamiento (Yilmaz, 1987, §3.1; Dobrin[43], 1976, §7.3), si bien no todas pueden calcularse partiendo de los datos de georradar.

En un subsuelo de estrato único y con velocidad de propagación constante, la curva de los tiempos de llegada de un reflector en un registro CMP tiene forma hiperbólica (§2.1.14). La velocidad que transforma este registro en uno de *offset* nulo se denomina velocidad de NMO (§2.2.2) y se representa por v_{NMO}.

La velocidad media hasta un reflector es el cociente de la profundidad del mismo entre la mitad del tiempo de llegada (tiempo doble).

La velocidad de un intervalo (v_{intv}) entre dos reflectores es la velocidad media en el espacio comprendido entre ellos, cociente entre la diferencia de profundidades y la mitad de la diferencia de los tiempos de llegada de ambos.

La velocidad instantánea (v_{inst}) es la derivada de la profundidad con respecto a la mitad del tiempo de llegada y, por tanto, es el doble de la derivada de la profundidad con respecto al tiempo doble.

La velocidad eficaz, aparente, cuadrática media o rms (v_{rms}) en un subsuelo estratificado horizontalmente en N estratos de velocidades constantes (v_i) es la media cuadrática de las velocidades en cada estrato, ponderadas por la

[43] Se referencia la 3ª Ed., si bien existe una 4ª Ed. (Dobrin y Savit, 1988).

razón entre el tiempo doble de *offset* nulo (Δt_{0i}) empleado en atravesar el estrato respectivo[44], y el tiempo doble hasta el reflector (Taner y Koehler, 1969; Yilmaz, 1987, §3.2.1)

$$v_{rms} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} v_i^2 \, \Delta t_{0i} \Big/ \sum_{k=1}^{N} \Delta t_{0k}} \quad . \tag{4.3}$$

Teniendo en cuenta que el denominador anterior representa $t(0)$, definido como el tiempo doble hasta el reflector en un registro de *offset* nulo (§2.1.4), puede rescribirse como

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{1}{t(0)} \sum_{i=1}^{N} v_i^2 \, \Delta t_{0i}} \quad . \tag{4.4}$$

Con arreglo a las refracciones que supone la ley de Snell, Taner y Koehler (1969) expresan el cuadrado del tiempo doble hasta el reflector en subsuelo estratificado horizontalmente, como serie de potencias pares del *offset*[45]. Supuesto que el *offset* sea pequeño, comparado con la profundidad del reflector (aproximación de offset pequeño, *small-spread approximation*), se pueden despreciar los términos de mayor grado, quedando

$$t^2(x) = t^2(0) + \frac{x^2}{v_{rms}^2} \quad . \tag{4.5}$$

La velocidad necesaria para realizar la corrección NMO en un medio con un solo reflector horizontal es la velocidad de propagación en el estrato que lo cubre, como se ha detallado en §2.2.2, y viene expresado por la expresión

[44] Nótese que podrían utilizarse en esta expresión tanto los tiempos dobles, como sus mitades, si bien se indican tiempos dobles, por coherencia con las demás expresiones.

[45] Aparecerían potencias impares si se considerasen pendientes en los reflectores.

(2.67). Por comparación de (4.5) con aquélla, puede comprobarse que si el subsuelo está compuesto por una sucesión de estratos horizontales, cada uno de velocidad constante, la curva del tiempo de llegada en función del *offset* tiene forma aproximadamente hiperbólica, máxime si los *offset* son pequeños (condición de pequeño abanico de *offset*), caso en que además, la velocidad NMO es igual a la velocidad rms en la franja de subsuelo considerada (Taner y Koehler, 1969; Yilmaz, 1987, §3.2.1).

Por otro lado, si el reflector no es horizontal, para obtener la corrección adecuada es preciso utilizar una velocidad v_{NMO} superior a la del medio. El valor necesario es el de la velocidad del medio, dividido por el coseno del buzamiento (Gardner, 1947), apareciendo más factores de corrección si el estudio se realiza en tres dimensiones (Levin, 1971; Yilmaz, 1987, §3.2.3). Por tanto, debe concluirse que un estrato horizontal con alta velocidad puede generar el mismo NMO que uno con buzamiento, pero con velocidad inferior.

Como resume Yilmaz (1987, §3.2.4), Hubral y Krey (1980) realizan este estudio para subsuelos formados por estratos con pendientes arbitrarias, obteniendo expresiones en las que intervienen más factores. Sin embargo, para casos de pendientes leves y pequeños *offset*, concluyen que nuevamente el tiempo de llegada sigue aproximadamente una hipérbola y la velocidad v_{NMO} sigue siendo aproximadamente la v_{rms}.

Además, en la práctica, puede haber pequeñas diferencias entre la velocidad de NMO y la de reagrupamiento (v_{NMO} y v_{st}, respectivamente), dado que la segunda es la de la hipérbola que mejor reagrupa todo el abanico de *offset*, mientras que la primera se calcula sólo para pequeños valores de *offset*, al hacerlo bajo las aproximaciones de pequeño abanico de *offset* y de leves pendientes (Yilmaz, 1987, §3.2.4).

4.1.2.2 Medida de la velocidad

Los métodos de medida de la velocidad de propagación de la onda del georradar a partir de un registro en configuración CMP se fundamentan en la dependencia del *moveout* con la velocidad, dependencia que ha sido detallada ya en el apartado precedente y anteriormente en §2.2.2.

Métodos gráficos

En la Figura 4-4 se muestra un registro CMP realizado por nuestro grupo de investigación, sobre el glaciar Hansbreen durante el verano de 2003. En él se han destacado los eventos principales W1 a W5. El primero se corresponde con la llegada de la onda aérea (§2.1.13), cuya ecuación en *X-T* es la recta (*e.g.*, Annan y Davis, 1976)

$$t_{W1} = t_{OA} = \frac{x}{c} \ , \tag{4.6}$$

por lo que la pendiente de la recta W1 debe ser la velocidad en el aire (~ c).

El segundo evento marcado (W2) corresponde a la onda directa que llega al receptor a través de la superficie del terreno. Su tiempo de llegada vuelve a ser proporcional a la separación entre el emisor y el receptor, generando así una segunda recta, esta vez con pendiente igual a la velocidad de la onda a través del estrato más superficial ($v_{\sup}$)

$$t_{W2} = t_{OD} = \frac{x}{v_{\sup}} \ . \tag{4.7}$$

Dado que la pendiente de W1 es conocida a través de (4.6), esto puede utilizarse para el correcto escalado de los ejes, si ha lugar. Sin embargo, la

pendiente de la segunda recta ofrece una importante información. Es una medida de la velocidad de la onda por el estrato más superficial del subsuelo. En el caso de los glaciares, su valor puede ayudar a determinar si la zona más superficial está constituida por hielo o por nieve o neviza, dado que en estas últimas la velocidad es superior, obteniendo así un indicador para valorar si se está en zona de acumulación o de ablación.

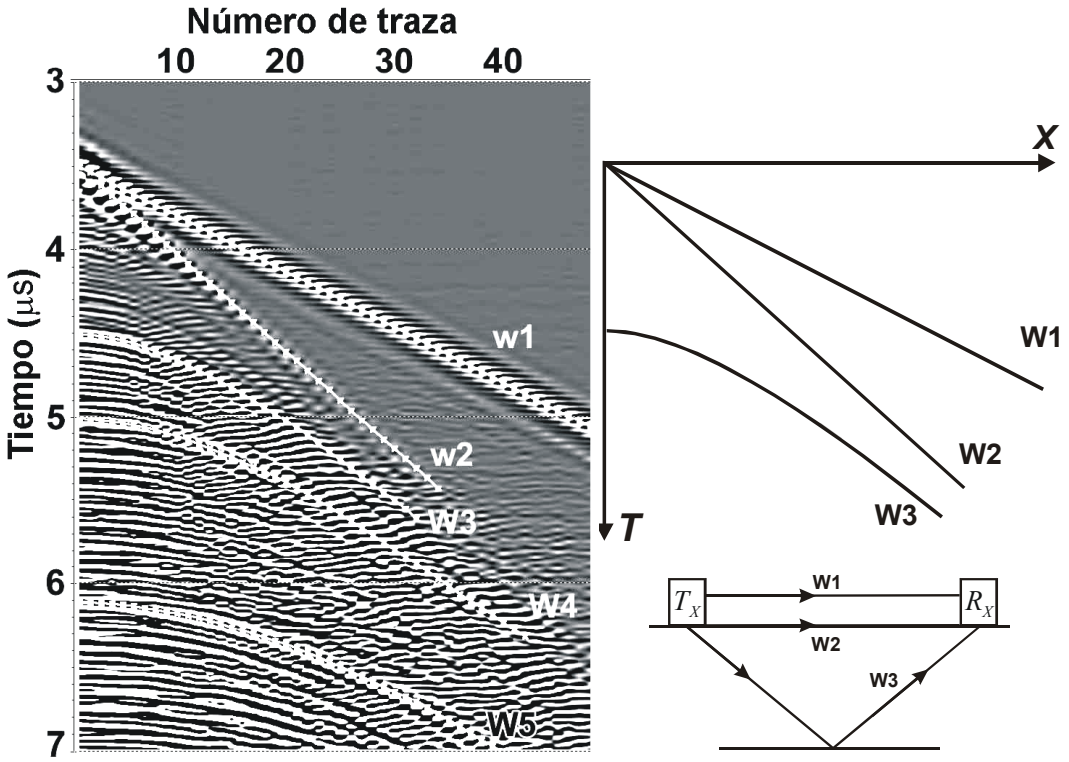

Figura 4-4 Izquierda: registro CMP con eventos principales remarcados. Derecha arriba: eventos W1, W2 y W3 separados del registro. Derecha abajo: relación de los eventos con la onda aérea (W1), la onda directa (W2) y la reflexión en un estrato (W3). Las reflexiones W4 y W5 provienen estratos más profundos, no representados, similares al que provoca W3.

Los restantes eventos marcados son hipérbolas, que provienen de reflexiones a distintas profundidades, cada una mayor que la anterior. En §2.1.14 se ha analizado ya la forma hiperbólica de los reflectores en el diagrama *X-T* de un registro CMP, caracterizada por (2.66),

$$\frac{T^2}{(2d/v)^2} - \frac{x^2}{(2d)^2} = 1 \ .$$

Una forma de determinar la velocidad del medio y la profundidad del reflector consiste en generar plantillas de hipérbolas para diferentes valores de velocidad y de profundidad, que pueden adaptarse al registro. Pero, además, se puede trabajar directamente sobre la imagen del registro CMP en el ordenador y adaptar gráficamente una hipérbola con parámetros variables, utilizando algún programa para ello (*e.g.*, ReflexW)[46].

Existe otro método para obtener los parámetros de estos eventos hiperbólicos en el registro CMP, como se explica a continuación. Al utilizar la definición de $t(0)$ y de $t(x)$ (§2.1.14), la ecuación de la hipérbola anterior se transforma en la ecuación (2.67), de la que, con sólo despejar, se obtiene

$$t^2(x) = t^2(0) + \frac{x^2}{v^2} \ , \tag{4.8}$$

que representa una recta de pendiente $1/v^2$ en el plano X^2-T^2, que corta al eje de ordenadas en

$$t^2(0) = \left(\frac{2d}{v}\right)^2 . \tag{4.9}$$

De esta forma, diferentes reflectores en el CMP generan rectas paralelas en el diagrama X^2-T^2, si la velocidad es constante; mientras que si la velocidad de propagación varía, estas rectas no resultan ya paralelas. En la Figura 4-5

[46] En §3.2.3.11 se expone un ejemplo de esta adaptación, utilizando para ello ReflexW. En el ejemplo se utiliza una hipérbola de difracción y se indica cómo realizarlo con una de reflexión.

se muestra un ejemplo sintético de cuatro reflectores con diferentes velocidades. A la derecha, en el plano X^2-T^2, puede observarse la forma de calcular la profundidad del reflector (d_i) y la velocidad hasta el reflector (v_i).

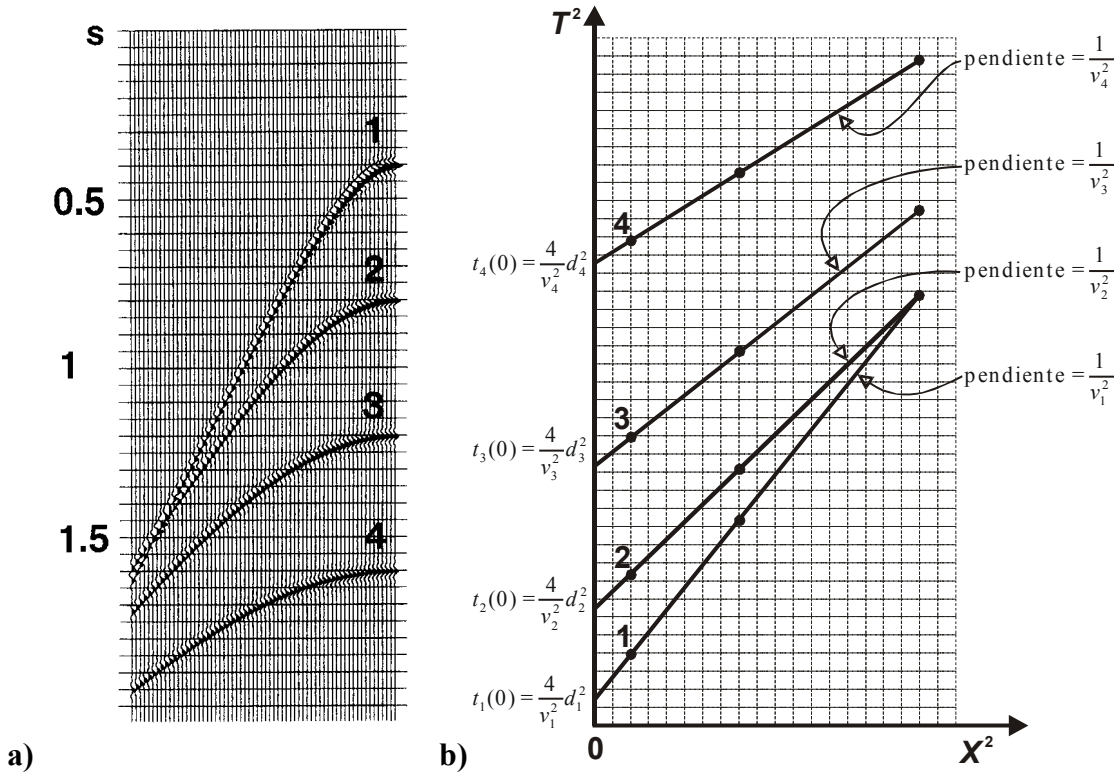

Figura 4-5 a) Registro CMP sobre 4 reflectores (Yilmaz, 1987, Fig. 3-23).
b) Determinación de las velocidades y profundidades.

El inverso de las pendientes de estas rectas es una medida del cuadrado de estas velocidades. Para obtenerlo, se conectan mediante una recta los puntos correspondientes al mismo reflector en el plano X^2-T^2. En la práctica, el cálculo de la pendiente de la recta que mejor se ajusta a estos puntos se realiza por ajuste de mínimos cuadrados. La velocidad que así se obtiene es la de mejor reagrupación, v_{st} (Yilmaz, 1987, §3.3).

Obtenida la velocidad, a través de la pendiente de la recta, puede calcularse la profundidad a la que se encuentra el reflector, despejando d en la ecuación

(4.9). La precisión de estos métodos gráficos depende de la relación señal-ruido de los datos.

Este método de transformación de hipérbolas en rectas en el plano X^2-T^2 fue propuesto por Green (1938). A partir de éste, Dix (1955) desarrolló una técnica para el cálculo de velocidades rms en intervalos a partir de las velocidades rms hasta los reflectores, utilizando la ecuación

$$v_{\text{intv}-1\text{-}2}^2 = \frac{v_{rms\text{-}2}^2\, t_2(0) - v_{rms\text{-}1}^2\, t_1(0)}{t_2(0) - t_1(0)} \quad , \tag{4.10}$$

conocida como ecuación de Dix (Dobrin, 1976, p. 230).

También Claerbout *et al.* (1996, §10.4.1) propone otro método gráfico para calcular velocidades rms y de intervalo sobre registros CMP. Las velocidades rms se calculan como el inverso de la pendiente en el plano *X*-*T* de la recta tangente a la hipérbola, multiplicado por el *offset* en el punto de tangencia y dividido entre el tiempo doble en dicho punto (Figura 4-6)

$$v_{rms}^2 = \frac{x}{t(x)} \frac{1}{dt/dx} = \frac{x_A}{t_A \operatorname{tg}\varphi_A} \quad . \tag{4.11}$$

Este cálculo se completa con la medida de un segundo punto en la recta tangente (R, no representado, para mayor claridad en la figura)

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{x_A\left(x_R - x_A\right)}{t_A\left(t_R - t_A\right)}} \quad . \tag{4.12}$$

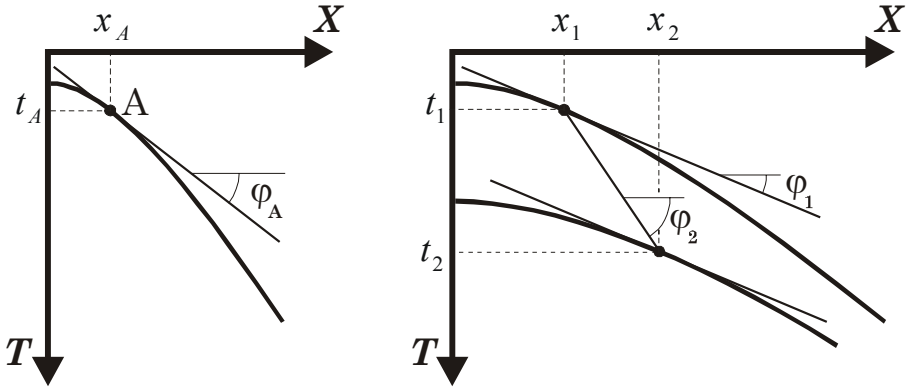

Figura 4-6 Métodos gráficos para el cálculo de velocidades rms y de intervalo en registros CMP.

Consecuentemente, para calcular la velocidad de un intervalo se generan dos rectas paralelas tangentes a las hipérbolas que definen los reflectores extremos del intervalo. Cada recta es tangente en un punto de una de las hipérbolas (Figura 4-6). La unión de estos dos puntos genera otra recta, con una segunda pendiente en el plano *X-T*. La velocidad del intervalo es igual al inverso de la raíz cuadrada del producto de ambas pendientes[47].

$$v_{\text{intv}} = \frac{1}{\sqrt{\text{tg}\varphi_1 \ \text{tg}\varphi_2}} = \sqrt{\frac{x_2 - x_1}{(t_2 - t_1)\text{tg}\varphi_1}} \tag{4.13}$$

Al posicionar manualmente las rectas paralelas sobre los datos se visualiza su ruido, pudiendo seleccionar los valores de *offset* más adecuados para realizar la medida. El cálculo puede completarse estableciendo otro punto en la recta tangente, *e.g.*, de la hipérbola superior (R1, no representado en la figura)

$$v_{\text{intv}} = \sqrt{\frac{(x_2 - x_1)(x_{R1} - x_1)}{(t_2 - t_1)(t_{R1} - t_1)}} \tag{4.14}$$

[47] Si las pendientes se midieran en el plano *T-X*, no serían necesarios los inversos.

Paneles de velocidad constante: CVP y CVS

Otro método para calcular la velocidad de propagación consiste en aplicar repetidamente la corrección NMO a un mismo registro CMP, utilizando diferentes velocidades constantes, en secuencia. Colocados los resultados unos junto a otros, puede compararse la horizontalidad de los diferentes reflectores para cada velocidad, estimando así la mejor velocidad para cada reflector. Este método se conoce como análisis mediante paneles de velocidad constante, CVP (*Constant-Velocity Panels*).

Existe una variación sobre este método (Yilmaz, 1987, §3.3), denominada de análisis mediante paneles reagrupados de velocidad constante, CVS (*Constant-Velocity Stack panels*), que aunque es de aplicación en sísmica, no suele serlo en georradar, por la técnica de adquisición utilizada.

El método es similar al anterior, pero se aplica sobre perfiles que se han obtenido como sucesión de registros CMP desplazados a lo largo de una línea[48]. El método de análisis de la velocidad por paneles CVS consiste en el cálculo repetido del perfil reagrupado utilizando una sucesión de velocidades; colocados los perfiles unos junto a otros, se elige por comparación la mejor velocidad para cada profundidad, que es aquélla que proporciona mejor continuidad lateral entre trazas al perfil.

[48] La forma de obtener el perfil con esta técnica, habitual en sísmica de reflexión, consiste en reagrupar las trazas en cada registro CMP, obteniendo una única traza reagrupada por cada uno (§2.1.8 y §2.1.10). Puestas unas junto a las otras las trazas reagrupadas, generan lo que se conoce como un perfil reagrupado.

En ambos métodos, CVP y CVS, la elección del intervalo de velocidades de prueba y del salto de velocidad entre paneles sucesivos debe realizarse con cautela. El intervalo debe incluir la velocidad correcta, y ésta puede tener valores inusualmente altos en los eventos fuera del plano vertical de registro y en los reflectores de alto buzamiento. Por otro lado, ambos métodos tienen como inconveniente que su precisión está limitada por el salto entre las sucesivas velocidades utilizadas en las pruebas.

A pesar de que el método de paneles CVS no se utiliza en georradar, es de interés por su relación con el método de análisis mediante paneles CVP y con el de análisis por espectro de velocidades, que se explica a continuación. Una característica del método CVS es que se selecciona la velocidad correcta por la continuidad lateral de los reflectores en el perfil reagrupado (diferentes puntos del plano), mientras que con el espectro de velocidades la elección se realiza por la correlación cruzada entre trazas en un registro CMP (medidas de un mismo punto en el plano). Comparando ambos métodos, el espectro de velocidades resulta más útil ante la presencia de reflexiones múltiples, mientras que el CVS puede resultar de especial utilidad ante subsuelos con estructura complicada (Yilmaz, 1987, §3.3).

Espectro de velocidades

Un espectro de velocidades consiste en un panel *v-t* en el que se muestran unos junto a los otros (en escala de colores, tonos de gris, o por isolíneas), los resultados de la coherencia de alguna magnitud (amplitud, correlación cruzada, etc.) tras realizar la reagrupación hiperbólica para una sucesión ordenada de velocidades (Taner y Koehler, 1969). Eligiendo los valores

máximos obtenidos para cada tiempo, se obtiene la ley de variación de la velocidad que maximiza la coherencia de esa magnitud.

El espectro se obtiene generando un panel *v-t* a partir de un único registro CMP, sobre el que se realiza un estudio de coherencia en la reagrupación hiperbólica, para una secuencia de velocidades. En el panel aparecen con mayor amplitud las reflexiones que han sido reagrupadas en fase. Es decir, las reagrupadas con la velocidad que hace pasar la hipérbola que define la ecuación (4.8) por las amplitudes máximas del reflector, como muestra la Figura 4-7. El filtro que aparece en la figura está encargado de realizar la medida de la coherencia (*e.g.*, semblanza, correlación cruzada, etc.).

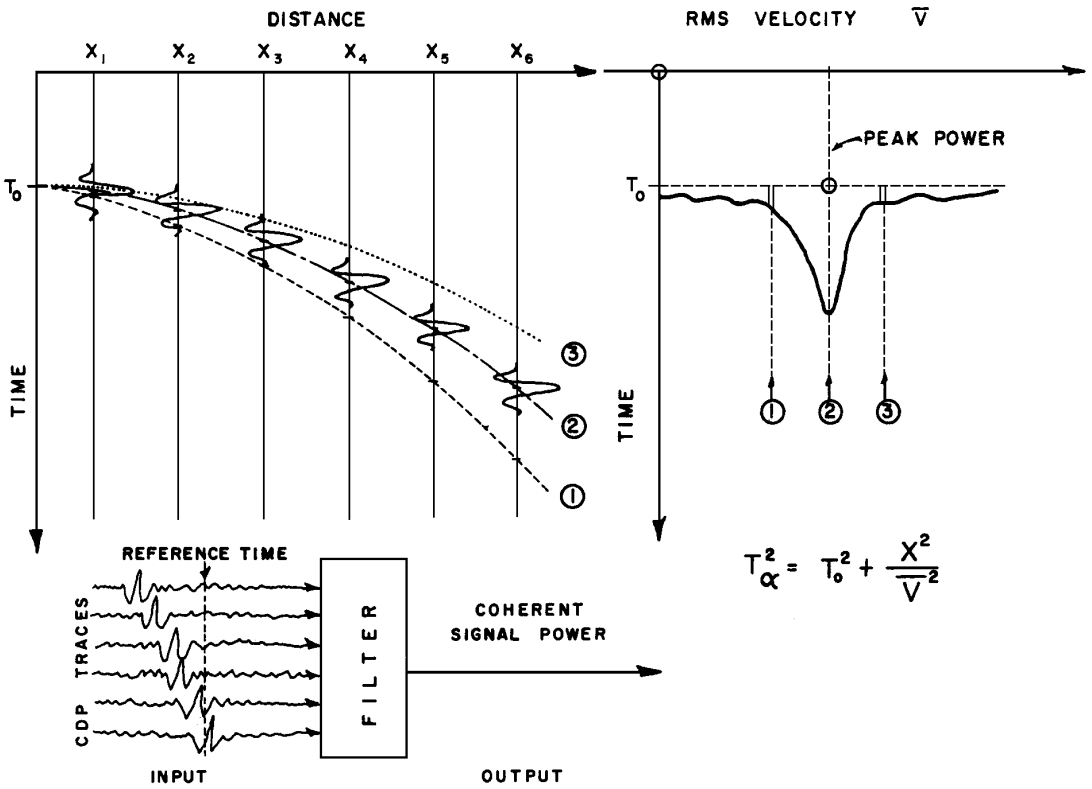

Figura 4-7 Búsqueda de la velocidad que genera mayor coherencia en la reagrupación hiperbólica de la señal (Taner y Koehler, 1969).

Taner y Koehler (1969) proponen el uso del espectro de velocidades y sugieren la semblanza como operador idóneo para maximizar la coherencia. Posteriormente, Neidel y Taner (1971) realizan un estudio de diferentes magnitudes para este fin, destacando nuevamente el uso de la semblanza. Algunas de estas magnitudes son (también Yilmaz, 1987, §3.3.1):

- Amplitud reagrupada (s_t, *stacked amplitude*)

$$s_t = \sum_{i=1}^{N} f_{i,t(i)} \,, \tag{4.15}$$

donde N es el número de trazas reagrupadas a partir del registro CMP; $t(i)$ es el instante t para el *offset* de la traza i-ésima, según la ecuación del reagrupamiento hiperbólico (4.8); $f_{i,t(i)}$ es la amplitud de la i-ésima traza en el instante $t(i)$.

- Amplitud reagrupada normalizada (NS_t, *normalized stacked amplitude*)

$$NS_t = \frac{|s_t|}{\sum_{i=1}^{N} |f_{i,t(i)}|} = \frac{\left|\sum_{i=1}^{N} f_{i,t(i)}\right|}{\sum_{i=1}^{N} |f_{i,t(i)}|} \,, \tag{4.16}$$

que toma valores entre cero y uno, como puede demostrarse por la desigualdad triangular.

- Coeficiente de semblanza (NE_t)

El coeficiente de semblanza está basado en la correlación cruzada entre trazas (*e.g.*, Yilmaz, 1987, §3.3.1). Se define como

$$NE_t = \frac{1}{N} \frac{\sum_t \left(\sum_{i=1}^{N} f_{i,t(i)} \right)^2}{\sum_t \left(\sum_{i=1}^{N} f_{i,t(i)}^2 \right)} = \frac{1}{N} \frac{\sum_t s_t^2}{\sum_t \left(\sum_{i=1}^{N} f_{i,t(i)}^2 \right)} \,, \tag{4.17}$$

que representa la normalización del ratio de energías de salida/entrada, en una ventana temporal centrada en el instante $t(i)$, donde las muestras

de la traza de salida se obtienen como suma de las correspondientes muestras de las trazas de entrada en la ventana temporal (Figura 4-8). Esta ventana temporal se utiliza para calcular la energía en torno al instante t en las entradas. El sumatorio en t representa una suma a lo largo de la ventana temporal en el registro CMP y genera como resultado un valor asociado al instante t, que se corresponde con el instante $t(0)$ en el CMP. Por simplicidad, no se utiliza $t(0)$ como subíndice del coeficiente de semblanza, sino t. Este coeficiente toma valores entre cero y uno.

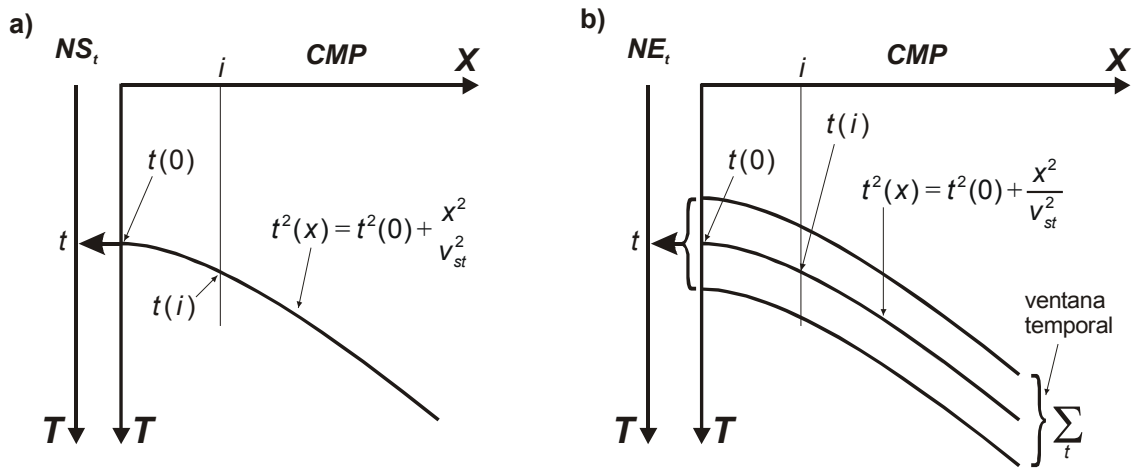

Figura 4-8 Variables involucradas en la medida de coherencia en un registro CMP.
a) El valor del cálculo realizado a lo largo del CMP (*e.g.*, NS_t) se asocia al instante t, correspondiente a $t(0)$.
b) El valor del cálculo realizado sobre la ventana temporal a lo largo del CMP (*e.g.*, NE_t) se asocia igualmente a t.

Se conoce como análisis de semblanza al método de cálculo de velocidades que utiliza el coeficiente de semblanza en el espectro de velocidades.

Los valores del coeficiente de semblanza (u otra medida de la coherencia) reagrupados en fase se refuerzan, a la vez que se diluyen los reagrupados fuera de fase. Este efecto se acentúa más si el número de trazas que se reagrupan es grande. Por ello, cuanto mayor sea el abanico de *offset* que

contribuye a la medida de la coherencia, mejor resolución se consigue en el espectro de velocidades (Taner y Koehler, 1969; Yilmaz, 1987, §3.3.1).

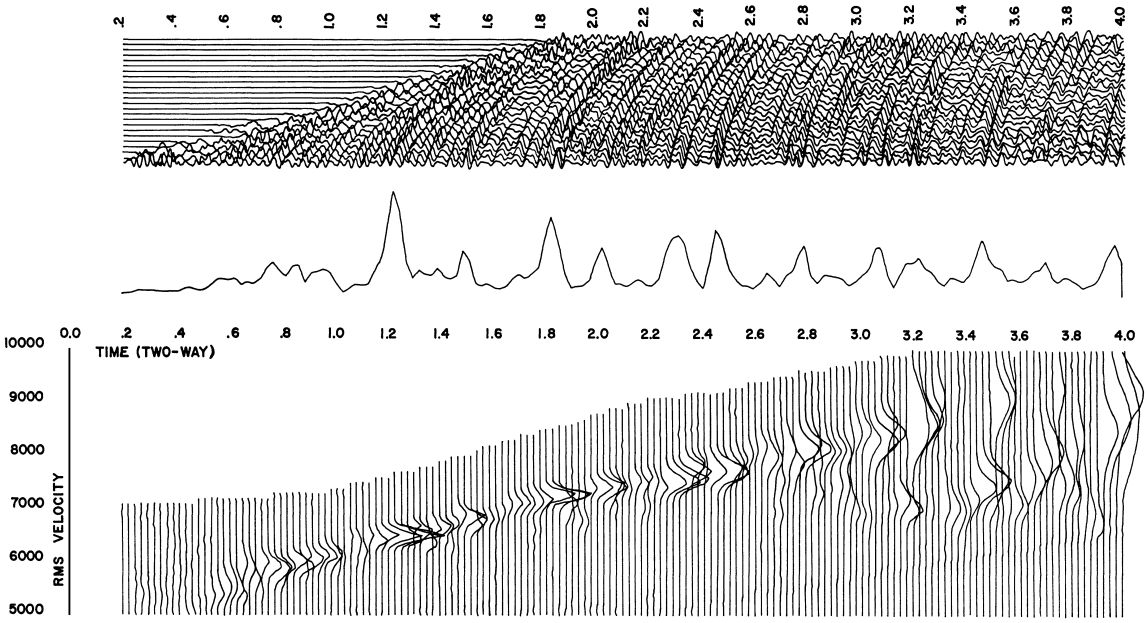

Figura 4-9 Análisis de semblanza típico (abajo) realizado sobre un registro CMP (arriba) medido por métodos sísmicos. El perfil se analiza entre 0'2 s y 4 s, con velocidades variando entre 1524 $m\,s^{-1}$ y 3048 $m\,s^{-1}$ ($ft\,s^{-1}$ en la figura), a intervalos de 3'048 $m\,s^{-1}$ (100 $ft\,s^{-1}$) (Taner y Koehler, 1969, Figura 7).

En la Figura 4-9 se muestra un análisis de semblanza, en el que se aprecia la dependencia de la velocidad con la profundidad. Esta dependencia resulta evidente hasta el segundo 2'8, pero tras él se produce cierta dispersión energética para velocidades entre 2134 $m\,s^{-1}$ (7000 $ft\,s^{-1}$) y 2438 $m\,s^{-1}$ (8000 $ft\,s^{-1}$). El análisis de semblanza hasta 2'8 s indica fuertes reflexiones primarias, mientras que entre 3'4 y 3'8 aparecen fuertes reflexiones múltiples, que perturban el análisis.

4.1.3 Medidas en pozos de sondeo

El registro con georradar en pozos de sondeo (*borehole radar*) se basa en los mismos principios que el de superficie y el equipo necesario para realizarlo es teóricamente el mismo, con la posible excepción de las antenas, al trabajar éstas en el interior de un pozo. Las técnicas de adquisición de datos sí varían, con respecto a las de superficie.

El radioecosondeo en pozos se puede utilizar para realizar perfiles por reflexión, similares a los realizados en superficie, pero garantizando el registro en profundidad en subsuelos en los que la penetración de la onda en el subsuelo es escasa. Esto se realiza introduciendo ambas antenas por un pozo, y realizando un registro, que habitualmente será de *offset* común.

Pero existen además otras técnicas, de iluminación directa de la antena receptora, que no se utilizan en superficie. Estas técnicas se basan en el registro con una antena descendiendo por un pozo, mientras la otra se sitúa al otro extremo de la zona de subsuelo que se desea iluminar, *i.e.*, en un pozo paralelo, o en superficie.

Normalmente se pueden realizar estudios de la RWV a partir de cualquier registro, como puede desprenderse del contenido de este §4.1. Pero existen técnicas particularmente idóneas para medir la RWV. Además de las ya mostradas, existen dos técnicas de radioecosondeo en pozos de especial interés para la medida de la velocidad. Son la transiluminación y la técnica conocida como perfil vertical de radar (VRP- *Vertical Radar Profiles*).

Para realizar una transiluminación se necesitan dos pozos, suficientemente separados. La antena transmisora se introduce en uno y la receptora en el otro (§2.1.8), para obtener un perfil tomográfico del subsuelo entre ambos pozos. Se puede hacer que las antenas desciendan al mismo ritmo, pero habitualmente, por cada posición de una antena, se realizan registros con la otra situada a intervalos de profundidad prefijados, para obtener registros de cobertura múltiple. Para cada profundidad (z), dividiendo la distancia que separa los pozos, entre el tiempo de llegada del pulso, se obtiene la velocidad (Annan y Davis, 1978).

Otro método, variante del anterior, muy utilizado para el cálculo de velocidades en el subsuelo, es el VRP. Se utiliza un único pozo (Murray *et al.*, 2000). Una antena se mantiene en superficie, mientras la otra se hace descender por el pozo. Con esta disposición, se realizan mediciones en puntos a intervalos constantes (*e.g.*, a pasos de 1m). Con el perfil obtenido se calculan las velocidades sin más que dividir los tiempos entre la distancia entre antenas, para cada z. Se obtiene mayor resolución en la profundidad cuanto menor sea el paso de medida. Se obtiene así el perfil de velocidades desde la superficie hasta la profundidad z. Este perfil puede repetirse para diferentes separaciones en superficie y distintas direcciones, *e.g.*, N, S, E y O.

4.2 Densidad y contenido en agua

La densidad y el contenido en agua de la nieve, la neviza o el hielo del glaciar[49] son parámetros necesarios para evaluar su masa y afectan a su caracterización, tanto desde el punto de vista dinámico como del térmico. Además, la densidad es una medida de la porosidad o del contenido en agua en el medio, lo que relaciona estos dos parámetros entre sí. Teniendo en cuenta las diferentes permitividades del aire, el hielo y el agua, su mayor o menor presencia influye en la permitividad de su mezcla. Es evidente, por tanto, que la permitividad, la densidad y el contenido en agua quedan relacionadas. Y lo hacen también con la RWV a través de la expresión (2.46).

Conocido ya cómo calcular la RWV y su relación con la permitividad, en este apartado se estudian las expresiones que relacionan la permitividad, la densidad y el contenido en agua. Las variables más representativas que se utilizan en este apartado se definen a continuación, representando (siguiendo a Smith y Evans, 1972) por ε_d, ε_s, ε_i y ε_w, a las permitividades dieléctricas relativas del medio glaciar seco (d-*dry*); del medio glaciar húmedo (s-*soaked*); del hielo puro (i-*ice*); y del agua (w-*water*), respectivamente. Nótese que el hielo seco coincide con el hielo frío (§2.1.5), mientras que el húmedo se conoce como hielo templado.

Además, las velocidades en el medio glaciar seco y en presencia de agua se representan por v_d y v_s, respectivamente. Su relación con las permitividades a través de (2.46), proporciona las relaciones

$$\varepsilon_d = (c/v_d)^2 \qquad \text{y} \qquad \varepsilon_s = (c/v_s)^2 \ . \tag{4.18}$$

[49] En adelante, se hará alusión al medio glaciar, en referencia a la nieve, neviza o hielo del glaciar.

El medio glaciar puede estudiarse como una mezcla de hielo, aire y agua. La fracción de volumen del medio glaciar ocupado por cada uno se representa por θ, A y W, respectivamente, donde W se conoce como contenido en agua del medio glaciar[50]. Así,

$$\theta + A + W = 1 \tag{4.19}$$

- Por tanto, la porosidad del hielo glaciar, neviza o nieve es

$$P = 1 - \theta \ . \tag{4.20}$$

- En el hielo glaciar, neviza o nieve secos, el contenido en agua es nulo ($W = 0$), por lo que θ se puede obtener mediante la relación entre su densidad y la del hielo puro

$$\theta = \rho_d / \rho_i \ . \tag{4.21}$$

y consecuentemente, la porosidad puede expresarse como

$$P = 1 - \theta \quad = 1 - \rho_d / \rho_i \ , \tag{4.22}$$

que, al no haber agua, coincide además con el contenido en aire ($P = A$).

- En el hielo templado o en la nieve húmeda, si se encuentra saturado de agua, ésta ocupa todos los poros, desplazando al aire ($A = 0$). En tal caso, el contenido en agua coincide con la porosidad del medio

$$W = P = 1 - \theta \ . \tag{4.23}$$

Seligman (1936, p. 144, *cit.* por Paterson, 1994, p. 9) ofrece una tabla con las densidades de diferentes tipos de medios glaciares, partiendo de la nieve más ligera, hasta llegar al hielo glaciar. Sus valores se incluyen a continuación en la Tabla 4, donde además se realiza el cálculo de la porosidad del medio, utilizando para ello la expresión (4.22).

---

[50] Los contenidos en hielo, aire o agua, al igual que la porosidad, son fracciones y así aparecen en las expresiones, pero presentados como datos es habitual expresarlos como porcentajes en volumen.

Tipos de medio glaciar	ρ [Mg m^{-3}]	P [%]
Nieve nueva (según cae en calma)	0'050 - 0'07	94'5 - 92'4
Nieve reciente (*damp new snow*)	0'100 - 0'200	89'1 - 78'2
Nieve recristalizada (*depth hoar*)	0'100 - 0'300	89'1 - 67'3
Nieve consolidada (*settled snow*)	0'200 - 0'300	78'2 - 67'3
Nieve asentada por el viento	0'350 - 0'400	61'8 - 56'4
Neviza (*firn*)	0'400 - 0'830	56'4 - 9'5
Neviza y nieve muy húmedas	0'700 - 0'800	- - -
Hielo glaciar	0'830 - 0'917	9'5 - 0'0

Tabla 4 Densidad de diferentes medios glaciares y su porosidad. (modificado a partir de Seligman, 1936, p. 144, *cit.* por Paterson, 1994, p. 9). La porosidad se calcula mediante (4.22), por lo que sólo se realiza para medios glaciares secos.

En esta tabla se aprecia que la densidad de la nieve seca oscila entre 0'050 $0'400\ \mathrm{Mg\ m^{-3}}$, valor a partir del cual es habitual de la neviza. Si embargo, estando húmedas, sus densidades toman valores muy superiores, entre 0'700 y $0'800\ \mathrm{Mg\ m^{-3}}$. Paterson (1994, cap. 2) considera que la densidad mínima del hielo glaciar es $0'830\ \mathrm{Mg\ m^{-3}}$. A partir de ésta, los espacios de aire que separan los gránulos de neviza se cierran, convirtiéndose en pequeñas burbujas. Representa la densidad límite entre la neviza y el hielo. Por otro lado, aunque indica que por efecto de las altas presiones y bajas temperaturas, el hielo glaciar puede llegar densidades superiores[51], utiliza como densidad límite del hielo $\rho_i = 0'917\ \mathrm{Mg\ m^{-3}}$. El mismo valor que usan Jiracek y Bentley (1971), Bogorodsky *et al.* (1985, p. 41), Mätzler (1996), o Frolov y Macheret (1999).

[51] A modo de ejemplo, indica que en la estación polar Byrd (80'0º S - 120'0º W), a 1000 m de profundidad y -28'7 ºC, aparece un máximo de 0'9206 Mg m^{-3}; pero al descender más la temperatura aumenta, por lo que en el lecho, a 2164 m, que se encuentra a la temperatura de fusión, la densidad desciende a 0'917 Mg m^{-3}.

En el rango de frecuencias del georradar, Frolov y Macheret (1999) proponen $\varepsilon_i = 3'19 \pm 0'04$ como permitividad dieléctrica relativa del hielo a $0\,^{\circ}\mathrm{C}$. Este valor es consecuente tanto con el levemente inferior, $\varepsilon_i = 3'185$, que Mätzler (1996) utiliza a $-4\,^{\circ}\mathrm{C}$, como con la permitividad $\varepsilon_i = 3'18$, que Bogorodsky *et al.* (1985, p. 41) presentan para $-20\,^{\circ}\mathrm{C}$. Sin embargo, Koh (1997), con hielo generado a partir de agua desionizada, sin burbujas de aire, a $-2'5\,^{\circ}\mathrm{C}$ y para una frecuencia de $1'8\ \mathrm{GHz}$, obtiene una permitividad $\varepsilon_i = 3'17 \pm 0'02$. El mismo valor, $\varepsilon_i = 3'17 \pm 0'07$, que sugiere Evans (1965). También Robin *et al.* (1969, *cit.* por Bogorodsky *et al.* 1985, p. 41) utilizan el valor $\varepsilon_i = 3'17$.

Para otras temperaturas, Frolov y Macheret (1999) se remiten a la expresión de Mätzler y Wegmüller (1987)

$$\varepsilon_i = 3'1884 + 0'00091T \ , \tag{4.24}$$

(con T en grados Celsius). Mientras que Glen y Paren (1975) citan a Gough (1972), tomando su expresión[52]

$$\varepsilon = 3'093 \pm 0'003 + (0'72 \pm 0'60)10^{-4}T_K + (0'11 \pm 0'02)10^{-5}T_K^2 \ , \tag{4.25}$$

donde T_K son temperaturas absolutas. El uso de esta expresión queda restringido a temperaturas inferiores a $-40\,^{\circ}\mathrm{C}$ (233 K). Esta expresión genera valores superiores en *ca.* 0'02 a los de (4.24).

[52] Dado que las frecuencias a las que se utiliza el georradar son muy superiores a las de relajación dieléctrica del hielo, y la parte imaginaria puede despreciarse, en este apartado se trabaja sólo con la parte real de la permitividad y se identifica ésta con ε_∞.

Por otro lado, Frolov y Macheret (1999) coinciden con Smith y Evans (1972) proponiendo para el agua a $0\,^{o}\mathrm{C}$ el uso de $\varepsilon_w = 86$, mientras que otros autores dan valores entre 80 y 88 (Tabla 1).

Tiuri *et al.* (1984) proponen el cálculo de la permitividad del agua en función de la frecuencia, según la expresión de Debye, (2.59). A partir de ella, y recordando la relación entre la frecuencia característica de relajación y el tiempo de relajación, $f_C = (2\pi\tau)^{-1}$, puede expresarse como

$$\varepsilon_w = \varepsilon_{w\infty} + \frac{\varepsilon_{wS} - \varepsilon_{w\infty}}{1 + (f/f_{wC})^2} \quad . \tag{4.26}$$

Utilizando los valores que Tiuri *et al.* (1984) proponen:

$\varepsilon_{wS} = 87'74$; $\varepsilon_{w\infty} = 4'9$; y $\tau_w = 18\,\mathrm{ps}$ ó, lo que es lo mismo, $f_{wC} = 8'84$ MHz,

se obtiene la siguiente tabla de permitividades del agua en función de la frecuencia. Para otras frecuencias puede utilizarse (4.26).

f	ε_w	*f*	ε_w	*f*	ε_w	*f*	ε_w	*f*	ε_w
5	87'35	**55**	86'89	**105**	86'43	**155**	85'98	**205**	85'53
10	87'31	**60**	86'84	**110**	86'39	**160**	85'93	**210**	85'49
15	87'26	**65**	86'80	**115**	86'34	**165**	85'89	**215**	85'44
20	87'21	**70**	86'75	**120**	86'30	**170**	85'84	**220**	85'40
25	87'17	**75**	86'71	**125**	86'25	**175**	85'80	**225**	85'35
30	87'12	**80**	86'66	**130**	86'20	**180**	85'75	**230**	85'31
35	87'07	**85**	86'61	**135**	86'16	**185**	85'71	**235**	85'26
40	87'03	**90**	86'57	**140**	86'11	**190**	85'66	**240**	85'22
45	86'98	**95**	86'52	**145**	86'07	**195**	85'62	**245**	85'18
50	86'94	**100**	86'48	**150**	86'02	**200**	85'57	**250**	85'13

Tabla 5 Permitividad del agua a diferentes frecuencias de georradar, en MHz, según: $\varepsilon_w = 4'9 + 82'84 / \left[1 + (f/8'84)^2\right]$.

Los métodos exponenciales de medida de la permitividad de una mezcla de varios componentes la obtienen a través de la expresión

$$\varepsilon^{\alpha} = \sum_{k} f_k \, \varepsilon_k^{\alpha} \ , \tag{4.27}$$

donde ε es la permitividad de la mezcla, ε_k y f_k son, respectivamente, la permitividad y la fracción de volumen del componente k-ésimo ($\sum f_k = 1$), y el exponente α es el grado del modelo. Diversos autores han utilizado el modelo exponencial con grados diferentes (Sihvola *et al.*, 1985).

Looyenga (1965) calcula la permitividad de la mezcla de dos componentes, resultando una expresión exponencial de grado $\alpha = 1/3$

$$\varepsilon^{1/3} = \varepsilon_1^{1/3} + f_2 \, (\varepsilon_2^{1/3} - \varepsilon_1^{1/3}) \ . \tag{4.28}$$

Pero la caracterización del medio glaciar con sólo dos elementos podría suponer un problema, por ello, puede modelarse como mezcla de agua, hielo y aire. Recordando que $\varepsilon_a = 1$ y con las relaciones (4.19) y (4.20), se obtiene

$$\varepsilon_s = \left[W\varepsilon_w^{\alpha} + \theta\varepsilon_i^{\alpha} + A\varepsilon_a^{\alpha} \right]^{1/\alpha} = \left[W\varepsilon_w^{\alpha} + \left(1 - P\right)\varepsilon_i^{\alpha} + P - W \right]^{1/\alpha} \ . \tag{4.29}$$

Por extensión, Macheret y Glazovsky (2000) la presentan con $\alpha = 1/3$

$$\varepsilon_s = \left[W\varepsilon_w^{1/3} + \left(1 - P\right)\varepsilon_i^{1/3} + P - W \right]^{3} \ , \tag{4.30}$$

y la utilizan para estudiar las variaciones en el contenido en agua entre la primavera y el verano, suponiendo P una constante del glaciar.

4.2.1 Hielo, neviza o nieve secos

La parte real de la permitividad no depende de su estructura, sólo de su densidad (*e.g.*, Tiuri *et al.*, 1984). Se estudian aquí las expresiones que relacionan la permitividad del medio glaciar seco con su densidad. Con ellas, mediante (4.18), se puede calcular la densidad del hielo, nieve o neviza secos a partir de su RWV, o viceversa.

En ausencia de agua, el modelo de Looyenga, expresado por (4.28), se utiliza para estudiar el medio glaciar como mezcla de hielo puro y aire. Bogorodsky *et al.* (1985) presentan dos motivos por los que esta expresión es adecuada para su uso con el medio glaciar. El primero es la sencillez, por la linealidad entre la densidad y $\varepsilon^{1/3}$. El segundo es la simetría en su tratamiento de ambos medios, por lo que consideran que, en principio, puede ser utilizada en todo el rango de densidades de la nieve y la neviza. De hecho, Looyenga presentó su modelo como método de calculo de la permitividad de la mezcla de dos componentes cualesquiera. Así, en la práctica, el modelo de Looyenga se aplica tanto la nieve y neviza secos (*e.g.*, Frolov y Macheret, 1999; Macheret *et al.*, 1993; Glen y Paren, 1975; Smith y Evans, 1972), como al hielo glaciar seco (hielo frío) (*e.g.*, Macheret *et al.*, 1993), sin más que aplicar la fracción de volumen ocupado por el hielo (θ) y hacer unitaria la permitividad del aire

$$\varepsilon_d^{1/3} = 1 + \theta\,(\varepsilon_i^{1/3} - 1), \tag{4.31}$$

que en virtud de (4.21), puede escribirse como

$$\varepsilon_d^{1/3} = 1 + \frac{\rho_d}{\rho_i}\,(\varepsilon_i^{1/3} - 1). \tag{4.32}$$

A continuación se presentan algunas expresiones derivadas de ésta. Pero, utilizando (4.32) junto con (4.24), pueden obtenerse fórmulas de cálculo de ε_d en función de ρ_d, adaptadas a la temperatura del medio.

- Tomando $\rho_i = 0'917 \text{ Mg m}^{-3}$, con $\varepsilon_i = 3'19$ se obtiene

$$\varepsilon_d = \left(1 + 0'5148\,\rho_d\right)^3 \;; \tag{4.33}$$

mientras que con $\varepsilon_i = 3'17$, la expresión resultante es

$$\varepsilon_d = \left(1 + 0'5114\,\rho_d\right)^3 \;. \tag{4.34}$$

- Sihvola *et al.* (1985) realizan un estudio de diferentes métodos de cálculo de la permitividad de la nieve a $1\,\text{GHz}$ y concluyen que el modelo de Looyenga es buena aproximación para la parte real de la permitividad. Sin embargo, utilizan una permitividad $\varepsilon_i = 3'15$ para el hielo a esa frecuencia y $0\,^{\circ}\text{C}$. Con esta permitividad, la expresión que obtienen es

$$\varepsilon_d = \left(1 + 0'508\,\rho_d\right)^3 \;, \tag{4.35}$$

remitiéndose a Stiles y Ulaby (1981). Pero la permitividad que aplican es considerablemente más baja que los valores habituales que se utilizan a esas frecuencias y $0\,^{\circ}\text{C}$. Por ejemplo, Mätzler *et al.* (1984) proponen una permitividad $\varepsilon_i = 3'15$, pero lo hacen para el rango de frecuencias métricas y centimétricas ($300\,\text{MHz}$ a $30\,\text{GHz}$). También Koh (1992) obtiene un valor $\varepsilon_i = 3'155 \pm 0'005$ para altas frecuencias, hasta $40\,\text{GHz}$, mientras que para $1'8\,\text{GHz}$ la permitividad que obtiene es de $\varepsilon_i = 3'17$ (Koh, 1997).

- Por su parte, Glen y Paren (1975) expresan,

$$\varepsilon_d = \left(1 + 0'469\,\rho_d\right)^3 \;, \tag{4.36}$$

relación que obtienen utilizando el modelo de Looyenga, con densidad unitaria para el hielo y $\varepsilon_i = 3'17$, por lo que genera valores de permitividad demasiado bajos.

Aunque el modelo de Looyenga es el más extendido para el cálculo de la permitividad de la nieve seca como mezcla de hielo y aire, hay multitud de expresiones adicionales para relacionar la densidad con la permitividad. Las anteriores son de tercer grado, pero existen otras con grados inferiores.

Las expresiones cuadráticas establecen una dependencia lineal de la RWV con la densidad:

- Frolov y Macheret (1999) obtienen una relación empírica para la permitividad y la densidad en la nieve seca polar a temperaturas cercanas al punto de fusión (pero con nulo contenido en agua), mediante

$$\varepsilon_d = \left(1 + 0'857\,\rho_d\right)^2 \ . \tag{4.37}$$

- Bogorodsky *et al.* (1985) proponen una expresión obtenida con el modelo exponencial, para $\alpha = 1/2$, a $-20\,^{\circ}\mathrm{C}$ y con $\varepsilon_i = 3'18$,

$$\varepsilon_d = \left(1 + 0'854\,\rho_d\right)^2 . \tag{4.38}$$

- Robin *et al.* (1965, *cit.* por Kovacs *et al.,* 1995 y por Bogorodsky *et al.*, 1985, p. 41) obtienen empíricamente otra relación para nieve y neviza,

$$\varepsilon_d = \left(1 + 0'851\,\rho_d\right)^2 . \tag{4.39}$$

- Kovacs *et al.* (1995) relacionan empíricamente la permitividad y la densidad en la nieve seca a temperaturas negativas mediante

$$\varepsilon_d = \left(1 + 0'845\,\rho_d\right)^2 \ . \tag{4.40}$$

- Tiuri *et al.* (1984) proponen una relación empírica que supone un leve incremento del término lineal respecto del cuadrático,

$$\varepsilon_d = 1 + 1'7\rho_d + 0'7\rho_d^2 \ , \tag{4.41}$$

  y que, por tanto, ya no representa una relación lineal con la velocidad. Los experimentos que fundamentan esta expresión se realizan a frecuencias entre $850\ \mathrm{MHz}$ y $12'6\ \mathrm{GHz}$. Además, su uso queda limitado a la nieve de densidad intermedia.

También se han publicado relaciones lineales de la permitividad con la densidad. Estas relaciones se alejan de la realidad en mayor medida, pero pueden ser útiles para obtener ciertos cálculos aproximados.

- Annan y Davis (1976), atribuyen a Robin *et al.* (1969) la relación

$$\varepsilon_d = 1 + 2'36\rho_d \ . \tag{4.42}$$

- Ambach y Denoth (1980, *cit.* por Tiuri *et al.*, 1984) obtienen de forma empírica, con nieve asentada (*coarse old snow*) y a frecuencias de georradar la aproximación

$$\varepsilon_d = 1 + 2'2\rho_d \ . \tag{4.43}$$

- Tiuri *et al.* (1984) propone como aproximación a efectos prácticos

$$\varepsilon_d = 1 + 2\rho_d \ , \tag{4.44}$$

indicando que se obtienen valores levemente elevados con nieve poco densa y valores escasos si se utiliza con nieve muy densa. No debe utilizarse para densidades superiores a $0'5\,\mathrm{Mg\ m^{-3}}$, ya que el error crece rápidamente a partir de esa densidad.

4.2.1.1 Estimación del error

Es de interés evaluar la influencia del error que se comete en el cálculo de un parámetro al utilizar una medida errónea en otro. En este sentido, se evalúa la influencia mutua de los errores en la RWV, ε y ρ.

Sea $\varepsilon_1 = \varepsilon_0 + \alpha_1$, donde ε_0 es un valor de referencia de la permitividad (*e.g.*, el valor exacto), ε_1 es el valor que se utiliza como permitividad (medido) y α_1 es la diferencia entre ambos (error). Supuesto que el valor de α_1 es pequeño frente a ε_0, y valiéndonos del desarrollo en serie, se puede expresar

$$v_1 = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_1}} = c\,\varepsilon_1^{-1/2} = c(\varepsilon_0 + \alpha_1)^{-1/2} = \varepsilon_0^{-1/2} c \left(1 + \frac{\alpha_1}{\varepsilon_0}\right)^{-1/2}$$

$$\approx \varepsilon_0^{-1/2}\, c \left(1 - \frac{1}{2}\frac{\alpha_1}{\varepsilon_0} + \binom{-1/2}{2}\left(\frac{\alpha_1}{\varepsilon_0}\right)^2 + \ldots \right) \cong \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_0}} - \frac{\alpha_1}{2\,\varepsilon_0}\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_0}} \ . \tag{4.45}$$

Si medimos un valor $\varepsilon_2 = \varepsilon_0 + \alpha_2$, la diferencia de velocidades obtenida será

$$v_1 - v_2 \cong \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2\,\varepsilon_0}\left(\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_0}}\right) , \tag{4.46}$$

que aproximadamente, tomando $\varepsilon_0 = 3'17$, queda $v_1 - v_2 \cong 26'577\,(\alpha_2 - \alpha_1)$, y $v_1 - v_2 \cong 26'327\,(\alpha_2 - \alpha_1)$, si se utiliza $\varepsilon_0 = 3'19$. Pero en términos relativos,

$$\frac{v_1 - v_2}{v_1} \cong \frac{\dfrac{\alpha_2 - \alpha_1}{2\,\varepsilon_0}\,\dfrac{c}{\sqrt{\varepsilon_0}}}{\dfrac{c}{\sqrt{\varepsilon_0}} + \dfrac{\alpha}{2\,\varepsilon_0}\,\dfrac{c}{\sqrt{\varepsilon_0}} + \ldots} \cong \frac{\dfrac{\alpha_2 - \alpha_1}{2\,\varepsilon_0}\,\dfrac{c}{\sqrt{\varepsilon_0}}}{\dfrac{c}{\sqrt{\varepsilon_0}}}$$

$$\cong \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2\,\varepsilon_0} = \frac{(\varepsilon_0 + \alpha_2) - (\varepsilon_0 + \alpha_1)}{2\,\varepsilon_0} \ . \tag{4.47}$$

Y en cualquier caso, si se toma la primera medida como permitividad de referencia de las diferencias ($\alpha_1 = 0$; $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$), queda

$$\frac{v_1 - v_2}{v_1} \cong \frac{(\varepsilon_1 + \alpha_2) - (\varepsilon_1)}{2\,\varepsilon_1} = -\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1} \ . \tag{4.48}$$

Esto quiere decir que el error relativo cometido en el cálculo de la velocidad es la mitad del introducido en la permitividad, y de sentido contrario, *i.e.*, un error del 3% en la permitividad, por exceso, supone un error del 1'5% en la velocidad, por defecto. Pero, recíprocamente, el error que se cometa en la

velocidad se duplica (en términos relativos[53]) al calcular a partir de ella la permitividad.

Un cálculo grosero de la sensibilidad de los errores con la densidad se puede obtener de las aproximaciones mediante recta [ecuaciones (4.42) a (4.44)], tomando su pendiente[54]. De estas expresiones se deduce que, de manera aproximada, por cada centésima de error en la medida de ρ_d, se generan dos centésimas en ε_d, con escasa dependencia de sus valores.

Por otro lado, al comparar (4.33) con (4.35), se observa que la elección de uno u otro valor de ε_i genera mayor diferencia en el resultado ε_d cuanto mayor sea ρ_d, pero, en cualquier caso, inferior al 1'3%. La expresión (4.34) genera valores intermedios.

Frolov y Macheret (1999) estudian una serie de expresiones habitualmente utilizadas y concluyen que las diferencias con el modelo de Looyenga no exceden del 3%. También Sihvola *et al.* (1985) realizan un estudio comparativo y concluyen que, para la nieve seca, el modelo de Looyenga resulta el más apropiado.

---

[53] Pero nótese que entre $169\ \mathrm{m}\,\mu\mathrm{s}^{-1}$ y $165\ \mathrm{m}\,\mu\mathrm{s}^{-1}$, la diferencia es de tan sólo un 2'4%.

[54] La sensibilidad de una variable frente a variaciones de otra se calcula derivando la primera respecto de la segunda en la expresión que las relaciona. Esto queda implícito en el método que se ha utilizado para evaluar la sensibilidad del error en el cálculo de la permitividad a partir de la RWV.

El autor ha comparado también la expresión de Looyenga (Apéndice A), caracterizada como indica (4.33), con las demás expresiones expuestas, comprobando que la diferencia con cualquiera de ellas es inferior al 3%, en todo el rango de valores de densidad ρ_d entre 0 y 0'917, con la excepción de la expresión (4.36), que genera valores anómalamente bajos, y de las rectas, cuyo uso es limitado, como a continuación se detalla:

- Las diferencias con la recta (4.42) son inferiores al 3% sólo en los valores extremos, *ca.* $\rho_d < 0'04$ Mg m^{-3} o $\rho_d > 0'80$ Mg m^{-3}, por lo que no es de aplicación para la neviza, pero sí en la nieve o en el hielo;
- La recta (4.43), tiene ajuste con (4.33) en el origen (densidad nula) y en torno a una densidad de $0'72$ Mg m^{-3}, pero las diferencias que se generan en este rango superan el 7'5%. En el rango de densidades de la nieve asentada (Tabla 4), en el que sus autores obtuvieron esta expresión, las diferencias con el modelo de Looyenga son máximas.
- Se confirma la limitación que sus autores imponen a la recta (4.44). Su uso sólo es aceptable para densidades inferiores a $0'6$ Mg m^{-3}, donde las diferencias máximas con (4.33) son inferiores al 4'5%. Su mejor ajuste se obtiene en el origen y en torno a $0'52$ Mg m^{-3}.

Consecuentemente, con las precauciones indicadas sobre la sensibilidad del error entre RWV y ε, para calcular la permitividad del medio seco, se considera apropiado utilizar la expresión (4.32), valiéndose además de (4.24) si la temperatura de uso así lo requiere. Pero esto no impide establecer con relativa precisión una expresión lineal entre la RWV y ρ_d, si así se desea, dado que las diferencias con todas ellas [ecuaciones (4.37) a (4.41)] y entre sí, son bajas. E incluso las expresiones lineales entre la permitividad y la densidad, con las limitaciones expuestas, tienen su posible aplicación.

4.2.2 Hielo, neviza o nieve húmedos

La nieve húmeda es una mezcla de partículas de hielo, aire y agua líquida. El contenido en agua (W) es una medida absoluta, definida a través de (4.19) La saturación en agua (S_w), sin embargo, es una magnitud relativa. Se define como (Denoth, 2003),

$$S_w = W/P \ . \tag{4.49}$$

Se alcanza la saturación del 100% cuando el contenido en agua iguala a la porosidad, desplazando todo el aire [$W = P$, ecuación (4.23)]. Por lo tanto, la porosidad es la medida del contenido en agua a partir del cual el aire desaparece y el medio queda saturado de agua ($S_w = 1$). En la Tabla 4 se ha presentado la porosidad del medio glaciar, calculada a partir del contenido en aire en el medio seco, utilizando (4.22).

De acuerdo con Colbeck (1982, *cit.* por Tiuri *et al.*, 1984) existen dos regímenes de saturación de agua en la nieve, el pendular y el funicular. En el primero, el aire tiene continuidad a través del espacio entre los poros y el agua líquida se presenta como inclusiones aisladas. En el régimen funicular, el agua entre los poros forma un medio continuo, quedando aire en pequeñas burbujas atrapadas. Este segundo régimen aparece cuando el contenido en agua es elevado. La transición de un régimen a otro es relativamente abrupta y no depende del contenido, sino de la saturación en agua. A modo de ejemplo, Denoth (1982, 2003) localiza la transición del régimen pendular al funicular en el margen comprendido entre una saturación *ca.* del 13% al 18% en nieve nueva, del 9% al 14% en nieve alpina reciente, con antigüedad de días o de semanas, y del 7% al 12% en nieve asentada de grano grueso, o neviza. Haciendo uso de (4.49) y de la Tabla 4, pueden expresarse en términos absolutos los contenidos en agua (W) que limitan el régimen

pendular en los tres tipos de nieve indicados. Los resultados así obtenidos indican que el comienzo de la transición del régimen pendular al funicular se produce al alcanzar un contenido en agua en torno al 12% en la nieve nueva, al 7% en la nieve reciente, y al 5% en la asentada o en la neviza. Habitualmente, el contenido en agua líquida en la nieve húmeda no supera el 10% (Frolov y Macheret, 1999). Con este nivel, sus poros no están saturados de agua y queda aire en el interior de la nieve (Tabla 4). Pero el contenido en agua en los glaciares templados toma valores muy inferiores, que habitualmente se sitúan entre el 1 y el 2%. Por su parte, Macheret y Glazovsky (2000) estiman además en el 1'4% el contenido en agua límite en el hielo templado. Contenidos en agua superiores suelen ser indicadores de la existencia de una concentración de agua a escala macroscópica, *i.e.*, en grietas, *moulins*[55], remansos de agua en superficie, etc. (*e.g.*, Benjumea *et al.*, 2003; Macheret y Glazovsky, 2000; Moore *et al.*, 1999). Estas concentraciones de agua en los estratos más superficiales drenan hacia el interior del glaciar, alcanzando habitualmente el lecho. En los glaciares politérmicos, este recorrido atraviesa el estrato frío, e incluso pueden permanecer en él circulando por canales de drenaje (*e.g.*, Moore *et al.*, 1999). Colbeck (1973, *cit.* por Waldner *et al.*, 2004) describe el nivel de comienzo de la infiltración de agua de fusión, precisamente como el de transición del régimen pendular de la fase líquida, en que el agua permanece adherida por su tensión superficial (*in menisci*), al funicular, donde las inclusiones aisladas de agua se unen y rezuman por gravedad. Consecuentemente, el régimen funicular tiende a drenar el agua, lo que concuerda con los valores habituales del contenido en agua medidos en los glaciares, ya indicados. Esto induce a pensar que el agua líquida en el glaciar se encuentra en régimen pendular,

[55] Pozos naturales de drenaje del agua superficial en el glaciar (*e.g.*, Paterson, 1994, p. 104).

salvo en las zonas donde está acumulada, ya sea en grietas, lagos, interfases, etc., o en circulación. Es en estas zonas del glaciar donde se han encontrado valores que superan a los anteriores. Tiuri *et al.* (1984) afirman que la permitividad de la nieve húmeda en régimen pendular resulta independiente de la estructura interna, lo que permite calcularla usando expresiones sencillas. A falta de estudios más concretos, el uso sobre glaciares de las expresiones que siguen proporciona una aproximación a los valores reales del contenido en agua en el glaciar.

En glaciares templados o en politérmicos, se puede estimar su contenido en agua una vez medida la velocidad de propagación de la onda. Para ello, se requiere de expresiones que relacionen el contenido en agua, la permitividad y la densidad del medio húmedo. Pueden establecerse también relaciones con los parámetros del medio seco, que se obtienen mediante medidas o utilizando relaciones ya mostradas en §4.2.1.

Como paso previo a estas expresiones, se introducen ciertas relaciones entre los parámetros del medio húmedo y los del medio seco. Descomponiendo la densidad del medio glaciar en sus tres componentes y tomando $\rho_a = 0$ como densidad del aire, puede escribirse,

$$\rho_s = \theta\,\rho_i + A\,\rho_a + W\,\rho_w \quad = \theta\,\rho_i + W\,\rho_w \ . \tag{4.50}$$

Si el medio está seco, $\rho_s = \rho_d$, obteniendo una expresión equivalente a (4.21),

$$\rho_d = \theta\,\rho_i \ . \tag{4.51}$$

Pero teniendo en cuenta que $\rho_w = 1$, puede rescribirse (4.50) como

$$\rho_s = \rho_d + W \ . \tag{4.52}$$

Expresiones derivadas del modelo de Looyenga

En presencia de agua, la expresión (4.28), del modelo de Looyenga, suele utilizarse como mezcla de una matriz seca, con infiltraciones esféricas de agua. Así, tanto la nieve húmeda (*e.g.*, Macheret *et al.*, 1993), como el hielo templado (*e.g.*, Murray *et al.*, 2000; Macheret *et al.*, 1993), habitualmente se estudian como mezcla del medio glaciar seco y agua

$$\varepsilon_s^{1/3} = \varepsilon_d^{1/3} + W(\varepsilon_w^{1/3} - \varepsilon_d^{1/3}) \ . \tag{4.53}$$

A partir de esta expresión, relacionando la permitividad del medio húmedo con su velocidad usando (4.18), puede calcularse el contenido en agua como

$$W = \frac{(c/v_s)^{2/3} - \varepsilon_d^{1/3}}{\varepsilon_w^{1/3} - \varepsilon_d^{1/3}} \ , \tag{4.54}$$

por la que el contenido en agua se calcula midiendo la velocidad en el medio húmedo, y calculando ε_d como se ha indicado en §4.2.1, partiendo de la densidad del medio seco. Por ejemplo, Macheret *et al.* (1993) la calculan utilizando la densidad media de un testigo de hielo frío del glaciar.

Volviendo a utilizar (4.18), ahora para la velocidad en medio seco, se obtiene

$$W = \frac{(c/v_s)^{2/3} - (c/v_d)^{2/3}}{\varepsilon_w^{1/3} - (c/v_d)^{2/3}} \ , \tag{4.55}$$

que proporciona el contenido en agua en el medio glaciar húmedo, conociendo las velocidades en ese mismo medio en estado seco y húmedo. El valor de v_s es la RWV en el medio, mientras el de v_d es el de la RWV en un medio equivalente, pero seco. La segunda puede obtenerse, por ejemplo, en una zona de hielo frío del mismo glaciar, supuesto politérmico.

Pero no siempre se aplica al medio húmedo como se ha indicado.

- Para la nieve húmeda, Frolov y Macheret (1999) proponen una variante,

$$\varepsilon_s^{1/3} = \varepsilon_d^{1/3} + W(\varepsilon_w^{1/3} - 1) \ . \tag{4.56}$$

Sus autores indican que esta expresión es acorde con los datos de que disponen, utilizando $\rho_d = 0'5 \text{ Mg m}^{-3}$, *i.e.*, $\varepsilon_d \approx 2$. Pero esta expresión ofrece valores de permitividad más altos que los de (4.53) (W más bajos), en mayor medida cuanto mayor sea la densidad del medio seco (Apéndice A). A pesar de ello, Moore *et al.* (1999) obtienen con esta expresión contenidos en agua en el hielo superiores a los que obtienen con (4.61).

- También puede estudiarse el hielo templado saturado de agua (supuesto sin aire), como mezcla de hielo puro y agua (*e.g.*, Murray *et al.*, 2000; Macheret y Glazovsky, 2000; Benjumea *et al.*, 2003)

$$\varepsilon_s^{1/3} = \varepsilon_i^{1/3} + W(\varepsilon_w^{1/3} - \varepsilon_i^{1/3}) \ , \tag{4.57}$$

lo que facilita el cálculo del contenido en agua con sólo despejar,

$$W = \frac{\varepsilon_s^{1/3} - \varepsilon_i^{1/3}}{\varepsilon_w^{1/3} - \varepsilon_i^{1/3}} \ . \tag{4.58}$$

Lo que requiere de la medida de ε_s por algún método. Por ejemplo, Macheret y Glazovsky (2000) realizan su cálculo con el método que utiliza Bamber (1989) para analizar, por radioecosondeo aéreo, la potencia reflejada por las discontinuidades (*Power Reflection Coefficient*, PRC) entre medios. La permitividad del medio húmedo se calcula al relacionarla con la del seco a través del coeficiente de reflexión entre ambos (2.63). Aplicando (4.58) y (4.33), se obtiene *W*.

Ahora bien, sustituyendo en (4.58) la permitividad del medio por su relación con la velocidad mediante (4.18), se obtiene

$$W = \frac{(c/v_s)^{2/3} - \varepsilon_i^{1/3}}{\varepsilon_w^{1/3} - \varepsilon_i^{1/3}} \ , \tag{4.59}$$

con la que se puede calcular el contenido en agua del hielo templado saturado en agua, con sólo medir su RWV (v_s).

Pero dado que en esta expresión se supone que no hay aire en el medio glaciar, sólo puede utilizarse para permitividades de valor superior a 3'19 (la del hielo seco frío); o en su uso a través de la ecuación (4.59), sólo con velocidades inferiores a 168 $\mathrm{m}\mu\mathrm{s}^{-1}$; mientras que si se relaciona con la densidad, sólo debe usarse con densidades superiores a $0'917\ \mathrm{Mg\ m}^{-3}$. A pesar de ello, Murray *et al.* (2000), utilizando esta expresión, obtiene valores superiores en *ca.* 1% (0'01) a los obtenidos con la expresión (4.61), si bien esta última expresión proporciona valores demasiado bajos, como posteriormente se explica.

Para un medio húmedo con presencia de aire (no saturados en agua), además de las expresiones (4.54) y (4.55), puede aplicarse la expresión más general (4.29), para realizar la mezcla de tres componentes, hielo, agua y aire, como proponen Macheret y Glazovsky (2000) o Waldner *et al.* (2001), y Huisman *et al.* (2003) aplican a cualquier medio poroso húmedo.

Expresiones derivadas del modelo de Paren

Paren (1970, *cit.* por Smith y Evans, 1972) propone utilizar el modelo de Looyenga para la nieve seca, según la expresión (4.32). Pero propone un modelo alternativo para su uso con nieve saturada en agua ($W = P$), en la que todo el aire haya sido desplazado por el agua. Este modelo, que lleva su nombre, puede rescribirse como

$$W = 3\,(\varepsilon_s - \varepsilon_d)/\varepsilon_w \quad . \tag{4.60}$$

Sin embargo, esta expresión recibe otros usos en la práctica.

- Macheret *et al.* (1993) utilizan esta misma expresión para caracterizar cualquier medio glaciar, no sólo nieve, pero además lo hacen para cualquier contenido en agua, sin necesidad de que se encuentre saturado. La condición que imponen es que las inclusiones de agua se distribuyan aleatoriamente en el hielo.
- Se utiliza también para caracterizar cualquier medio glaciar saturado (no sólo la nieve), pero en tal caso suele hacerse como mezcla de hielo puro y agua (*e.g.*, Moore *et al.*, 1999; Murray *et al.*, 2000)[56],

$$W = 3\,(\varepsilon_s - \varepsilon_i)/\varepsilon_w \ . \tag{4.61}$$

Nótese que $\varepsilon_i > \varepsilon_d$, por lo que esta expresión genera contenidos en agua inferiores a los obtenidos mediante (4.60).

Al igual que se ha realizado en la expresión de Looyenga, en esta tesis se propone el cálculo del contenido en agua a partir de la expresión original de Paren (4.60) y obteniendo el valor de ε_s a partir de la medida de su RWV, si se dispone de una medida de ε_d (§4.2.1). Así,

$$W = 3\left((c/v_s)^2 - \varepsilon_d\right)/\varepsilon_w \ . \tag{4.62}$$

También puede calcularse ε_d mediante v_d, si puede medirse en un estrato seco (glaciares politérmicos) o estimarse a partir de las máximas RWV medidas en el momento de evaluación de W o en otro momento. Es decir,

$$W = 3\left((c/v_s)^2 - (c/v_d)^2\right)/\varepsilon_w \ . \tag{4.63}$$

---

[56] En los dos casos referenciados, con esta expresión se han obtenido valores de contenido en agua inferiores a los que ha proporcionado el modelo de Looyenga, aunque también en ambos casos se han utilizado variaciones sobre dicho modelo.

Expresiones empíricas

Existen relaciones obtenidas como regresión sobre datos experimentales:

- Moore *et al.* (1999) obtienen empíricamente, para contenidos en agua entre el 0'1% y el 10% ($0'001 < W < 0'1$), por regresión de mínimos cuadrados a un polinomio de segundo grado, la expresión

$$W = -0'0027 + 0'0432(\varepsilon_s - \varepsilon_i) + 0'0004(\varepsilon_s - \varepsilon_i)^2 \ . \tag{4.64}$$

  Afirman que hay diferencias de hasta un 0'5% entre los contenidos en agua que se estiman con esta expresión y con (4.61).

- Como regresión de los datos de nieve húmeda de diferentes autores, con densidad $\rho_d < 0'5$ Mg m^{-3} (*i.e.*, $\varepsilon_d < 2$; $v_d > 212$ m μs^{-1}) y contenidos en agua entre 1'5% y 9'5%, Frolov y Macheret (1999) obtienen

$$\varepsilon_s = \varepsilon_d + 16'7W + 42'5W^2 \ . \tag{4.65}$$

  Valoran la proximidad a los valores que ofrece la expresión (4.56), ya que las diferencias en el intervalo de validez de (4.65), son inferiores al 3%.

- Para la nieve húmeda, a frecuencias en el rango de 10 a 100 MHz (frecuencias de georradar), Ambach y Denoth (1980, *cit.* por Tiuri *et al.*, 1984), encuentran que la permitividad no depende de la frecuencia ni del tipo de granulado, ni por tanto de la metamorfosis de la nieve, obteniendo

$$\varepsilon_s = 1 + 2'2\rho_s + 21'3W \ , \tag{4.66}$$

  o, haciendo uso de (4.52)[57],

$$\varepsilon_s = 1 + 2'2\rho_d + 23'5W \ . \tag{4.67}$$

- Por su parte, Tiuri *et al.* (1984) calculan, como regresión de tres conjuntos de datos de otros autores,

$$\varepsilon_s = \varepsilon_d + \varepsilon_w\left(0'1W + 0'8W^2\right) \ . \tag{4.68}$$

---

[57] Tiuri *et al.* (1984) escriben (4.67) como $\varepsilon_d = 1 + 2\rho_d + 23'5W$. Lo que se interpreta como errata.

Sus autores indican que puede utilizarse en presencia o no de aire, pero establecen límites a su rango de uso: $\varepsilon_s < 2'6$, $W < 10\%$ y $\rho_d < 0'5$ Mg m^{-3}.

Existen métodos alternativos para estimar el contenido en agua. Puede indicarse a modo de ejemplo que Hamran *et al.* (1996) miden en el registro del georradar la potencia reflejada en las inclusiones de agua, con la que estiman la variación espacial del contenido en agua. Su medida es relativa, pero puede calibrarse con medidas realizadas con otro método, para obtener los valores absolutos del contenido en agua.

Existe un conjunto de modelos de cálculo de la permitividad de la mezcla atendiendo a la estructura de sus componentes. En general, no se consideran adecuados para su uso con medidas glaciológicas, por la complejidad de aplicación. Su uso está más extendido en las medidas de laboratorio. Entre estos modelos destaca el de Polder y van Santen (1946). Pueden encontrarse formas adaptadas de su fórmula, para el caso de la nieve, en *e.g.*, Denoth (1982, 2003), Cumming (1952), o Sihvola *et al.* (1985). A partir de este modelo se pueden derivar expresiones de uso práctico en glaciares, si se desarrolla una tabla de valores de los parámetros de la expresión para los diferentes tipos de medio glaciar.

Realización práctica de los cálculos

En las expresiones de este apartado, el cálculo de ε_d puede obtenerse a partir de medidas de densidad en el medio seco, utilizando expresiones de §4.2.1, o midiendo la RWV en el medio seco, para calcular la permitividad

usando (4.18). En cada caso debe valorarse cómo obtener las medidas en el medio seco. Pueden estimarse midiendo, *e.g.*, en puntos fríos del mismo glaciar, o en la estación invernal, o incluso usar valores medidos en glaciares similares. A modo de ejemplo, Macheret *et al.* (1993) utilizan la densidad obtenida en un sondeo en Fridtjovbreen, como densidad para el hielo seco, tanto en Fridtjovbreen como en Hansbreen (ambos politérmicos y con terminación en mar, situados en Spitsbergen, Svalbard). Sin embargo, para el glaciar Abramov (templado, situado en Kirguizistán, en la cordillera Alai), utilizan un sondeo diferente, realizado en el propio glaciar. De manera similar, Macheret y Glazovsky (2000) utilizan el sondeo en Fridtjovbreen, para caracterizar la densidad en el medio seco en el conjunto de los glaciares de Spitsbergen. Por otro lado, se puede evitar el cálculo de ε_d, bajo la suposición de ausencia de aire, como se ha explicado en cada una de las expresiones anteriores.

El cálculo de ε_s suele realizarse midiendo la RWV en el medio en que se pretende valorar el contenido en agua. El método de cálculo de esta RWV, sin embargo, varía en cada caso. Por ejemplo, Moore *et al.* (1999) la calculan en difractores puntuales, pero Macheret *et al.* (1993) lo hacen a midiendo las velocidades en interfaces entre estratos, a través de registros CMP.

La expresión (4.52), que relaciona las densidades de los medios seco y húmedo, puede emplearse también como estimación del contenido en agua a partir de ambas medidas.

En el Apéndice A se establece una comparación entre los resultados que proporcionan las diferentes expresiones que relacionan la permitividad del medio glaciar húmedo con su contenido en agua.

4.3 Índices energéticos reflectivos

El perfil de georradar ha sido utilizado para, tras su procesado y por el principio de representación (§2.2), reproducir una imagen del subsuelo y medir sus profundidades. También se ha utilizado el perfil de georradar sin procesar para valorar parámetros del subsuelo (*e.g.*, RWV), a través de la variación espacial de los tiempos de llegada de un mismo punto (*e.g.*, hipérbolas de difracción, o *moveout* en los registros CMP). Pero también se pueden estudiar condiciones y parámetros del subsuelo por la potencia que reflejan o la que atenúan.

Existen estudios que obtienen medidas de la variación del contenido en agua, la permitividad, etc., valorando las señal recibida desde las interfases y contrastes de impedancia en el subsuelo, por comparación con las expresiones teóricas de la propagación del pulso (*e.g.*, Bentley *et al.*, 1998; Hamran *et al.*, 1996; Bamber, 1988, 1989). Pero requieren que sean conocidos ciertos parámetros y condiciones del equipo y el subsuelo, que las hacen de difícil aplicación.

Gades (1998) estudia en su tesis doctoral la potencia reflejada por los reflectores midiendo la potencia de la señal registrada, con independencia de la fuente que la generara. Su estudio es, por tanto, relativo. Sólo aportan información las variaciones de la potencia de la señal registrada.

Para este apartado, se introducen a continuación las definiciones básicas de teoría de señales que intervienen en el estudio energético de una señal muestreada y se discute su método.

Energía y potencia de una señal discreta en el tiempo

Una señal muestreada, $x(n)$, es una señal definida en tiempo discreto (tren de pulsos). Su energía de se define (*e.g.*, Proakis y Manolakis, 1998, §2.1.2)

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 \quad . \tag{4.69}$$

Y su potencia media por muestra,

$$P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x(n)|^2 \quad . \tag{4.70}$$

Si proviene de un muestreo con frecuencia $f_s = 1/t_s$, la muestra n_k-ésima se produce en el instante $t_k = n_k t_s$, por lo que basta con dividir la potencia media por muestra entre el periodo de muestreo (t_s), para obtener la potencia media por unidad de tiempo

$$P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{(2N+1)\, t_s} \sum_{n=-N}^{N} |x(n)|^2 \quad . \tag{4.71}$$

Estas definiciones son válidas para señales complejas. Si la señal es real, puede eliminarse el módulo.

Así, trabajando con señal real, la energía en un intervalo de N muestras, es

$$E_N = \sum_{n=1}^{N} x(n)^2 \quad . \tag{4.72}$$

Y su potencia media por muestra y por unidad de tiempo, respectivamente,

$$P_N = \frac{E_N}{N} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} x(n)^2 \quad , \qquad P_{Nt} = \frac{E_N}{N t_s} = \frac{1}{N t_s} \sum_{n=1}^{N} x(n)^2 \tag{4.73}$$

De tal manera que la energía en el intervalo comprendido entre los instantes t_a y t_b es la suma de los cuadrados de las muestras de dicho intervalo, su potencia media por muestra es la energía dividida por el número de muestras del intervalo, y su potencia por unidad de tiempo, la energía del intervalo, dividida entre la duración del mismo, *i.e.*,

$$E_{n_a\text{-}n_b} = \sum_{n=n_a}^{n_b} x(n)^2 \ , \tag{4.74}$$

$$P_{n_a\text{-}n_b} = \frac{1}{n_b - n_a + 1} \sum_{n=n_a}^{n_b} x(n)^2 \ , \tag{4.75}$$

$$P_{t_a\text{-}t_b} = \frac{1}{t_b - t_a + t_s} \sum_{n=n_a}^{n_b} x(n)^2 \ . \tag{4.76}$$

Discusión sobre los trabajos previos

Gades realiza su estudio para varios casos. A continuación se discute su análisis de las variaciones espaciales en un perfil de georradar.

Para estudiar la reflexión en el lecho, Gades (1998, §7.4.1) define la potencia devuelta (*returned power*)[58] en una ventana temporal entre los muestras n_a y n_b, como un medio del valor de la potencia media por muestra en (4.75).

$$GRP_{n_a\text{-}n_b} = \frac{1}{2(n_b - n_a + 1)} \sum_{n=n_a}^{n_b} x(n)^2 \ . \tag{4.77}$$

[58] En adelante nos referimos a este parámetro como *GRP* (*Gades' Returned Power*)

A partir de ella, Gades define el *BRP* (*Bed Reflection Power*) como el *GRP* en una ventana de longitud *T* (muestras)[59], centrada en el pulso reflejado en el lecho. Define también el *IRP* (*Internal Reflection Power*) como el *GRP* en una ventana fija que comienza tras la llegada de la onda directa y finaliza donde comienza la ventana del *BRP*. Para valorar la relación señal-ruido de la reflexión en el lecho se estudia el nivel de ruido (*NP*) de la señal, calculando la potencia media en una ventana anterior a la recepción de la onda directa.

Sobre estas definiciones propone sendas normalizaciones, con la intención de eliminar los efectos que introduce la variación del espesor del glaciar sobre la potencia devuelta por el lecho, e intentando minimizar la componente común de este índice en todas las trazas, para resaltar las variaciones laterales.

Para normalizar el *BRP*, propone estimar previamente la curva del *BRP* que se produce en ese glaciar, en función de la profundidad, mediante regresión por mínimos cuadrados. Denominamos BRP_{E} (*BRP* - Estimado) al valor así obtenido en cada profundidad de lecho. Para observar las variaciones en el *BRP*, es preferible reducir su valor, por lo que, para cada traza, Gades resta de su *BRP*, el BRP_{E}, para lograr la diferencia con lo estimado. La normalización se realiza dividiendo el valor resultante entre el estimado BRP_{E}. Esta división elimina la dependencia de la reflexión con el espesor de glaciar sobre el lecho. Al valor resultante lo denomina BRP_{R} (*Residual BRP*). Sin embargo, una vez normalizado, la eliminación previa de la componente estimada revierte únicamente en la resta de una unidad, por lo que en una publicación posterior (Gades, 2000), elimina dicha resta. Así, las definiciones de ambas publicaciones son, respectivamente,

[59] Gades (1998, p. 120; 2000), nombra el ancho de la ventana, *T*, como el ancho del periodo del pulso, y lo define como dos veces el tiempo entre el máximo y el mínimo en el pulso.

$$BRP_{\mathrm{R98}} = \frac{BRP - BRP_{\mathrm{E}}}{BRP_{\mathrm{E}}} = \frac{BRP}{BRP_{\mathrm{E}}} - 1 \ , \tag{4.78}$$

$$BRP_{\mathrm{R00}} = \frac{BRP}{BRP_{\mathrm{E}}} \ . \tag{4.79}$$

Ocurre algo similar en la normalización del *IRP*. El valor de este índice que mide Gades no se ve afectado por el mayor o menor espesor de hielo, dado que está definido en una ventana fija, que en su caso, se extiende a las muestras recibidas entre los 2 y los $6\,\mu\mathrm{s}$, evitando la onda directa y la reflexión en el lecho. Para normalizarlo, Gades propone calcular su valor medio (IRP_m) y utilizarlo como antes se ha hecho con el estimado en el *BRP*. Al resultado lo denomina IRP_{N} (*Normalized IRP*). De igual manera, existe una definición diferente en cada publicación,

$$IRP_{\mathrm{N98}} = \frac{IRP - IRP_{\mathrm{m}}}{IRP_{\mathrm{m}}} = \frac{IRP}{IRP_{\mathrm{m}}} - 1 \ , \tag{4.80}$$

$$IRP_{\mathrm{N00}} = \frac{IRP}{IRP_{\mathrm{m}}} \ . \tag{4.81}$$

Toda desviación respecto de 0, en (4.78) y (4.80), indica variación respecto de la reflexión media en el lecho y en el interior del glaciar, respectivamente. Lo mismo ocurre con las desviaciones respecto de 1 en (4.79) y (4.81).

Estas expresiones deben aplicarse sobre un radargrama en el que tan sólo se haya eliminado la componente continua, realizado las correcciones estáticas que necesitara y filtrado mediante un filtro de paso bajo, ajustado a la banda de frecuencias del georradar.

Publicaciones posteriores han utilizado las normalizaciones BRP_{R98} e IRP_{N98} (Copland y Sharp, 2001), y más adelante las BRP_{R00} e IRP_{N00} (Pattyn *et al.*, 2003). A continuación se analizan las propuestas de Gades, y a su vez se proponen algunas variaciones:

- La definición que Gades (1998, 2000) realiza para la potencia devuelta (*GRP*) mediante la ecuación (4.77) es menos apropiada que la expresión (4.75), por ser aquélla la mitad de la potencia buscada. Sin embargo, siendo medidas relativas, cualquier factor constante sirve exclusivamente como factor de escala en su representación, por lo que resulta irrelevante, incluso si con la variación de sus valores se pretende inferir variaciones en el coeficiente de reflexión del lecho. De igual manera, dado que tan sólo se pretende estudiar las variaciones en los índices, no hay diferencia entre utilizar la potencia por muestra o por unidad temporal. Por sencillez de cálculo se utiliza la primera. Realizado el anterior análisis, se propone hacer uso de las expresiones (4.74) y (4.75) para calcular las energías o potencias, abandonando la definición de Gades (4.77). Por otro lado, los índices normalizados (en cualquiera de sus versiones) no se ven afectados por esta constante, ya que afecta en igual proporción a los términos del numerador y del denominador. Así, las expresiones normalizadas de Gades son correctas, a pesar de la errónea expresión de la potencia. Por comodidad, en adelante nos referiremos a las expresiones normalizadas de cada índice, añadiéndole una *N* al final de su nombre. Así, *BRPN* es el *BRP* normalizado.
- Como se ha indicado, Gades (1998, 2000) define la ventana para calcular el *BRP* centrada en el primer máximo del pulso reflejado y de doble tamaño que el del pulso. Pero esta ventana sólo sirve si el pulso es de un período, y la reflexión en el lecho está correctamente delimitada. En la práctica esto no suele ser válido. El pulso de reflexión comienza unos

nanosegundos antes de la amplitud máxima y dura varios períodos, por lo que es necesario extender el tamaño de la ventana. Copland y Sharp (2001), al igual que posteriormente Pattyn *et al.* (2003), para calcular el *BRP* toman una ventana que comienza 100 ns antes y finaliza 400 ns después del primer máximo de la reflexión.

- Si la reflexión del lecho es pequeña, no siempre es sencillo localizar la muestra donde se produce el comienzo de la reflexión. En tal caso, se propone calcular el máximo de la energía reflejada en una muestra o, lo que es lo mismo, la máxima potencia por traza, en una traza. Denominamos *BRM* (*Bed Reflection Maximum*) a este índice energético. Para ello, se localiza la amplitud máxima, en valor absoluto ($|x(n)|_{\mathrm{M}}$), en una ventana donde se estima que se encuentra la reflexión del lecho y se calcula su energía, *i.e.*, el cuadrado de dicha amplitud. Así,

$$BRM = x(n)_{\mathrm{M}}^{2} \ . \tag{4.82}$$

Gades (1998, p. 77) realiza un cálculo parecido ante el mismo problema.

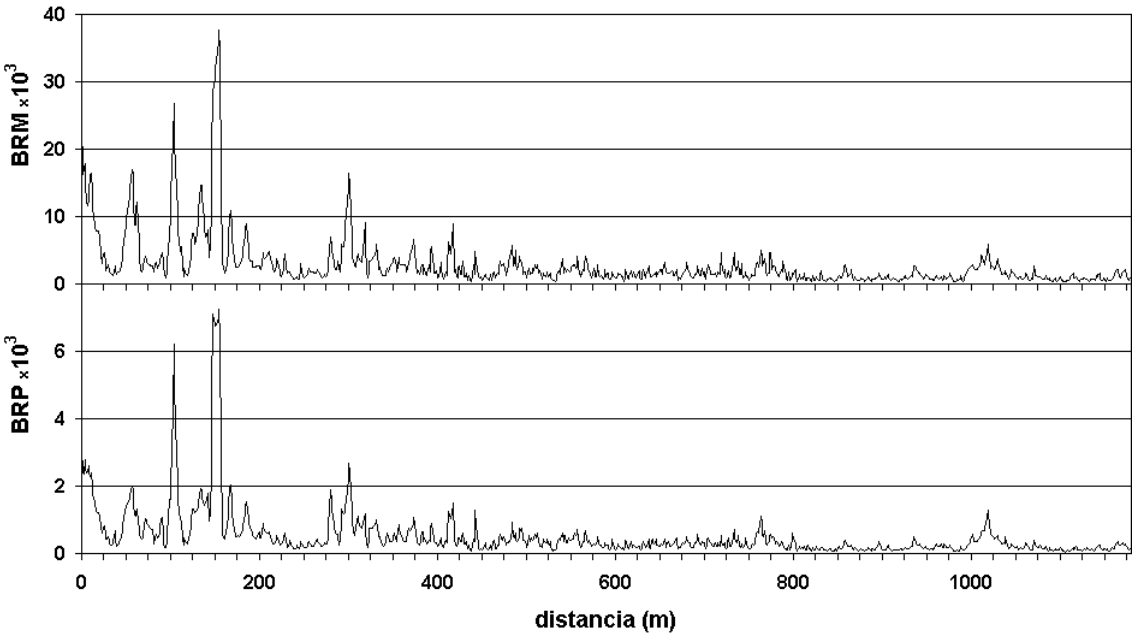

Figura 4-10 Relación entre *BRP* y *BRM* en un perfil (C1-C6) registrado en el glaciar Hansbreen, el 19 de julio de 2003.

El *BRM* puede utilizarse como índice auxiliar, pero es un sustituto del *BRP*, debido a su mayor fiabilidad. El tamaño de la ventana escogido afecta al *BRP* (una ventana demasiado grande disminuye la variabilidad de los valores del *BRP*), no así al *BRM*. La normalización del *BRM* se realiza de manera análoga a la del *BRP*. En la Figura 4-10 se muestran las gráficas de ambos índices, calculados en una misma ventana de 175 ns , que comienza 20 ns antes de la línea tomada como reflexión en el lecho, en el perfil de la Figura 4-11.

- Gades (1998; 2000) calcula el *IRP* en una ventana fija. Puede hacerlo porque en el perfil donde lo aplica existe poca variación de espesores. Copland y Sharp (2001), y más tarde Pattyn *et al.* (2003), toman una ventana de tamaño variable, que comienza tras la onda directa (valor fijo de 600 ns) y finaliza donde comienza la ventana del *BRP* (100 ns antes del primer pico de reflexión del lecho). La ventana fija sólo tiene sentido si el perfil tiene pequeña variación de espesores. A pesar de ello, la ventana variable aporta mayor información, al recoger todos los acontecimientos internos. Pero, en tal caso, para normalizar este *IRP* ya no serviría el valor medio (IRP_m), sino que sería necesario un IRP_E (*IRP* estimado), realizado mediante una regresión por mínimos cuadrados, similar a la realizada para el *BRP*, que elimine la dependencia con el espesor.
- Pero el *IRP* se utiliza como muestra de la perturbación que la señal sufre en el interior del glaciar, por la relación que puede tener con las variaciones en el *BRP* (Gades, 1998, p. 121). Sin embargo, si el espesor del glaciar varía, no interesa ya evaluar la potencia media devuelta en dicho espesor (*IRP*), sino la energía total devuelta en dicho espesor, como medida de la atenuación de la señal, en su camino hacia el lecho. Esto es, el *IRE* (*Internal Reflection Energy*), que se calcula utilizando la expresión (4.74) en las muestras de la misma ventana en que se calcularía el *IRP*.

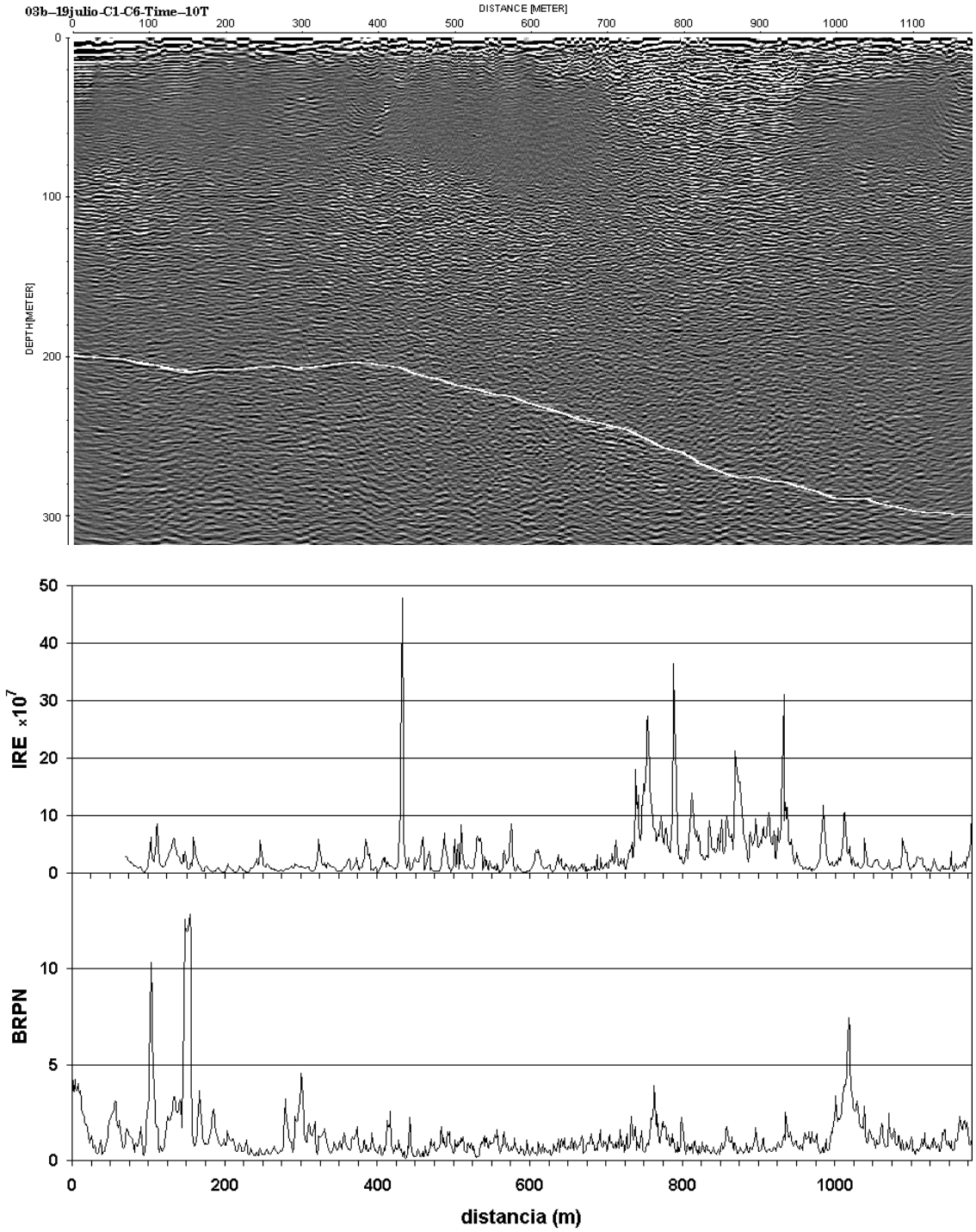

Figura 4-11 Arriba, radargrama en un glaciar politérmico (perfil C1-C6 realizado en el glaciar Hansbreen, el 19 de julio de 2003), sobre el que se ha resaltado la reflexión en el lecho. En medio, *IRE* (disminuido en factor de escala 10^7). Abajo, *BRPN*.

Dado que Gades calcula su *IRP* en una ventana de tamaño fijo, la diferencia entre el *IRP* y el *IRE*, en su caso, consiste tan sólo en un factor de escala (el número de muestras en la ventana fija), que incluso desaparece al ser normalizado. El *IRE* puede utilizarse sin normalización alguna, reflejando en tal caso la energía perdida por cualquier motivo (incluso por un mayor espesor), o normalizarlo mediante una estimación por mínimos cuadrados como las antes ya indicadas. En el *IREN* obtenido en el segundo caso, queda eliminada la influencia del espesor de hielo en la energía perdida.

- La ventana donde se calculan tanto el *IRP* como el *IRE* comienza tras la finalización de la onda directa. Pero en un glaciar con hidráulica complicada, esto supone la pérdida de la información de lo ocurrido en el estrato más superficial. Se recomienda, en tal caso, realizar un filtrado horizontal que elimine la onda directa y descubra las perturbaciones superficiales (*e.g.*, *Subtracting Average*), de modo que la ventana puede comenzar en la misma superficie. Gades (1998, p. 119) es contrario a este filtrado horizontal, para evitar la eliminación de reflectores que se encuentren a profundidad constante. Compartimos la apreciación en el estudio de un glaciar frío y de gran espesor, como es su caso; sin embargo, en glaciares politérmicos o templados, con hidrología complicada en superficie, se recomienda realizar un filtrado horizontal, aunque debe realizarse sólo hasta la profundidad máxima en que la onda directa intervenga. El filtrado horizontal, no obstante, puede dejar espurios que perturben la medida posterior. Por ejemplo, en el perfil de la Figura 4-11, se ha eliminado la componente DC de las trazas, se han filtrado, y se ha realizado también la substracción, en cada muestra de cada traza, de la media en una ventana de 50 trazas. Esto se ha aplicado sólo en los primeros 1100 ns, donde estaba presente la onda directa. El algoritmo

introduce errores en las primeras trazas, por lo que la medida del *IRE* en las 70 primeras de la izquierda ha sido eliminada.

- Dada la gran variabilidad del *NP*, *BRP* y del *IRP*, resulta de interés su valoración en dB, lo que se consigue multiplicando por diez el logaritmo decimal del índice energético o de potencia en cuestión (Figura 4-12 y Figura 4-13). A pesar de ello, la representación gráfica del *BRP* e *IRP* en unidades no logarítmicas muestra mejor las variaciones producidas, aunque lo hagan en diferentes escalas. Por otro lado, no puede asegurarse que los valores de las expresiones (4.78) y (4.80) sean positivos, pero sí en las (4.79) y (4.81), por lo que para realizar la representación logarítmica deben utilizarse éstas últimas.
- El equipo de radar puede sufrir variaciones en su rendimiento, pero es más frecuente la variación de la transmisión de energía al interior del subsuelo. Todos los cálculos se realizan suponiendo que la transmisión energética es constante, pero en ocasiones se detecta que no es así. Gades (1998, p. 54, 57 y 81) indica que la energía transmitida al interior del glaciar aumenta cuando hay agua en la superficie. Por contra, las medidas realizadas por nuestro grupo investigador en Hansbreen durante el verano de 2003 muestran el efecto contrario. Esto puede deberse a que en el primer caso la antena se situó en contacto con el agua, mientras que en el segundo, se encontraba a 30 cm de la superficie.

  Sería, por ello, de interés disponer de una medida de la variación de la potencia transmitida a través de la superficie. La medida de la onda directa (no tanto la aérea) podría servir para ello, pero al saturar el receptor, pierde esta utilidad. Este problema no ha sido solucionado aún.
- Gades (1998, 2000) indica que la regresión debe realizarse en una zona de donde la variación en los índices sea homogénea y debida a la variación con la profundidad. En un glaciar politérmico esto no siempre existe, por lo que debe optarse por otra alternativa. Puede registrarse un perfil tan

largo como sea factible en la zona de trabajo (sin necesidad de que sea recto, ni de conocer sus coordenadas), o agruparse los datos de cuantos perfiles se disponga en esa zona. Copland y Sharp (2001) calculan la ley de variación del *BRP* con la profundidad utilizando todas las trazas en las que el *IRP* no excediera de cierto umbral, por lo que esto pudiera afectar al *BRP*. Pattyn *et al.* (2003), por su parte, estudian por separado las trazas de las zonas de acumulación y de ablación, reuniéndolas finalmente en una única regresión. Es necesario reunir el mayor número de datos posible, dada la gran dispersión de valores que muestra el *BRP* (*BRM*, *IRP*, *IRE*) entre las zonas secas (frías) y húmedas.

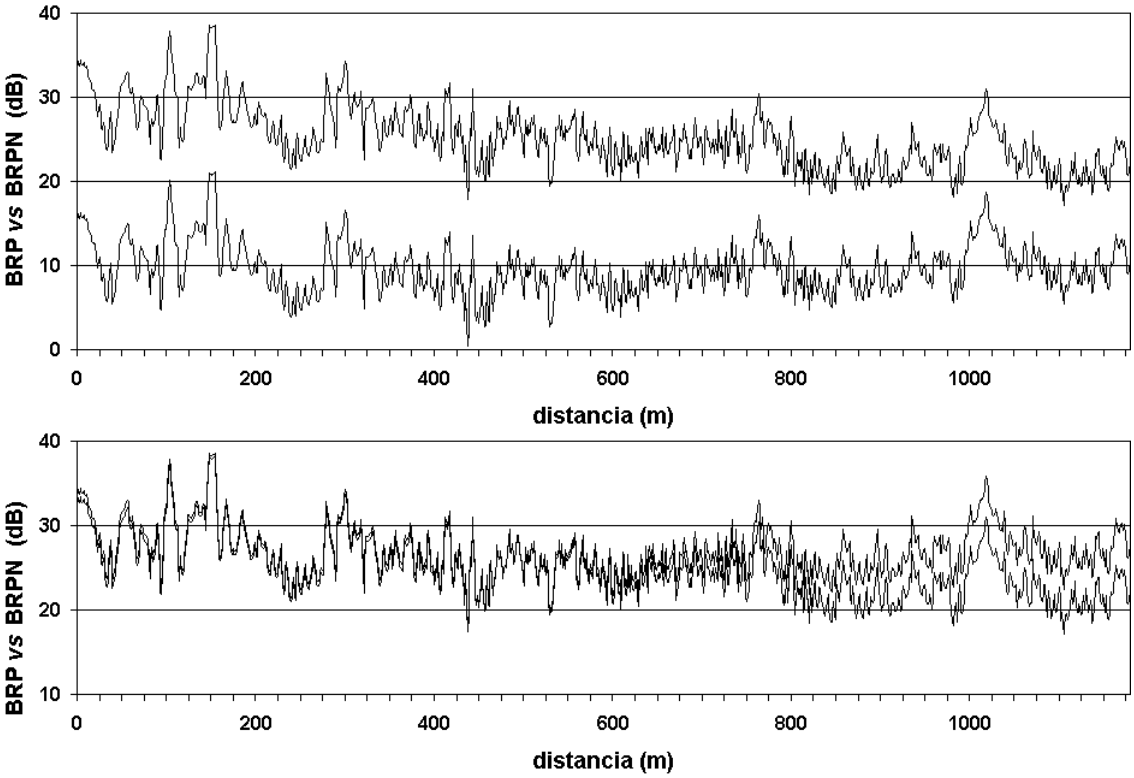

Figura 4-12 Sobre el perfil C1-C6 del glaciar Hansbreen registrado el 19 de julio de 2003:
arriba - *BRP* (superior) y *BRPN*+10dB (inferior);
abajo - *BRP* y *BRPN*+27'14dB (nivel dB del *BRP* medio).

En la Figura 4-12 se aprecia la influencia del espesor del glaciar en el *BRP* (obsérvese el perfil en la Figura 4-11). En el panel superior, la curva de arriba muestra el *BRP* (dB), mientras la curva del *BRPN* (dB) se muestra por debajo, sobreelevada 10dB, para su mejor visualización. El *BRPN* ha perdido su tendencia a disminuir con la profundidad, que sí tiene el *BRP*. En el panel inferior se muestra nuevamente el *BRP* (dB) y el *BRPN* (dB), pero este último ha sido sobreelevado una cantidad igual al nivel, en decibelios, del valor medio del *BRP* en el perfil (27'14dB). En la Figura 4-13 se muestra el *BRPN* con este mismo offset, junto con el *NP* y el *IRE*, medidos en decibelios.

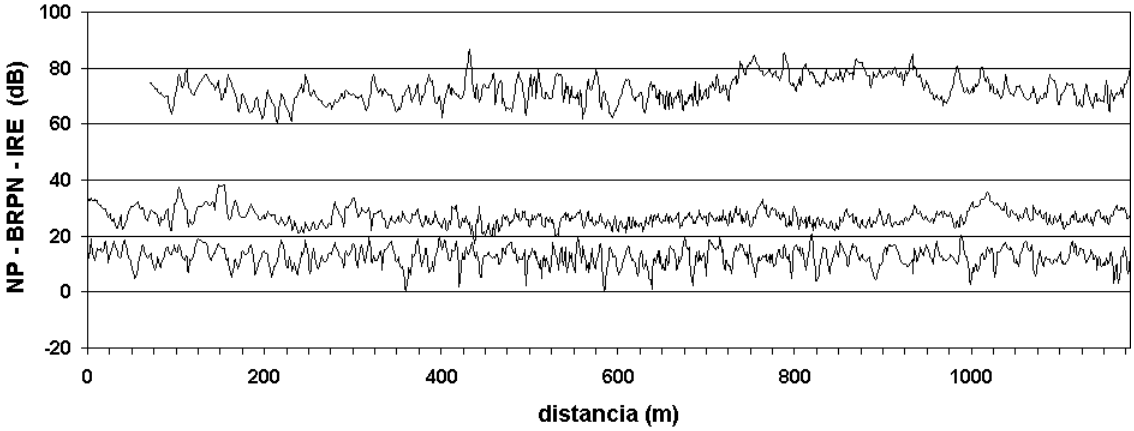

Figura 4-13 De abajo a arriba, *NP*, *BRPN* e *IRE*, medidos en decibelios, a partir del radargrama de la Figura 4-11.
El valor del *BRPN* ha sido elevado con un *offset* igual al nivel (dB) del valor medio del *BRP* del perfil (27'14 dB).
El perfil utilizado (C1-C6) fue registrado en el glaciar Hansbreen el 19 de julio de 2003.

El análisis de estos índices se fundamenta en las diferentes variaciones que sufren unos y otros. Como ya indica Gades (1998, p. 121), el cálculo del *IRP* se realiza para su comparación con el *BRP*, dado que variaciones en el segundo pueden venir motivadas por variaciones en el primero. Esta misma apreciación es extensible también al cálculo del *IRE*. En cualquier caso, la relación entre ambos (normalizados o no) puede inducir a valoraciones

cualitativas de lo ocurrido en el interior del glaciar y en el lecho. A continuación se describen algunas de las posibles interpretaciones que pueden extraerse de ellos:

- A priori, un crecimiento en el *IRE* es señal de mayor perturbación en la onda, lo que induce a pensar que el *BRPN* pueda atenuarse. Existen dos efectos de signo opuesto que intervienen en este análisis. El incremento en el *IRE* supone mayor perturbación, con la consiguiente atenuación del pulso en su propagación hacia el lecho y disminución del *BRPN*; pero el agua es una probable causa de este incremento, por lo que puede estar también presente en el lecho, haciendo crecer su coeficiente de reflexión e incrementando así el *BRPN*. Cada caso requiere un análisis particular.
- Copland y Sharp (2001) indican que las grietas generan grandes valores de *IRP*, asociados a una probable disminución en el *BRPN*. Por contra, Gades (1998, p. 121) dice que las grietas pueden desviar la onda y reflejarla, pero haciendo que se pierda más de lo que se refleja hacia el georradar, disminuyendo tanto *IRP* como *BRPN*. En la Figura 4-11 pueden apreciarse grietas situadas en la zona superficial, a distancias de 300 m y 430 m. El *IRE* presenta valores bajos en las primeras, con alto *BRPN*, mientras que en las segundas aparecen grandes valores de *IRE*, con bajo *BRPN*. La presencia o no de agua puede ser determinante en su análisis. Se explica el altísimo valor de *IRE* en las grietas situadas a 430 m por su acumulación de agua; el *BRPN* se eleva moderadamente a ambos costados, lo que indica cierto drenaje y concentración de agua en el lecho. En la grieta situada a 300 m la situación es diferente. El alto *BRPN* indica una importante presencia de agua en lecho; sin embargo, la grieta no destaca en el *IRE*, por lo que no contiene agua; esto indica que la grieta puede ser un buen cauce de drenaje hasta el lecho.

- El incremento de la perturbación tanto en el interior como en el lecho supone el crecimiento de ambos índices, al observar sus gráficas. Naturalmente, desplazándonos lateralmente en sentido opuesto se observaría un decrecimiento de ambos índices. En cualquier caso, la variación de ambos índices en el mismo sentido puede deberse a varios factores. Uno de ellos es la aparición de agua en pequeñas cantidades, como se ha indicado. Otro posible causante es la variación de la transmisión de potencia en superficie. Estas variaciones pueden deberse al propio equipo, cuyo rendimiento puede variar en el tiempo en uno u otro sentido, dependiendo de diferentes parámetros ajenos al glaciar (*e.g.*, descenso del nivel de carga de sus baterías, disminución o incremento de su rendimiento, tiempo de uso continuado, etc.), pero también a las condiciones de la superficie, como la presencia o no de agua estancada, como ya se ha indicado.
- Un incremento en el *BRPN*, asociado a un decremento simultáneo en el *IRE*, indica la probable aparición de agua en el lecho, sin que se haya incrementado el agua en el interior y, por lo tanto, proveniente de un drenaje lateral. En la Figura 4-11 se observa esta situación en el remanso localizado en el lecho, a la distancia $1020\ \mathrm{m}$. En la Figura 4-14, se aprecia un efecto similar a ambos lados de la distancia $-85\,\mathrm{km}$.
- Acorde con el análisis anterior, es frecuente que en las zonas de drenaje hasta el subsuelo (grietas o canales, etc.), el *IRE* observe un crecimiento que, se extiende a toda la zona y, asociado a él, un incremento del *BRPN* que además, puede extenderse lateralmente a ambos lados de la zona de elevado *IRE*. Esto se aprecia nítidamente en la Figura 4-14, entre las distancias $-67\,\mathrm{km}$ y $-82\,\mathrm{km}$. Además, si el contenido en agua asociado al interior del glaciar en la zona del drenaje es suficientemente elevado, puede producirse una depresión en el *BRPN*, por efecto de la alta atenuación de la onda. En la Figura 4-11 se observa una situación entre

700 y 1050 m, que puede ser analizada como se ha indicado. Tanto Copland y Sharp (2001) como Pattyn *et al.* (2003) indican que, en general, las variaciones en el *BRPN* se explican por cambios en la reflexión, no en la atenuación. Pero la gran presencia de agua interior puede modificar esta norma.

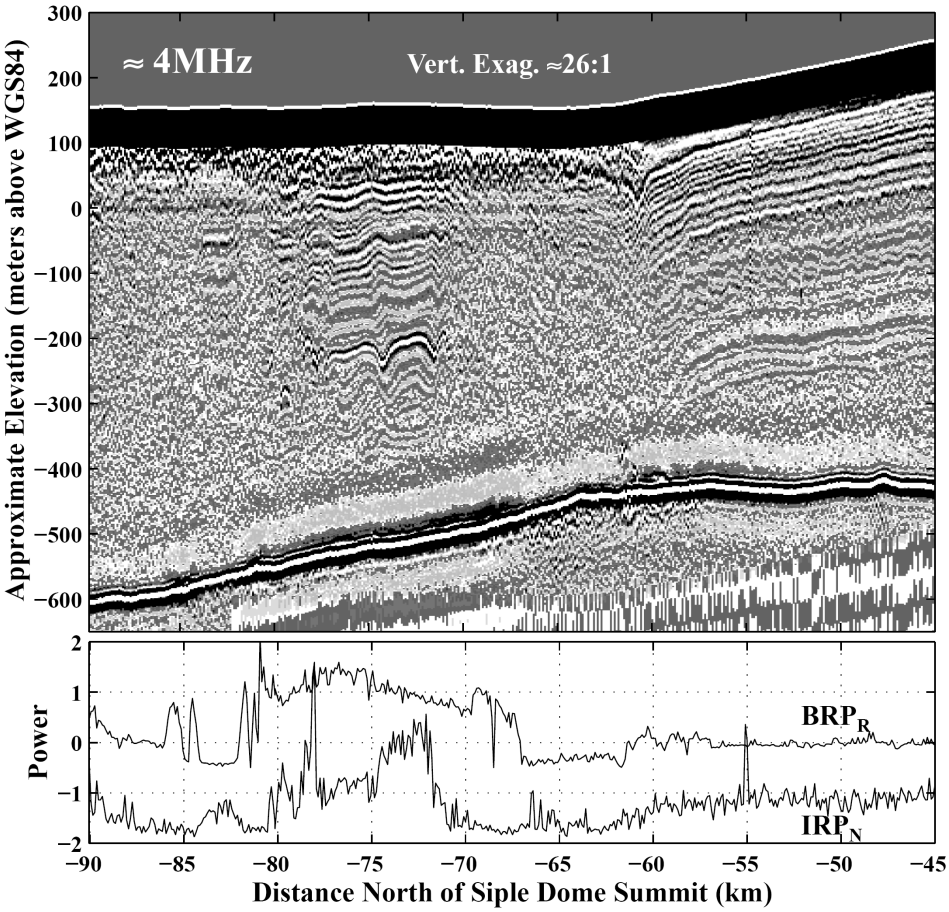

Figura 4-14 Detalle de un incremento de *IRPN* asociado a otro de mayor anchura en el *BRPN* (Gades, 1998, Fig. 7.9).

- A escala glaciar, Copland y Sharp (2001), al igual que Pattyn *et al.* (2003), encuentran que el *BRPN* es inferior a la unidad (negativo en su caso, al utilizar BRP_{R98}) en las zonas de acumulación, con hielo frío en el lecho, y superan la unidad (BRP_{R98} positivo) en las de ablación, donde el lecho

tiene hielo templado y está presente el agua. Pero los glaciares politérmicos que estudian Copland y Sharp (2001), situados en el ártico canadiense, están formados predominantemente por hielo frío, con un fino estrato de hielo templado en el lecho por debajo del centro de la zona de ablación. De igual manera, los que estudian Pattyn *et al.* (2003), en las montañas Altai, en la Federación de Rusia, junto a las fronteras con Mongolia, China y Kazajstán, son politérmicos y presentan agua en el lecho de la zona de ablación, pero no en la de acumulación. Sin embargo, en los glaciares politérmicos de Svalbard, el hielo frío forma un estrato relativamente fino cerca de la superficie, que puede llegar hasta el lecho en la zona de acumulación si el glaciar finaliza sobre tierra. Las diferentes posibles estructuras de los glaciares politérmicos hacen que sea preferible relacionar las conclusiones con el tipo de hielo en el lecho, que con el balance de masas en la zona. Además, el valor concreto del *BRPN* por encima o por debajo de la unidad (el signo de BRP_{R98}), depende de la zona completa sobre la que se haya calculado el BRP_E, siendo la unidad tan sólo una referencia del nivel medio. Así, en general, puede afirmarse que el hielo frío en el lecho genera un *BRPN* bajo, mientras que donde el lecho tiene hielo templado, con presencia de agua, es donde su valor crece.

- En los glaciares politérmicos, donde existen interfaces entre los estratos frío y templado, pueden definirse los índices energéticos reflectivos sobre este horizonte (*HRP*, HRP_E y *HRPN*), de manera análoga a los definidos en el lecho; y sobre cada uno de los estratos, el frío (*IRPC*, *IREC*, etc.) y el templado (*IRPT*, *IRET*, etc.), a semejanza de los definidos para el espesor completo.

Capítulo 5

Aplicación de los métodos descritos a los glaciares Hurd y Hansbreen

En los capítulos anteriores se han estudiado métodos y desarrollado procedimientos, tanto para el procesado de los datos de georradar como para calcular los parámetros físicos del medio glaciar.

En este capítulo se aplican estos métodos en dos glaciares concretos (Hurd y Hansbreen), para los cuales se dispone de medidas de campo, obtenidas en las sucesivas campañas realizadas por nuestro grupo de investigación.

5.1 Los glaciares Hurd y Hansbreen

5.1.1 Glaciar Hurd (Isla Livingston, Antártida)

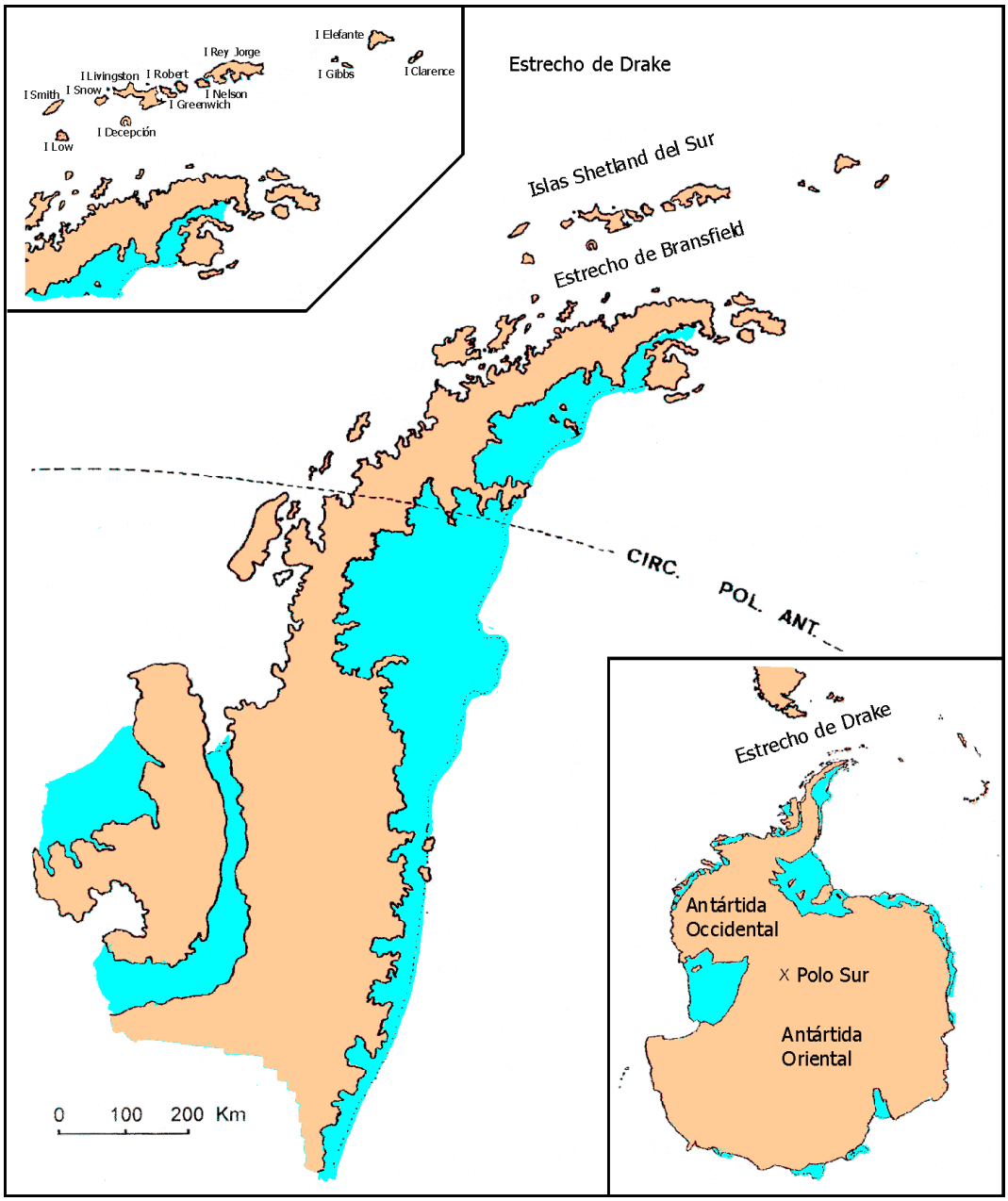

Figura 5-1 Ubicación de la Isla Livingston en las Islas Shetland del Sur, de la Antártida.

El glaciar Hurd es un glaciar templado con terminación sobre tierra situado en la Isla Livingston, perteneciente al archipiélago de las Shetland del Sur, en la Antártida (Figura 5-1), en la posición 62º 41' S, 60º 23' W. Ocupa un área aproximada de $6\ \mathrm{km}^2$. Constituye, junto con el glaciar Johnsons, el casquete de hielo que cubre la Península Hurd, en la que se encuentra la Base Antártica Española Juan Carlos I (Figura 5-2). Una divisoria de hielo local, con altitudes entre $200\ \mathrm{m}$ y $330\ \mathrm{m}$ sobre el nivel del mar (*above sea level*, a.s.l.) constituye la frontera entre ambos glaciares. Su lóbulo principal tiene una longitud de *ca.* $3\ \mathrm{km}$ y una anchura de *ca.* $2\ \mathrm{km}$ en la divisoria, decreciendo hasta *ca.* $0'6\ \mathrm{km}$ en su zona terminal.

Se han realizado sondeos mecánicos para la medición de la densidad y la temperatura (Furdada *et al.*, 1999; Ximenis, 2001) que permiten clasificar estos glaciares como templados. Esta característica es común en los glaciares de las islas Shetland del Sur, en los que las temperaturas típicas de verano, a nivel del mar, son ligeramente superiores a los cero grados centígrados.

Las velocidades superficiales crecen a lo largo de la dirección de la lengua, hasta alcanzar valores de *ca.* $3\ \mathrm{m\,a^{-1}}$ en su zona terminal, con velocidades que llegan a superar los $6\ \mathrm{m\,a^{-1}}$ en los lóbulos laterales.

El viento predominante de dirección NE (Ximenis, 2001), da lugar a una mayor acumulación en la zona meridional del glaciar, situada a sotavento. La acumulación y ablación presentan gran variabilidad espacial y temporal, con máximos de acumulación superiores a $1\ \mathrm{m\,we\,a^{-1}}$ (equivalente en agua, *water equivalent*, we) y ablación máxima de *ca.* $0'5\ \mathrm{m\,we\,a^{-1}}$.

La neviza se alterna con finos estratos de hielo, con una cadencia media de *ca.* $10\ \mathrm{cm}$, asociados con episodios de fusión superficial o lluvia, seguidos de su infiltración y recongelación. La zona de transición entre la neviza y el

hielo no se delimita con nitidez, aunque puede considerarse que se sitúa a una profundidad que oscila entre 10 m y 22 m, de acuerdo con los resultados obtenidos en perforaciones cercanas a las divisorias de hielo (Furdada *et al.*, 1999; Ximenis, 2001), lo que es consistente con las mediadas tomadas en otras divisorias de las Islas Shetland del Sur (Orheim y Govorukha, 1982; Quin *et al.*, 1994). Las densidades superficiales obtenidas en el primer metro de nieve y neviza tienen un valor medio de *ca.* 0'530 Mg m^{-3}.

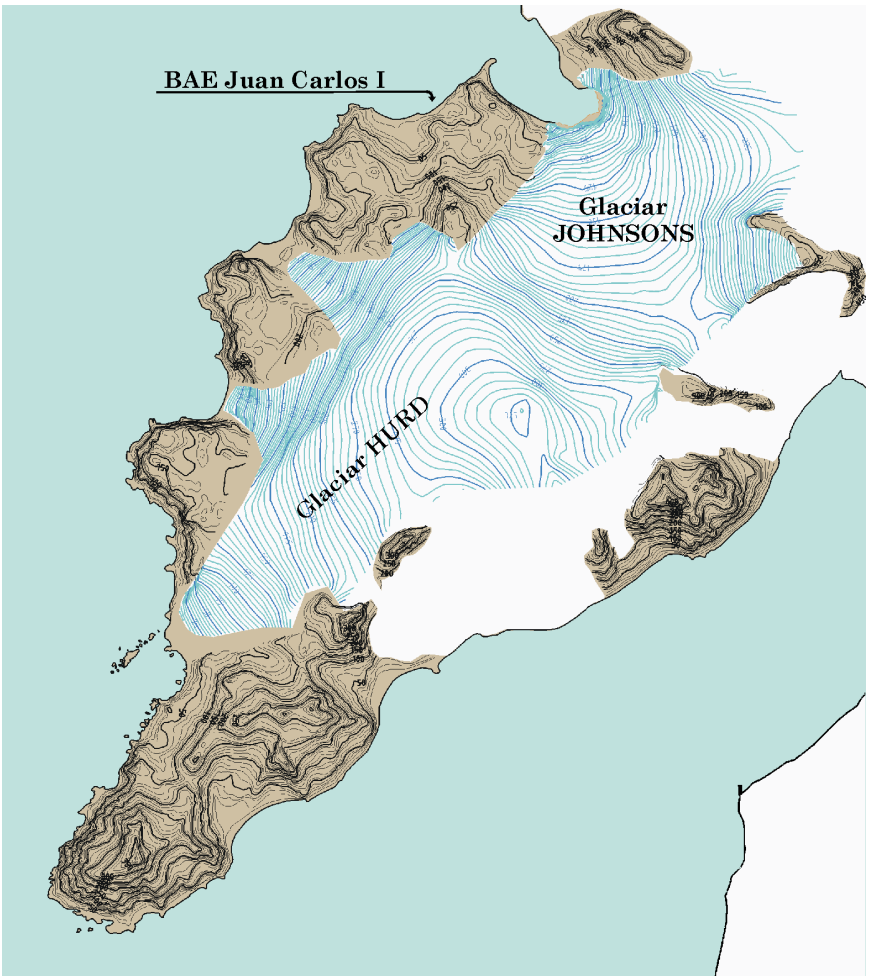

Figura 5-2 Ubicación de los glaciares Hurd y Johnsons respecto de la BAE JCI, en la Península Hurd, de la Isla Livingston.

5.1.2 Glaciar Hansbreen (Isla Spitsbergen, Ártico)

Hansbreen es un glaciar de marea[60] (*tidewater glacier*) que desemboca en el fiordo Hornsund, al sur de la Isla Spitsbergen (Figura 5-3).

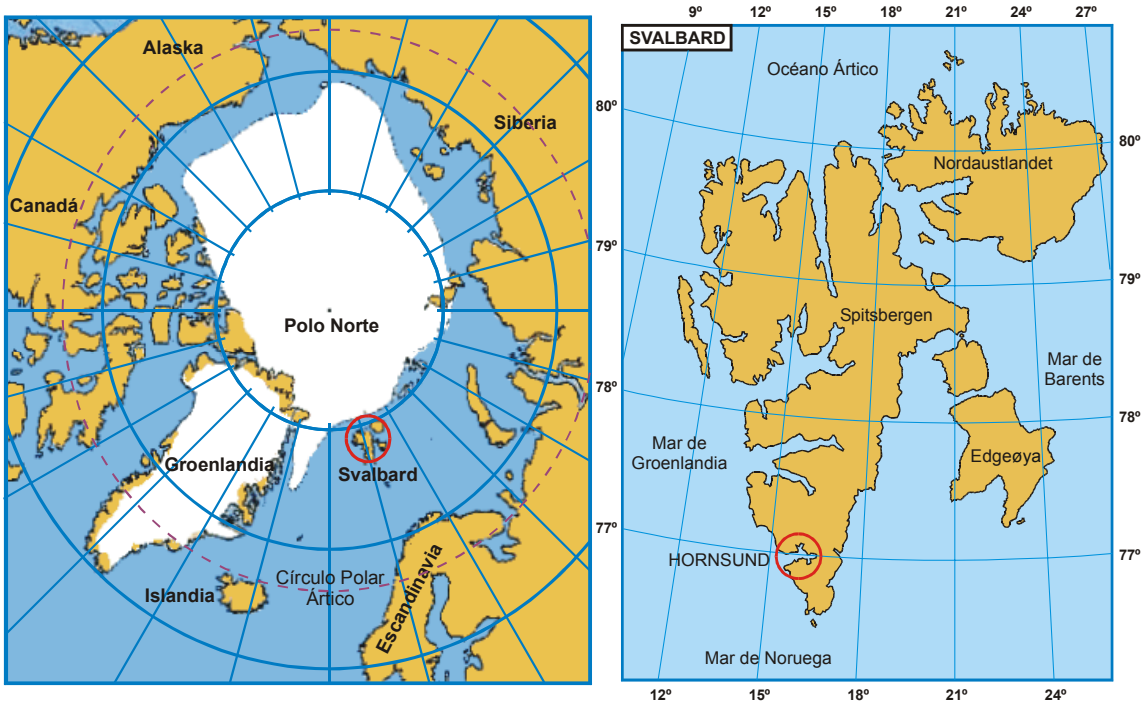

Figura 5-3 Localización del fiordo Hornsund, en la Isla Spitsbergen, del territorio ártico noruego de Svalbard, donde se encuentra Hansbreen.

El glaciar tiene una longitud de *ca.* 16 km y cubre una superficie de *ca.* 57 km^2. La lengua del glaciar tiene un ancho aproximado de 2'5 km y termina con un acantilado de hielo de 1'5 km de longitud a lo largo de la costa. El glaciar se extiende desde 600 m a.s.l. hasta el nivel del mar (Figura 5-4).

[60] Aquél glaciar de valle que finaliza en el mar (*e.g.*, Hooke, 1998, p. 4).

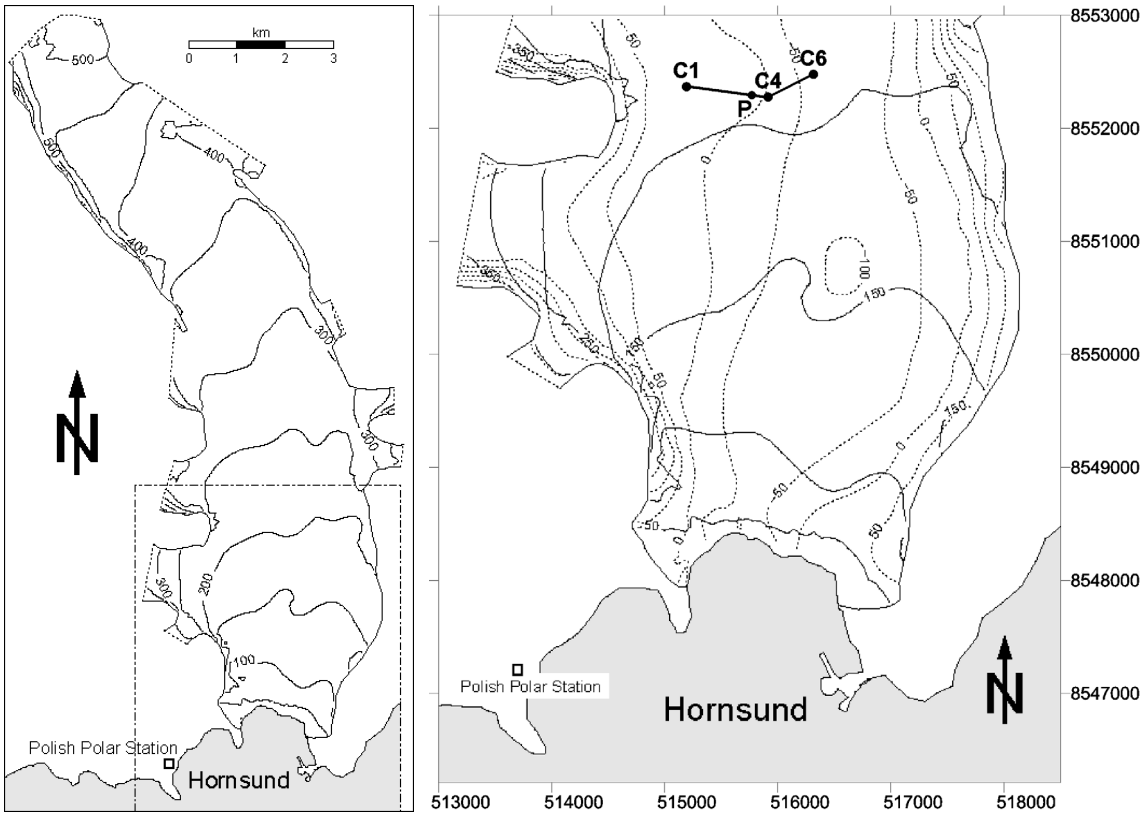

Figura 5-4 Izquierda: Hansbreen en el fiordo Hornsund, con líneas de nivel de superficie.
Derecha: detalle que incluye los 5 km terminales de Hansbreen, con líneas de nivel de superficie (línea continua) y del lecho (línea discontinua). En la zona superior se indican los puntos de medida de un perfil de georradar (C1, C4 y C6) y de un registro CMP (P).

El espesor de hielo máximo es de *ca.* 400 m. En los primeros 10 km desde su zona terminal, el lecho se encuentra bajo el nivel del mar (*below sea level*, b.s.l.), y alcanza un nivel inferior a 100 m b.s.l., a 3 km de su frente (Figura 5-4).

Hansbreen es un glaciar politérmico. Tiene un gran estrato de hielo templado a lo largo de todo el glaciar, que descansa sobre el lecho. Sobre él, en superficie, hay un fino estrato de neviza, más delgado según desciende, desapareciendo al alcanzar la línea de neviza. A partir de esa altitud, este estrato es sustituido por otro de hielo frío, cuyo espesor varía entre 20 m y

90 m y ocupa su superficie hasta la zona terminal. En la Figura 5-5 se muestra esta estructura en un perfil longitudinal de Hansbreen medido por Glazovsky *et al.* (1992) e interpretado por Moore *et al.* (1999).

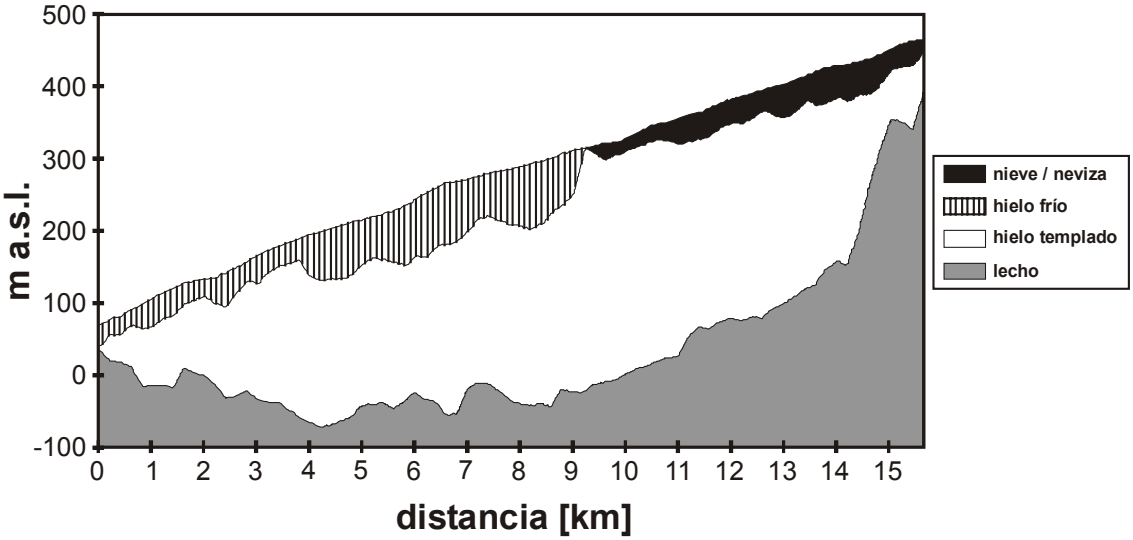

Figura 5-5 Perfil longitudinal de Hansbreen
(modificado a partir de Moore *et al.*, 1999, Fig.4).

El balance de masas se ha medido desde 1989. La acumulación media en invierno en 2000 fue de 0'93 m we y el balance medio estival de $-1'14$ m we, por lo que el balance neto del año se situó en $-0'21$ m we. En los últimos años, la altitud media de la línea de equilibrio (*Equilibrium Line Altitude*, ELA) ha variado entre 320 y 370 m a.s.l. La velocidad en superficie en la ELA es de 30 $\mathrm{m\,a^{-1}}$ (medido en 1988), pero el glaciar fluye con mayor velocidad según se acerca a su zona terminal, superando los 210 $\mathrm{m\,a^{-1}}$ cerca de su término (Jania *et al.*, 1996).

Medidas con georradar realizadas en Hansbreen muestran que el contenido en agua en el estrato de hielo templado está entre el 1 y el 2% durante el invierno, aunque crece a niveles entre el 3 y el 7% en las zonas de grietas

superficiales y *moulins* (Moore *et al.*, 1999). Se ha observado que el contenido en agua de Hansbreen varía con la profundidad: en verano de 1988, el contenido en agua de la parte superior del estrato de hielo templado era 2 a 3 veces mayor al de la parte inferior (Macheret *et al.*, 1993; Macheret y Glazovsky, 2000).

La velocidad media de retroceso de su frente, calculada desde 1936, es de 17 $m\,a^{-1}$ (Figura 5-6).

Figura 5-6 Retroceso del frente de Hansbreen, mostrado mediante dos fotografías, tomadas en 1957 (izquierda) y en 2003 (derecha) (http://hornsund.igf.edu.pl/srodowisko_en.html#gora).

5.2 Determinación de la geometría del glaciar Hurd

5.2.1 Topografía superficial

La topografía superficial de Hurd se ha determinado a partir de las medidas realizadas por Francisco Navarro y Jorge Enrique, durante la campaña 2000-2001, del 24-12-2000 al 10-1-2001 (Figura 5-7).

Para la ejecución de estas medidas se utilizó tecnología GPS con corrección diferencial (DGPS). Se empleó un sistema de Trimble, con la estación base 4000ssi, la estación móvil (*rover*) 4700 y el mando Survey Controller TSC1.

El sistema GPS localiza la posición de un punto, a partir de las señales recibidas de al menos tres satélites, situándolo en la intersección de las esferas con centro en cada satélite y radio correspondiente a la distancia entre las antenas de los satélites y el receptor, medida por éste. Existen multitud de motivos por los que este sistema no es exacto, entre los que cabe destacar el desajuste de los relojes entre satélites y receptor, y las variaciones en la propagación ionosférica de las señales, que modifican los retardos de éstas y que dependen también de la inclinación de los satélites sobre el horizonte. Ha existido, además, un error introducido de forma intencionada, conocido como disponibilidad selectiva (*Selective Availability*, SA)[61], abandonado en la actualidad. En buenas condiciones de visión del

[61] La disponibilidad selectiva era un error en el mensaje que transmite cada satélite, que fue introducido intencionadamente por el Departamento de Defensa de EE.UU. desde el 1 de julio de 1991 y estuvo en vigor hasta el 2 de mayo de 2000. Su consecuencia era una incertidumbre (95% del tiempo) de *ca.* 100 m de radio en X e Y, llegando a ±150 m en Z, si se desconocían las correcciones necesarias.

cielo y geometría adecuada, la incertidumbre de un GPS convencional se sitúa actualmente en *ca.* 15 m de radio.

El DGPS es un sistema que mejora esta precisión, al medir simultáneamente un punto de coordenadas conocidas (estación base) y el punto desconocido (*rover*). Por comparación entre las medidas que la estación base realiza de su propia posición y sus coordenadas exactas conocidas, la estación base puede calcular en cada momento el error recibido. Estando el punto de coordenadas desconocidas suficientemente cercano a la estación base, ésta puede calcular la corrección necesaria en la medida de aquél, obteniendo incertidumbres que pueden ser inferiores a 1 cm .

Según el momento en que se corrijan las medidas, éstas se clasifican en medidas en tiempo real o mediante postproceso. Las medidas en tiempo real requieren de un enlace entre la estación base y el *rover*, que permita compartir información en el momento de la medición, cosa innecesaria en las medidas con postprocesado, en las que esto se realiza más tarde.

El modo de trabajo con postprocesado utilizado se denomina estático rápido (*fast static*), requiere 8 minutos de registro cuando al menos se reciben 6 satélites (20 minutos con 4 satélites) y obtiene calidades centimétricas.

En la medición cinemática en tiempo real (*Real Time Kinematic*, RTK) se resuelven en el receptor DGPS las ambigüedades de fase en la portadora recibidas (GPS diferencial por desfase de portadoras) de 4 ó más satélites, siendo innecesario el postproceso. El receptor debe inicializarse, comenzando una medición ininterrumpida sobre la portadora de al menos 4 satélites. Pero una vez realizada esta inicialización, el receptor puede desplazarse y obtener precisiones centimétricas en medidas de sólo unos segundos. Si se pierde la visión de al menos 4 satélites, se debe inicializar nuevamente el receptor; operación que dura unos minutos.

El equipo de medición DGPS utilizado realiza otro tipo de medición diferencial en tiempo real, habitualmente denominada RTCM[62], que mide los desplazamientos en un código (*Coarse Acquisition Code*, C/A) que modula a la portadora (GPS diferencial por código), logrando precisiones decimétricas, sin necesidad de inicialización y pudiéndose interrumpir el enlace. Es frecuente promediar varias medidas, para aumentar su precisión.

En las medidas realizadas sobre el glaciar Hurd, la estación base ha estado situada permanentemente en la BAE JCI y sus cordenadas son:

- UTM 20South: Easting 633751'786, Northing 3049244'833.
- WGS1984: Latitud 62º 36' 46'95050" S, Longitud 60º 23' 20'21120" W.
- Su altitud sobre el elipsoide de referencia (WGS1984) es de 29'061 m y su cota sobre nivel de mar, de 11'900 m.

Se midió un total de 413 puntos (Figura 5-7), 137 de ellos en modo RTK (incertidumbre de unos pocos cm, tanto en horizontal como en vertical) y 276 en modo RTCM (basados en 50 muestras; incertidumbre vertical típica de unos pocos dm, con la horizontal menor).

Las altitudes han sido medidas sobre el elipsoide WGS84 y posteriormente se han referido al nivel medio del mar. Para realizar esta transformación se ha utilizado la diferencia de altitudes de la estación base con respecto a ambas referencias, *i.e.*, se ha sustraído 17'161 m de las altitudes de los puntos sobre el elipsoide de referencia WGS1984.

---

[62] Si bien RTCM son las siglas de *Radio Technical Commission for Maritime Services*, comisión que dictó las normas que rigen el protocolo de transmisión de correcciones diferenciales GPS, en el que se incluyen las correcciones RTK.

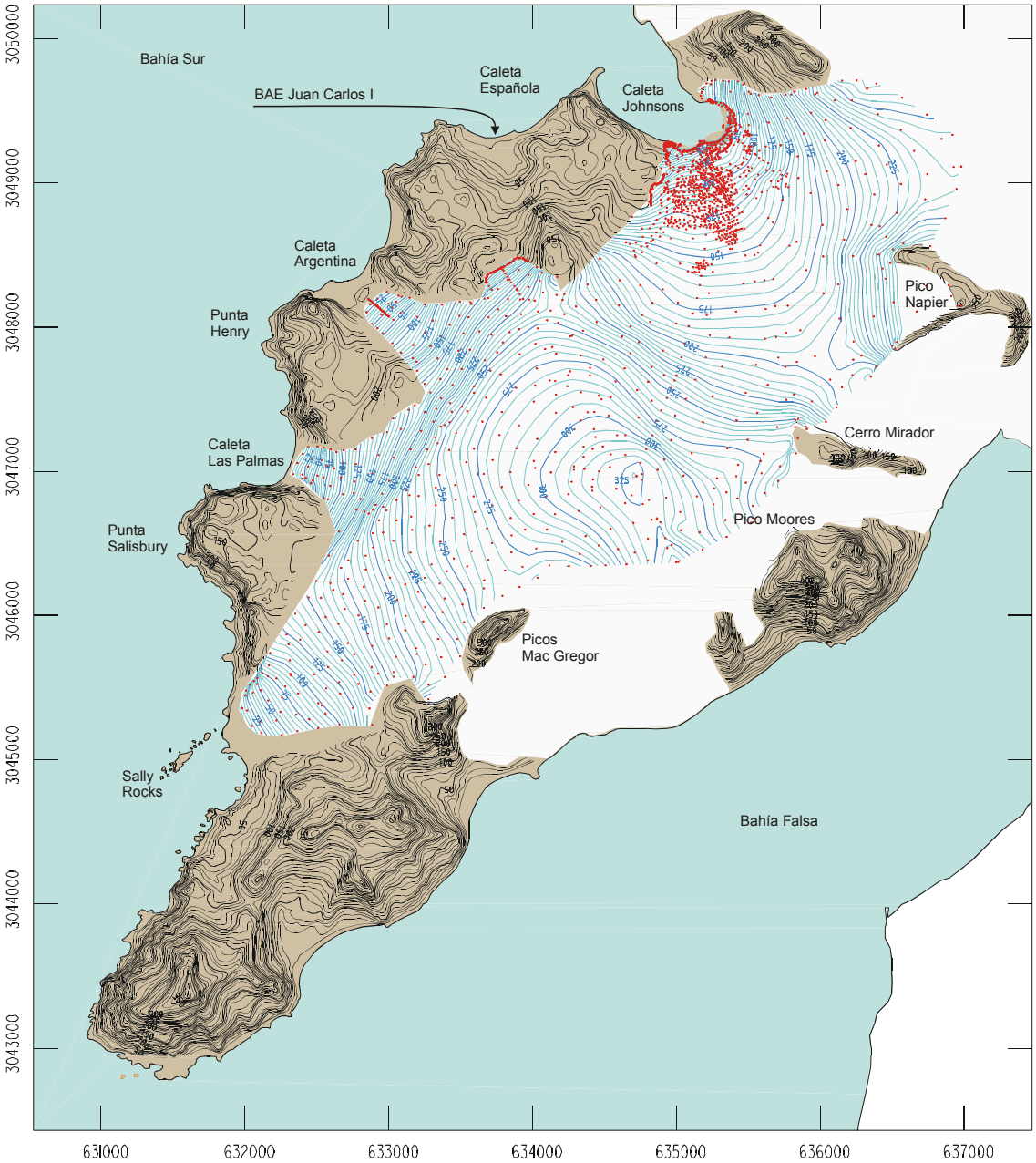

Figura 5-7 Topografía superficial del glaciar Hurd, obtenida mediante DGPS, en su entorno rocoso. Se señala con un punto rojo cada punto topográfico medido (datos no publicados de F. Navarro). Por completitud, se incluye la topografía del glaciar Johnsons y los puntos de medida en los que se basó. Tanto la topografía del entorno rocoso como la del glaciar Johnsons provienen de medidas y cálculos anteriores y ajenos a esta tesis (Ximenis, 2001), realizadas mediante teodolito (las del glaciar) o a partir de fotografías aéreas apoyadas en medidas topográficas en tierra (las del entorno rocoso).

5.2.2 Radioecosondeo

5.2.2.1 Equipo utilizado (georradar VIRL)

El georradar VIRL es un radar monopulso para prospección del hielo (*Ice Penetrating Radar*), del que existen varios modelos; en esta tesis sólo se han utilizado datos de los modelos VIRL-2 y VIRL2a. Está especialmente diseñado para glaciares templados, aunque es adecuado también en glaciares fríos y politérmicos (Vasilenko *et al.*, 2002). Consta de un transmisor, un receptor y un sistema de registro digital (DRS - *Digital Recording System*). El transmisor genera pulsos de 25 a 30 ns, con una frecuencia de repetición de pulso de 20 kHz y potencia de pico de 1'5 kW en VIRL-2 y 1'8 kW en VIRL-2a. Utilizado con sus dipolos resistivos de 5'8 m, los pulsos emitidos presentan una frecuencia central de 15 MHz. El receptor tiene un amplificador logarítmico con 80 dB de margen dinámico en su entrada y un ancho de banda de 100 MHz. El DRS muestrea la señal recibida utilizando un periodo de muestreo de 5 ns ($f_S = 200\,\text{MHz}$) y tiene capacidad para un máximo de 4082 muestras (20'41 μs), lo que permite registrar más de 1500 m de espesor de hielo. El sincronismo entre el transmisor y el receptor está gestionado por el DRS y se realiza a través de un enlace de radio o mediante un enlace de fibra óptica.

La orden de registro puede generarse manual o automáticamente y, en este segundo caso, por tiempo o por distancia (medida por el odómetro). El DRS comienza a registrar a la vez que indica al sistema de sincronismo que se emita una onda de sincronización, que al ser recibida por el sistema transmisor, emite un pulso de georradar.

Las trazas se almacenan en ficheros de registro con formato que denominamos DRS (Martín *et al.*, no publicado[63]), con nombre **.dat*. Cada grupo de ficheros (*e.g.*, correspondientes a una jornada de trabajo en campo) tienen un prefijo común (*e.g.*, hur03*), y la identificación individual se realiza añadiendo a su nombre un número de dos dígitos (*e.g.*, hur0300, hur0301, etc.). Cada fichero almacena los datos correspondientes a 100 posiciones consecutivas de las antenas sobre la superficie del glaciar (trazas). Además del muestreo de la señal electromagnética recibida, con cada traza se incluye una cabecera con ciertos parámetros[64]. Tanto la cabecera como las muestras vienen expresadas en enteros hexadecimales.

Para utilizar los datos de campo (formato DRS) con cualquier software comercial (en este caso ReflexW) es necesario convertirlos a otro formato más convencional, como puede ser SEG2. Esta transformación se realiza utilizando el programa drs2seg2 (Martín *et al.*, no publicado). El formato SEG2 es el recomendado por el subcomité de *Engineering and Groundwater Geophysics* de la *Society of Exploration Geophysicists* (SEG) para su uso en sísmica superficial y georradar. La información detallada sobre este formato puede encontrarse en Pullan (1990).

---

[63] Martín, C., Hüntemann, A. y Navarro, F.J.

[64] En cada cabecera de traza se incluye el número de traza, el número de señales que se reagrupan para componer una traza, el número de vueltas del odómetro, la altitud, el identificador N/S-E/W de los campos latitud y longitud, y la sección del fichero, que no se utiliza actualmente.

5.2.2.2 Prospección realizada en el glaciar Hurd

La prospección sobre el glaciar Hurd se realizó durante dos campañas sucesivas, 2000-2001 y 2001-2002. El director de esta tesis fue responsable de la primera, realizada junto con Evgeniy Vasilenko y Yury Macheret, con la ayuda de Jorge Enrique y Alex Simón como técnicos de montaña. El autor fue el responsable de la segunda campaña, que realizó con la ayuda de Dominic Font y Xavier Prades como técnicos de montaña.

Para realizar un radioecosondeo con el georradar VIRL, se dispuso un convoy formado por dos trineos de madera, con una moto de nieve en cada extremo del convoy (una para tracción y otra para retención), que se desplazaba por la superficie del glaciar. Sobre un trineo se instaló el sistema receptor, y sobre el otro el transmisor. La separación entre centros de antenas vino limitada por el enlace de sincronismo y, en el caso del sincronismo por radio, su valor óptimo se encontró entre 6 y 7 m. Las antenas se utilizaron en disposición colineal, siguiendo la dirección del perfil. Se colocaron por debajo de los trineos y, debido a su flexibilidad, se unieron a la cuerda tractora con elementos elásticos para mantenerlas en tensión, buscando su permanente contacto con el glaciar. Habitualmente, la moto de tracción se sitúa *ca.* 25 m por delante del primer trineo, y la moto de retención, a *ca.* 40 m por detrás del segundo. En la Figura 2-1 se ha mostrado un esquema de la disposición del convoy, del que se muestran detalles en la Figura 5-8.

El radioecosondeo se ha realizado a una velocidad de $3\ \mathrm{m\,s^{-1}}$, con una cadencia de registro de uno cada segundo. En cada registro se ha guardado, además, su posición medida con GPS (Garmin-II Plus) y la distancia desde el

comienzo del perfil, medida con el odómetro. Se han medido también las posiciones de los extremos de cada perfil con GPS diferencial (Trimble[65]).

Figura 5-8 Detalles del convoy de sondeo con el georradar VIRL-2, realizado por el autor en el glaciar Hurd, durante la campaña antártica 2001-2002.
Arriba izq.- trineo Tx y moto de cola;
Arriba centro- trineo Rx + DRS;
Arriba dcha.- trineo Rx y moto de cabeza.
Abajo: trineo Rx donde se aprecia el odómetro y el GPS.

[65] Trimble 4000ssi en la base, con 4700 como *Rover* y Data Controller TSC1.

Durante las dos campañas de medida se realizaron más de 60 perfiles, estableciendo una red de perfiles longitudinales y transversales, con detalles en las zonas de contorno y en los lóbulos laterales (Figura 5-9 y Figura 5-10).

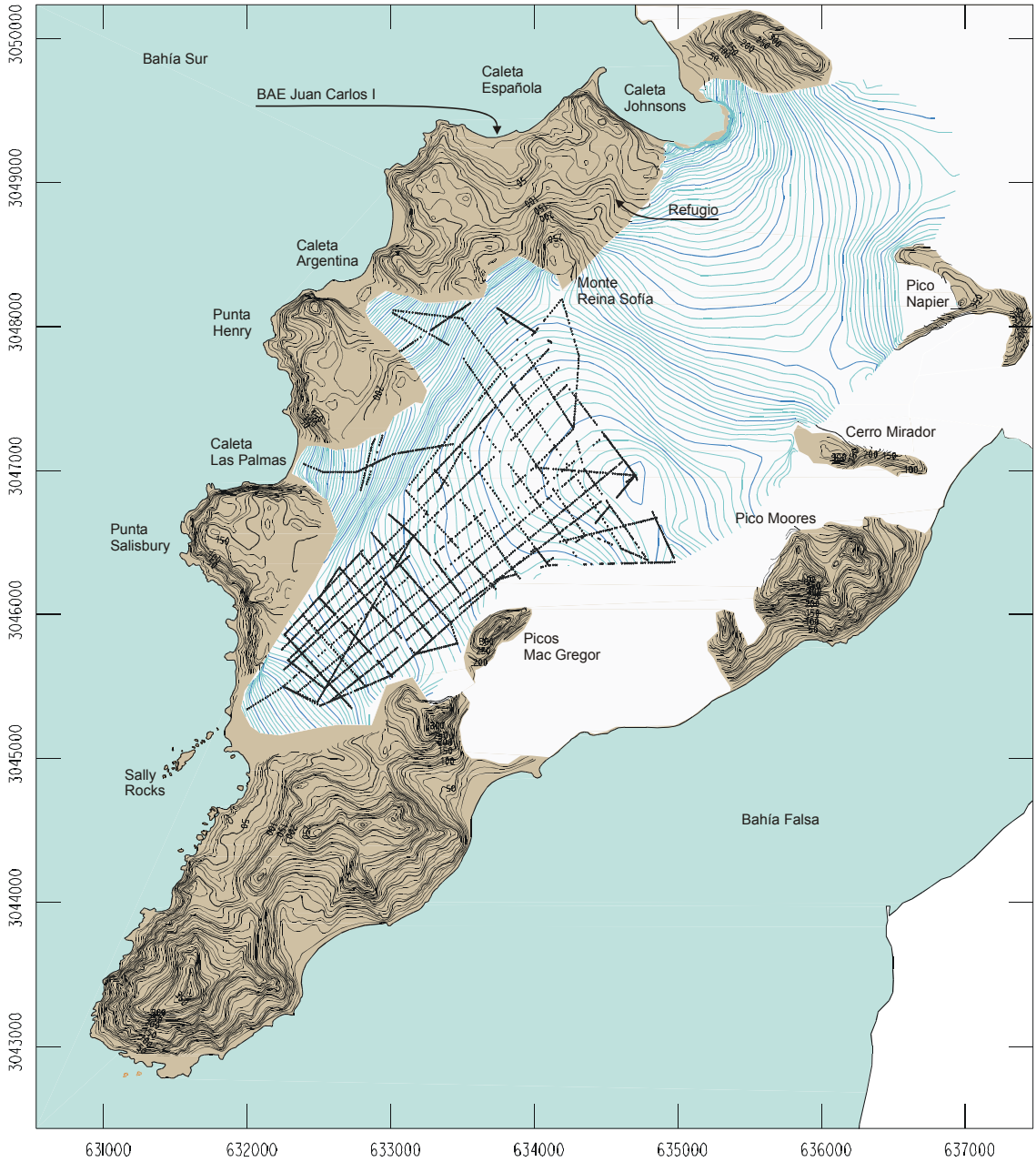

Figura 5-9 Localización de los perfiles realizados sobre el glaciar Hurd durante las campañas 2000-2001 y 2001-2002. Los perfiles se muestran como la sucesión de aquéllos de sus puntos en los que se ha podido medir el espesor del hielo.

En la Figura 5-10 se incluye la denominación de los puntos extremos de cada perfil. La nomenclatura de los perfiles utilizada en esta tesis se obtiene a partir del nombre de sus puntos extremos (Apéndice B).

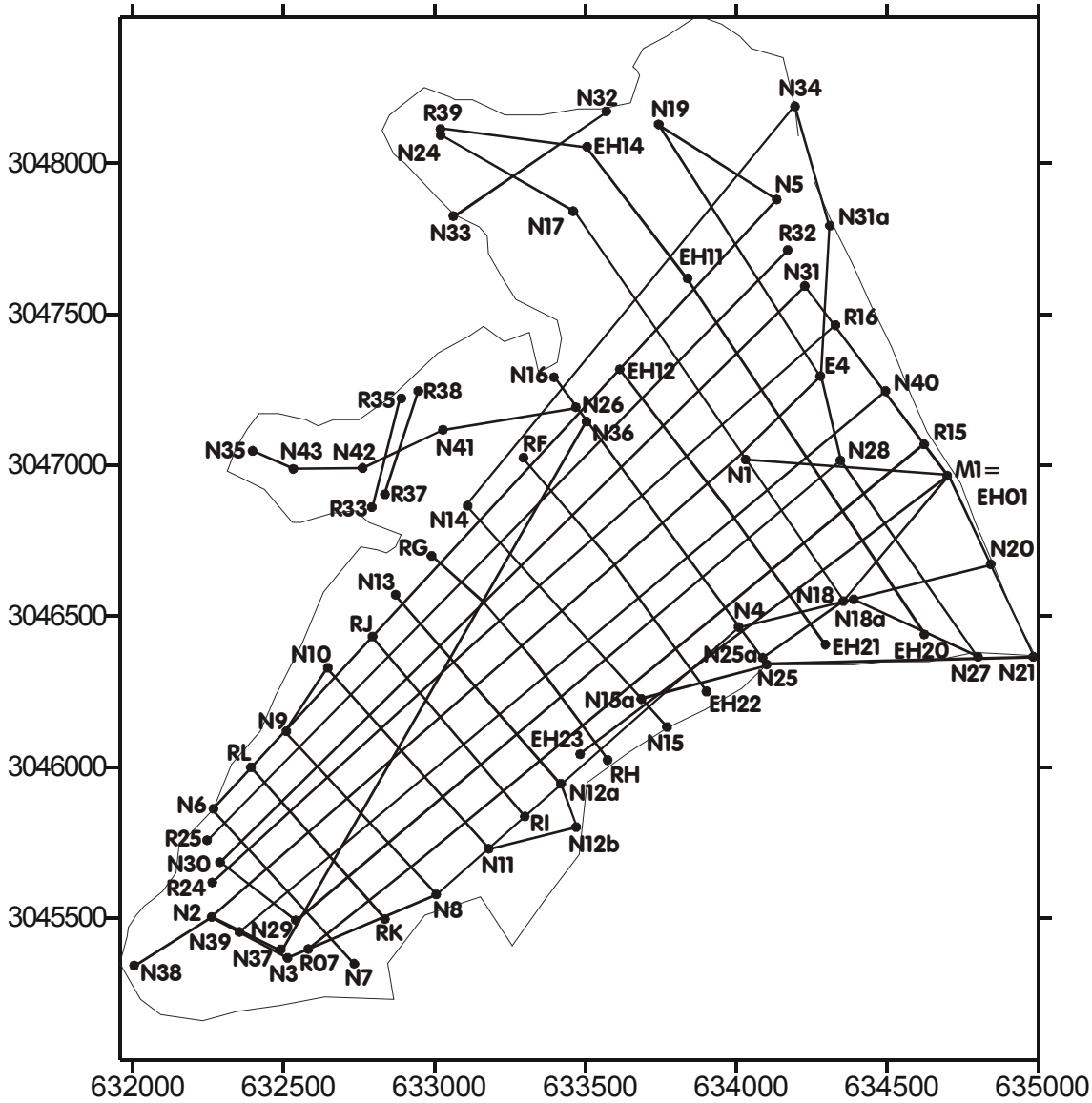

Figura 5-10 Nomenclatura de los extremos de los perfiles mostrados en la Figura 5-9.

5.2.3 Procesado de los datos de georradar

Los perfiles registrados se procesaron siguiendo una secuencia similar a la desarrollada en §3.3, con variaciones en cada caso. En cada perfil se decide la supresión de pasos, la inclusión de otros y los parámetros del procesado. Los perfiles obtenidos tras el procesado se incluyen en el Apéndice B, junto con los pasos de procesado realizados. Los perfiles se presentan sin corrección topográfica y sin puntear su lecho, por mayor claridad.

El equipo utilizado en el glaciar Hurd (VIRL-2a) no es el mismo que registró el perfil de Hansbreen (RAMAC, CUII), cuyo procesado se describe en §3.3. La forma de su pulso varía y también la saturación que produce la onda aérea. El pulso de VIRL-2a es menos reverberante que el de RAMAC, por lo que en estos perfiles no resulta necesaria la deconvolución. En general, tampoco se hace necesario el filtrado horizontal, ya que la oscilación común registrada queda suficientemente atenuada con la supresión de la DC mediante el filtro *dewow* y los filtros de Butterworth aplicados. Sin embargo, en ocasiones se ha añadido un filtrado horizontal al final del procesado, cuando la intensidad de la oscilación común perturbaba la interpretación del radargrama. Por otro lado, en la mayor parte de los perfiles se utiliza el algoritmo migratorio de Kirchoff, con resultados similares al de Stolt. Cabe destacar que VIRL-2a presenta, en ocasiones, señales fantasma con un retardo de *ca.* 1000 ns . Se tuvo la precaución de realizar perfiles rectos sobre el glaciar y, en los casos en que la orografía no lo permitía (*e.g.*, descendiendo por los lóbulos laterales), se dividieron estos perfiles en tramos, cada uno de ellos aproximadamente recto. Además, a diferencia de Hansbreen, el glaciar Hurd no presenta agua en superficie, por lo que el funcionamiento del odómetro es correcto y la velocidad en superficie pede mantenerse constante. Se ha estimado innecesaria la reordenación de las trazas, por este motivo.

5.2.4 Mapa de espesores de hielo y topografía del lecho

En la Figura 5-11 se muestra el mapa de espesores de hielo del glaciar Hurd. Este mapa ha sido generado con las medidas de la profundidad del lecho que se han obtenido de los perfiles de georradar procesados (Apéndice B).

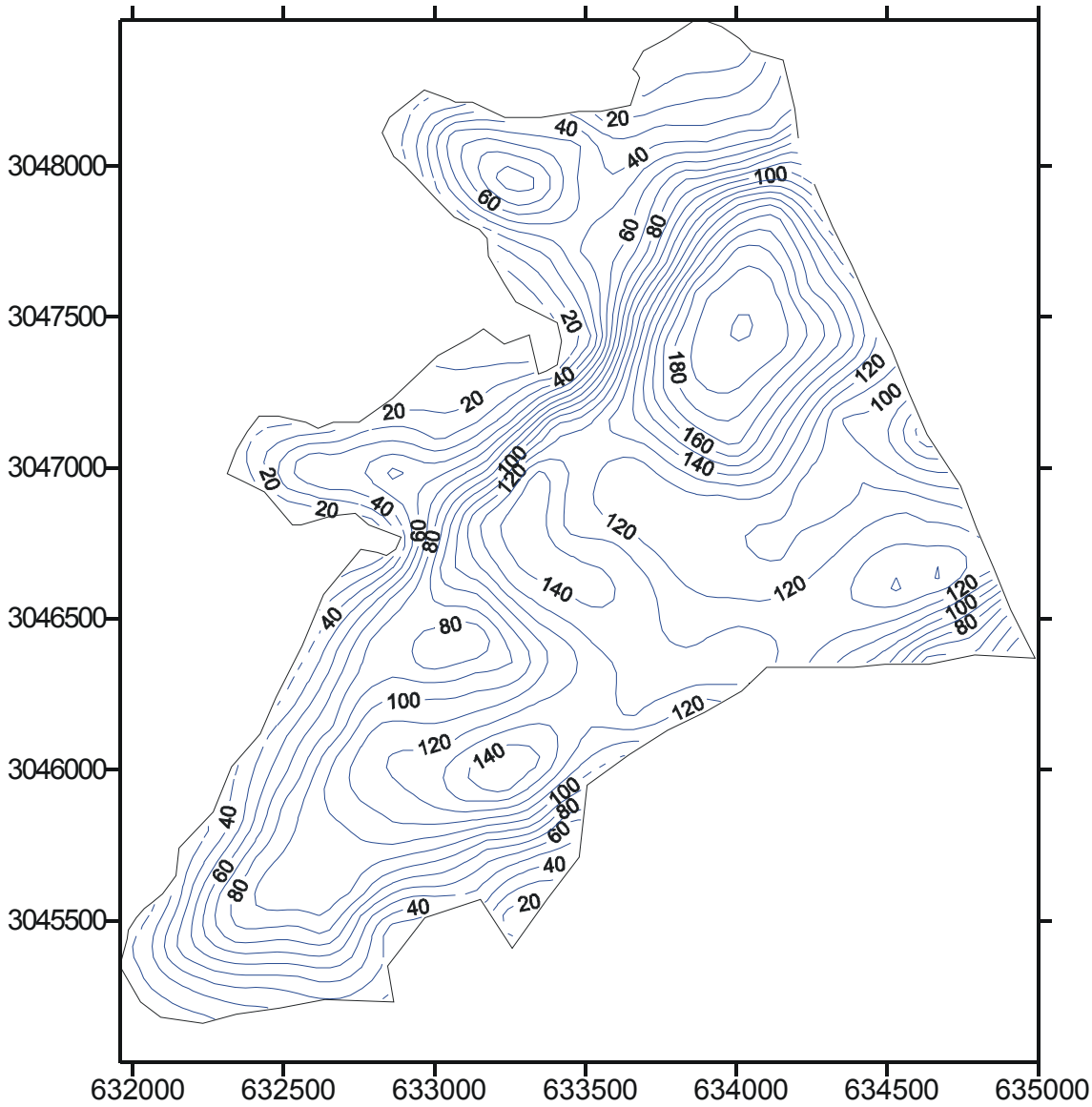

Figura 5-11 Mapa de espesores del glaciar Hurd, obtenido utilizando medidas de georradar.

En la Figura 5-12 se presenta la topografía del lecho del glaciar Hurd, junto con la de las zonas libres de hielo circundantes. Las cotas del lecho se han obtenido sustrayendo los espesores de hielo anteriores de la topografía superficial (Figura 5-7).

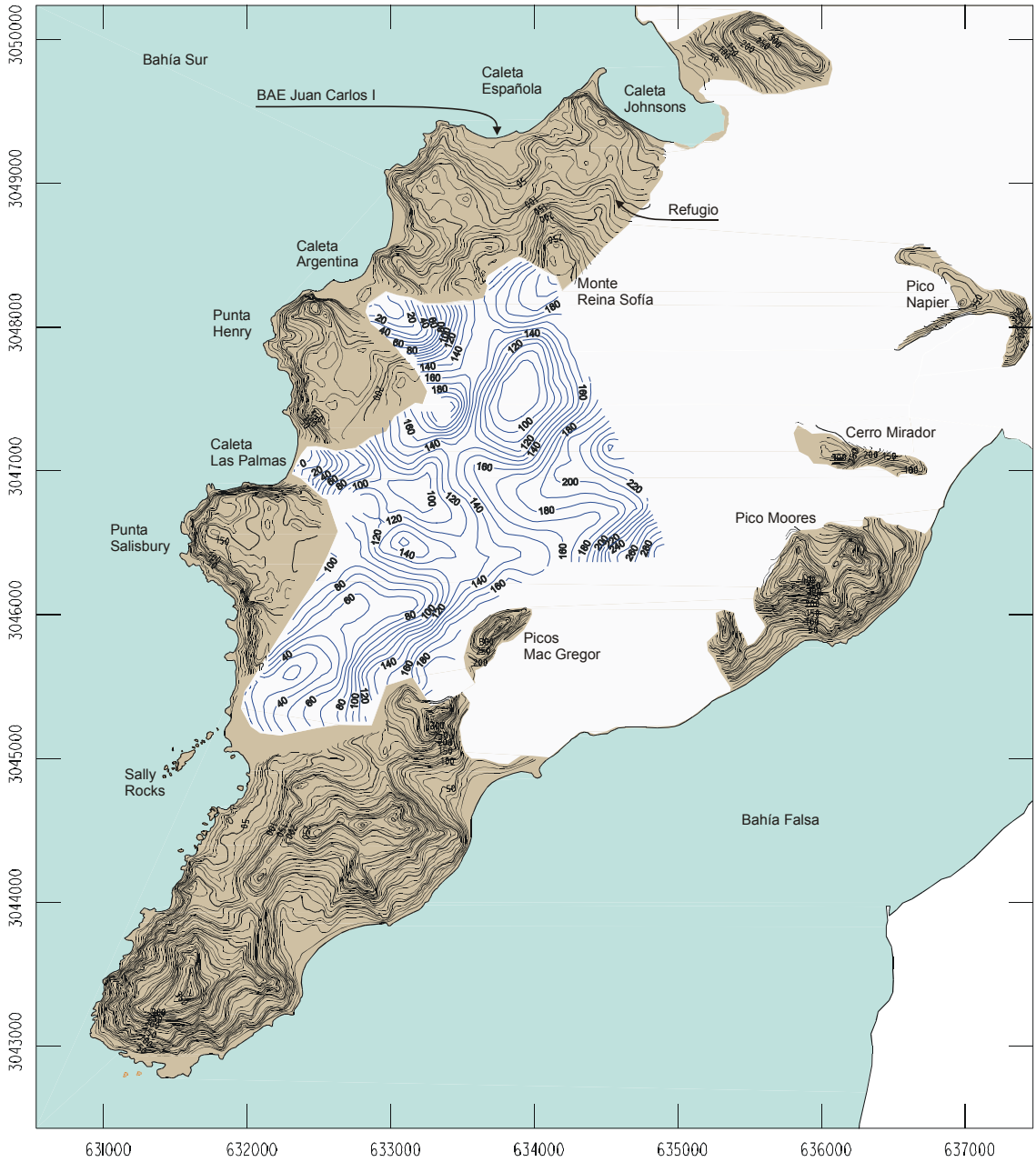

Figura 5-12 Topografía del lecho del glaciar Hurd, obtenida como sustracción de los espesores a la topografía de superficie.

En la Figura 5-11 pueden observarse espesores máximos de más de 200 m, con valores medios en la zona de acumulación de *ca.* 120 m, valor a partir del cual decae el espesor rápidamente al adentrarse en los lóbulos. En la Figura 5-13 se muestra una representación tridimensional de la topografía superficial del glaciar Hurd, cuyo lecho aparece igualmente representado en la Figura 5-14.

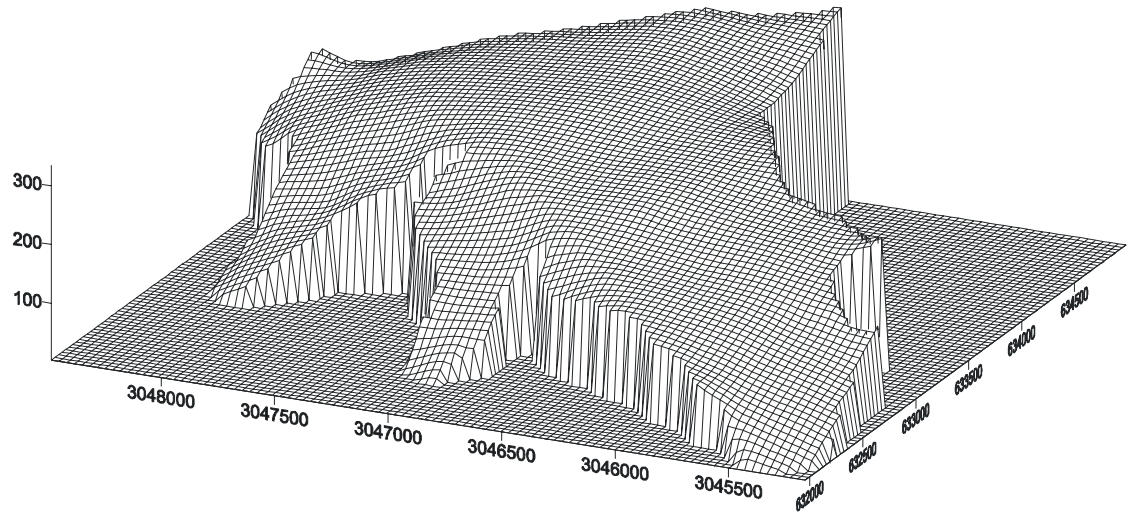

Figura 5-13 Representación 3D de la superficie del glaciar Hurd.

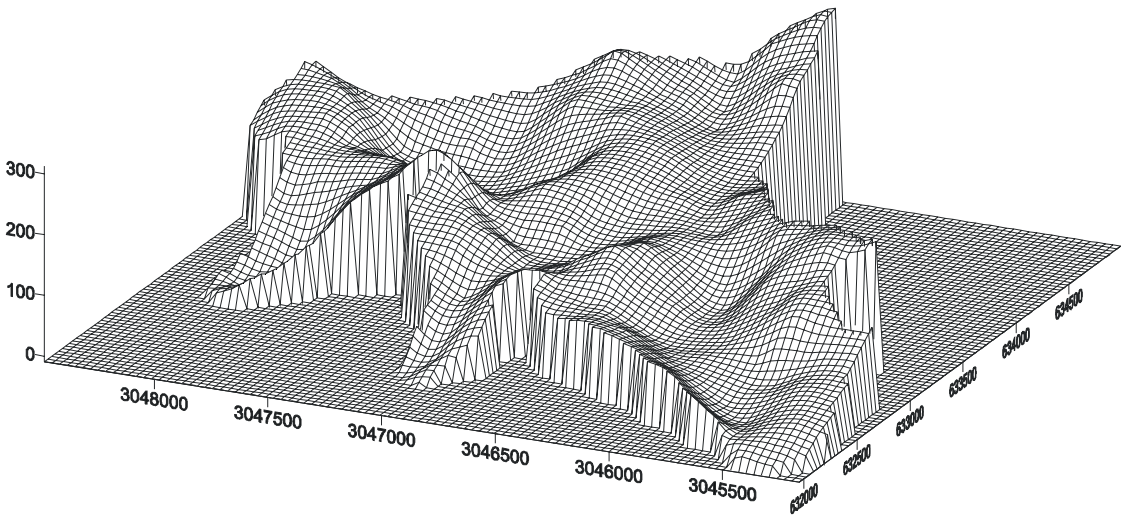

Figura 5-14 Representación 3D del lecho bajo el glaciar Hurd.

En la Figura 5-14 se aprecia la existencia bajo el glaciar de una cordillera que une Punta Salisbury (véanse toponímicos en *e.g.*, Figura 5-12) con los Picos Mac Gregor y de otra que une Punta Henry con las rocas cercanas al Pico Moores, que también se unen con el monte Reina Sofía por debajo de la divisoria.

Entre estas cordilleras se generan valles, que finalizan frente a los lóbulos Argentina y Las Palmas. Una cordillera nace en el monte Reina Sofía y transcurre longitudinalmente al glaciar, descendiendo por el lateral norte del lóbulo central y cerrando estos valles al comienzo de cada lóbulo (en mayor medida en el Lóbulo Argentina), lo que provoca grandes pendientes en éstos y genera grandes grietas en su nacimiento. La extensión de esta cordillera se aprecia en el mar con los islotes denominados Sally Rocks.

El punto de espesor máximo, situado al sur de esta cordillera, junto al nacimiento del Lóbulo Argentina, coincide con una depresión en el lecho en forma de cuenco cónico.

5.3 Determinación de parámetros físicos en los glaciares Hurd y Hansbreen

5.3.1 Índices energéticos reflectivos en el glaciar Hansbreen

Durante el verano de 2003, entre el 17 de julio y el 4 de agosto, se realizaron 11 perfiles entre los puntos C1 y C6 en Hansbreen (Figura 5-4) con un georradar RAMAC (CUII), con frecuencia de repetición de pulsos de 100 kHz, antena no apantallada de 25 MHz (4'06 m de longitud) y registro de 1000 muestras por traza con un intervalo de muestreo de 4 ns.

Por diferentes motivos, sólo 7 tienen calidad suficiente para su procesado (17, 19, 20, 23, 25, 26 de julio y 4 de agosto). En §3.3 se ha realizado la secuencia del procesado el perfil obtenido el día 23 de julio, mostrado en la Figura 3-55.

Desde la Figura 4-10 hasta la Figura 4-13 se ha mostrado el resultado de los índices energéticos reflectivos discutidos en §4.3 en el perfil realizado el 19 de julio de 2003.

El *BRPN* mostrado en la Figura 4-13, proporciona una medida de la potencia reflejada en el lecho, corregida por las variaciones de espesor del glaciar. Por su parte, el *IRE* mostrado en la misma figura es una medida de la energía que ha regresado al receptor sin llegar al lecho y, por lo tanto, es una medida de la pérdida energética de la señal en su propagación entre la superficie y el lecho. Como se ha indicado en §4.3, es importante observar ambos parámetros juntos, para estudiar las relaciones entre sus variaciones.

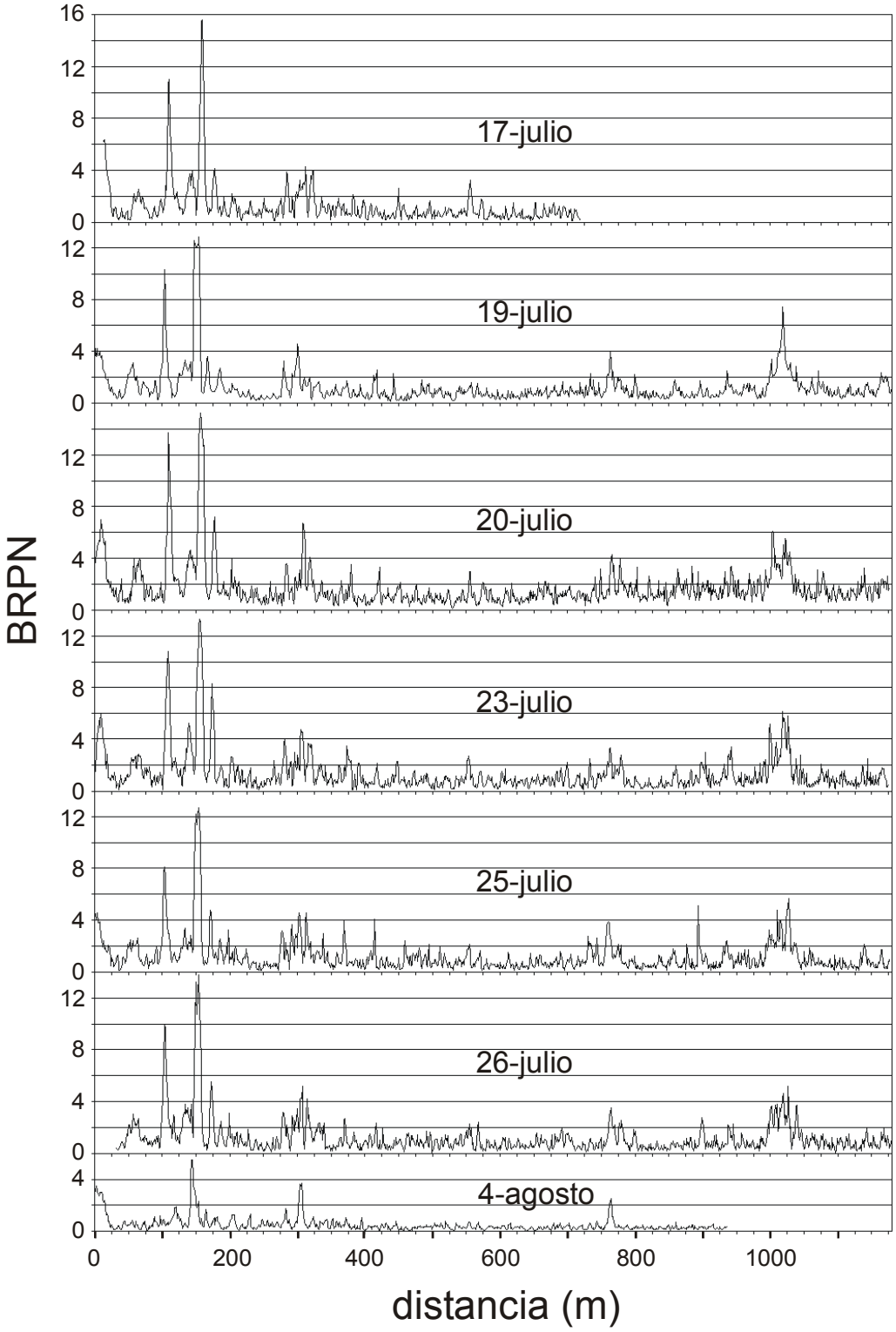

Figura 5-15 Variación del índice *BRPN* (escala lineal) obtenido de los registros de georradar de los días 17, 19, 20, 23, 25, 26 de julio y 4 de agosto de 2003 en el perfil C1-C6 en Hansbreen.

En la Figura 5-15 se observa la secuencia temporal del *BRPN* en el perfil C1-C6 obtenida de los registros de georradar indicados. Esta secuencia también ha sido representada en forma tridimensional (*BRPN* en el espacio y en el tiempo) en la Figura 5-16. La Figura 5-17 muestra el *IRE* obtenido para cada uno de los perfiles bajo estudio. Se ha utilizado la escala lineal en estas figuras para resaltar las variaciones locales, y en todos los perfiles la misma escala, para facilitar la observación de las variaciones temporales.

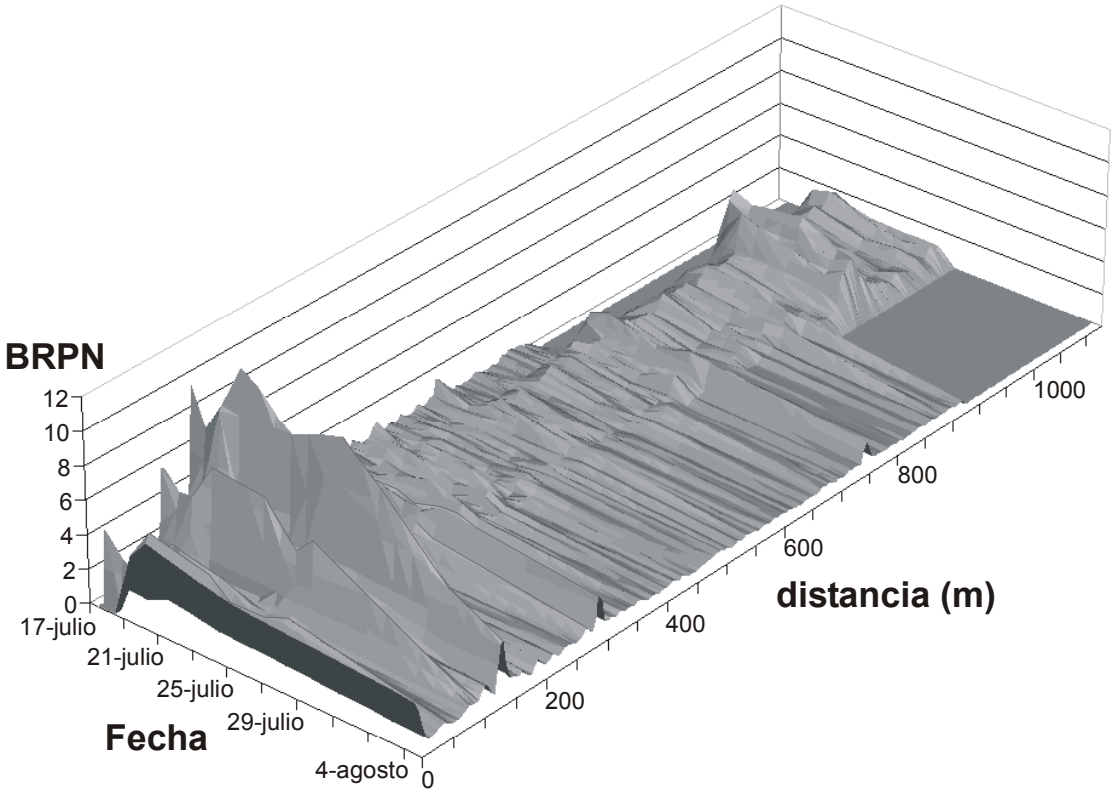

Figura 5-16 Representación tridimensional en espacio-tiempo de la variación del índice *BRPN* (escala lineal) obtenido de los registros de georradar de los días 17, 19, 20, 23, 25, 26 de julio y 4 de agosto de 2003 en el perfil C1-C6 en Hansbreen.

Los altos valores en el *BRPN* entre 150 y 200 m pueden interpretarse como indicador de la presencia de agua en la interfaz hielo-lecho, que muestra una leve depresión en esa área (Figura 3-55, abajo), igual que ocurre en 1020 m.

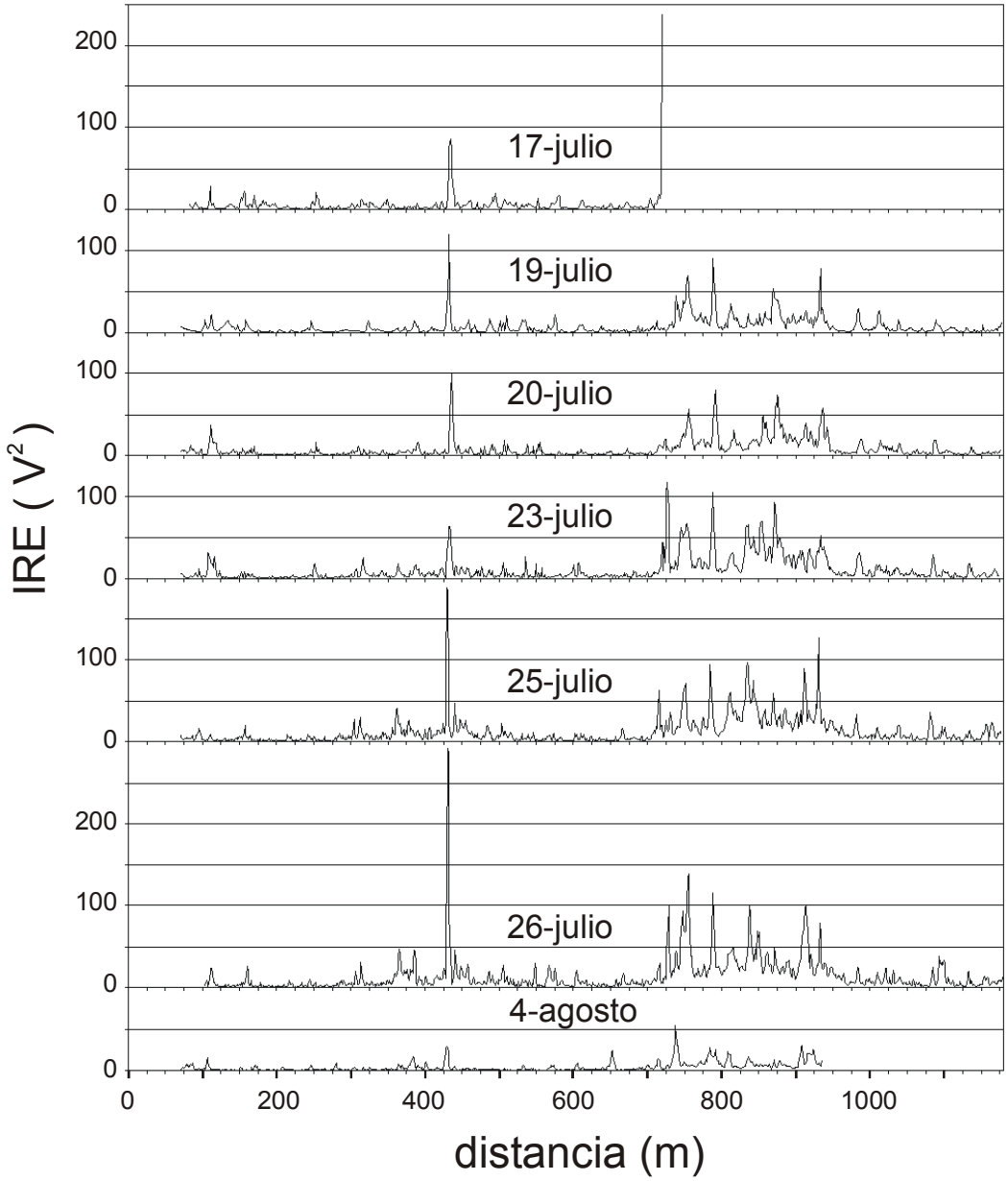

Figura 5-17 Variación del índice *IRE* (escala lineal) obtenido de los registros de georradar de los días 17, 19, 20, 23, 25, 26 de julio y 4 de agosto de 2003 en el perfil C1-C6 en Hansbreen.

Por su parte, las gráficas del *IRE* muestran una zona bien definida de altos valores entre *ca.* 725 y 900 m, donde el *BRPN* es relativamente constante y de bajo valor. Si se observa el perfil procesado, se aprecia en esta zona un

gran sistema de drenaje bien desarrollado (manifestado en superficie como un conjunto de grietas y *moulins*), que penetra en el estrato frío.

Hay una variación espacial en el *BRPN* sólo visible si se observa la Figura 5-15 (con escala lineal), con altos valores a ambos lados del sistema de drenaje. Esto puede ser interpretado como sigue. Los altos valores de *IRE* suponen grandes pérdidas en la energía de la señal, las reflexiones (y difracciones) provocadas por la presencia de agua y por todas las interfaces internas que el sistema de drenaje genera. Pero esto hace que el pulso llegue muy atenuado al lecho y además, tras su reflexión, debe atravesar nuevamente esta zona. Así, el *BRPN* resulta extremadamente bajo, a pesar de que pueda haber agua en el lecho. Sin embargo, el agua en el lecho se extiende lateralmente ocupando mayores extensiones que las del sistema de drenaje. Por ello, en los costados de éste, donde el *IRE* disminuye, el *BRPN* aparece muy elevado.

En la Figura 4-11 o en la Figura 3-55, se aprecian grietas en la zona superficial, a distancias de *ca.* 300 m y 430 m. El *IRE* presenta valores bajos en las primeras, con alto *BRPN*, mientras que en las segundas aparece la situación opuesta, con grandes valores de *IRE* y bajo *BRPN*, lo que puede ser explicado por la presencia o no de agua. La acumulación de agua en las grietas situadas a 430 m explica el altísimo valor de *IRE* ; el *BRPN* se eleva moderadamente a ambos lados, indicando drenaje y concentración de agua en el lecho. La situación es otra en la grieta situada a 300 m. El alto *BRPN* indica una importante presencia de agua en lecho, pero la grieta no se

aprecia en el *IRE*, por no contener agua, lo que puede indicar que es un buen cauce de drenaje hasta el lecho.

El registro de temperaturas que se tomó facilita una explicación de la variación temporal de estos índices, dado que según la temperatura decrecía en los primeros días de registro, se producía un incremento en el *BRPN* y en el *IRE*. El calentamiento, sin embargo, produjo la fusión superficial, lo que provocó que en agosto apareciera un repentino descenso de ambos índices. Esto no se debe sino a un efecto superficial provocado por la acumulación de agua en la interfaz aire-hielo. Al estar el georradar a *ca.* 30 cm de la superficie, ésta se convirtió en una interfaz aire-agua, aumentando su coeficiente de reflexión y disminuyendo la energía de la onda que la atravesaba.

Cabe señalar que en un glaciar politérmico, como es Hansbreen, al contrario que ocurre con los glaciares fríos (*e.g.*, Gades *et al.*, 2000), los índices energéticos en el interior del medio glaciar son muy superiores a los de reflexión en el lecho (Figura 4-12 y Figura 4-13), debido a las perturbaciones que produce su contenido en agua.

5.3.2 RWV y *W* en el glaciar Hansbreen

Para realizar este estudio se ha hecho uso de dos métodos basados en mediciones CMP: el método gráfico por ajuste en el plano X^2-T^2 y el espectro de velocidades (análisis de semblanza). Estos métodos han sido descrito en §4.1.2.2.

Se realizaron varias mediciones CMP en Hansbreen durante los días 23 de julio y 7 de agosto de 2003 (CMP-1 y CMP-3), y el 11 de abril de 2004 (CMP-4). Las medidas se realizaron en el punto P indicado en la Figura 5-4. Para realizar estas medidas se utilizó un georradar VIRL-6, con un sistema de sincronización por fibra óptica y antenas resistivamente cargadas al 80%. El intervalo de muestreo de este equipo es de $2'5\ \mathrm{ns}$. El incremento de *offset* entre trazas fue de $10\ \mathrm{m}$, hasta llegar a una separación máxima entre antenas de $480\ \mathrm{m}$. Se midió con DGPS la variación de altitud en la superficie del perfil, para corregir con ella los datos al estimar la RWV.

En la Figura 4-4 se ha mostrado uno de los registros mencionados (CMP-1), con 5 eventos señalados: la onda aérea, W1, utilizada para estimar el retardo de la fibra óptica y el sistema de sincronización; la onda directa por el estrato superficial, W2; y las reflexiones en diferentes interfaces, W3 y W4, y en el lecho, W5, utilizadas para estimar las RWV en el hielo templado y frío.

El primer método utilizado ha sido descrito en §4.1.2, teniendo en cuenta la diferencia de buzamientos entre el lecho y la superficie (β) (Gardner, 1947; Levin, 1971; Yilmaz, 1987, §3.2.3),

$$T^2 = \left[(x \cos\beta)^2 + (2d)^2 \right] / v^2 \quad , \tag{5.1}$$

cuyos parámetros se han definido en la Figura 2-19.

En nuestro caso, la superficie del glaciar tiene un desnivel de 10 m a lo largo de la sección CMP, de acuerdo con los datos DGPS. Los tiempos medidos (TWT) se han corregido con estos cambios de altitud (correcciones estáticas por variación topográfica), calculando, para cada par de puntos de medida (mismo *offset* del CMP), la suma de los desniveles de cada punto respecto al más bajo del perfil, dividida por la RWV en la onda directa por superficie.

Se corrige también el retardo en la fibra óptica y el sistema de sincronismo, estimado a partir de la onda directa, para así obtener el origen de tiempos.

Una vez realizadas estas correcciones, y utilizando la representación X^2-T^2, las reflexiones hiperbólicas en X-T (expresión anterior) se transforman ahora en rectas, como se ha explicado en §4.1.2.2. Por ajuste de los datos de campo mediante mínimos cuadrados se obtienen los valores de v y d, para cada reflector.

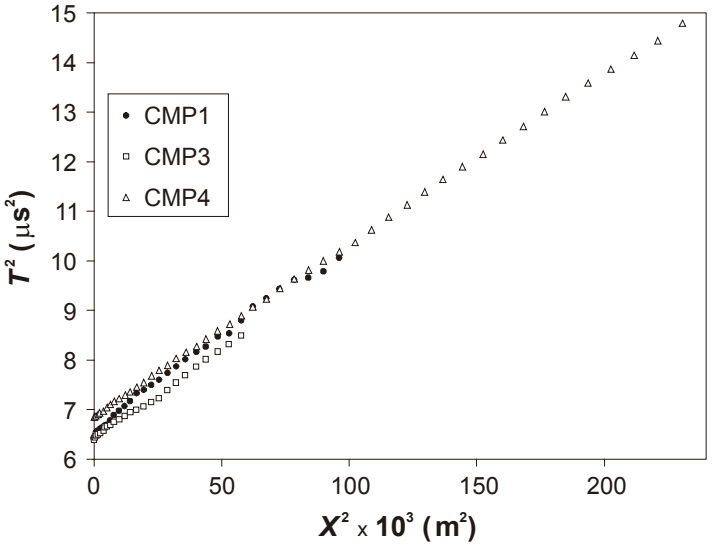

Figura 5-18 Diagrama X^2-T^2 para las reflexiones en el lecho (W5).

En la Figura 5-18 se muestra un ejemplo del cálculo realizado con el reflector W5 (lecho), para las tres medidas, CMP-1, CMP-3 y CMP-4. Se han obtenido

gráficas similares con W3 y W4. El parámetro R^2 en todos los ajustes ha sido superior a 0'99.

De acuerdo con (5.1), la recta obtenida es

$$T^2 = x^2 \left(\frac{\cos\beta}{v} \right)^2 + \left(\frac{2d}{v} \right)^2 . \qquad (5.2)$$

El valor de β ha sido estimado a partir de los perfiles de georradar.

Las velocidades así obtenidas, *i.e.*, la velocidad de la onda directa en el estrato superficial W2 (v_{dir}), las velocidades medias en los estratos comprendidos entre la superficie y cada uno de los reflectores, definidos por W3 (v_1) y W4 (v_2), y la velocidad media hasta el lecho (v_{b}), se muestran en la Tabla 6, donde además se incluyen las profundidades (d) que a partir de aquéllas se obtiene para cada reflector.

Onda	**Parámetro**	**CMP-1 23/07/2003**	**CMP-3 7/08/2003**	**CMP-4 11/04/2004**
W2 onda directa	v_{dir}	169'7	169'5	171'2
W3 reflector interno 1	v_1 d_1	168'6 91'3	170'0 91'2	171'3 86'6
W4 reflector interno 2	v_2 d_2	161'3 161'5	176'2 175'8	173'8 132'7
W5 reflexión en lecho	v_{b} d_{b}	162'1 207'8	168'2 213'2	170'0 223'1

Tabla 6 Velocidades medias ($\mathrm{m}\,\mu\mathrm{s}^{-1}$) y profundidades (m) obtenidas de los registros CMP en Hansbreen.

Para determinar v y d se ha realizado también un análisis de semblanza, como ha quedado definido en §4.1.2.2. El resultado obtenido de este análisis se muestra en la Figura 5-19.

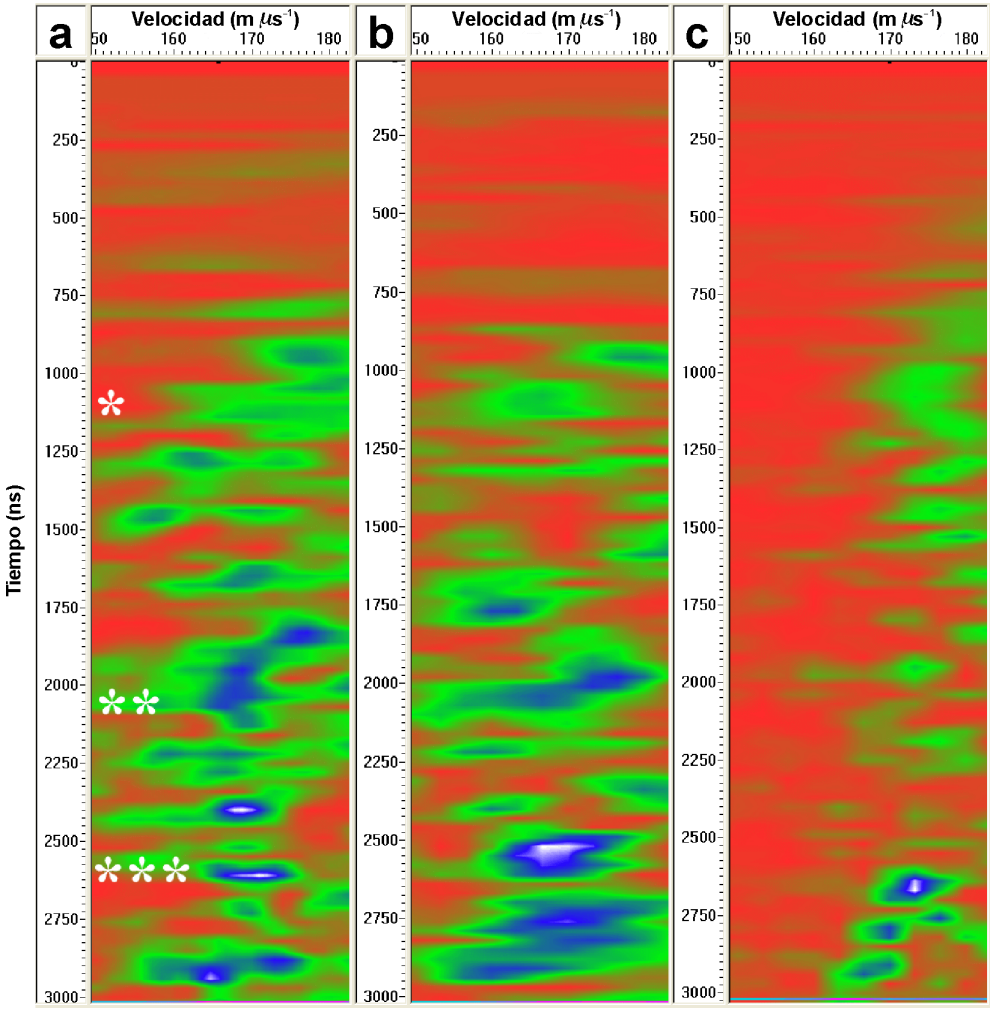

Figura 5-19 Espectro de velocidades por análisis de semblanza para (a) CMP-1, del 23 de julio de 2003; (b) CMP-3, del 7 de agosto de 2003; y (c) CMP-4, del 11 de abril de 2004. (*) indica el TWT al reflector 1 , (**) al reflector 2, y (***) al lecho.

En él puede apreciarse cómo las velocidades descienden en la zona inferior según avanza el verano (CMP3) y cómo crecen al medirlas en primavera. Estos efectos se explican por el cambio en el contenido en agua en el glaciar según la estación del año, como se analiza a continuación.

Para obtener el contenido en agua en diferentes estratos del glaciar se ha hecho uso de la expresión (4.59), donde, indicando con los subíndices AB el intervalo entre los reflectores A y B, queda

$$W_{AB} = \frac{(c/v_{AB})^{2/3} - \varepsilon_i^{1/3}}{\varepsilon_w^{1/3} - \varepsilon_i^{1/3}} \quad , \tag{5.3}$$

con $\varepsilon_i = 3'19$ y $\varepsilon_w = 86$, a 0ºC.

Las velocidades v_{AB} en cada estrato se han calculado de varias maneras:

- Como media de las obtenidas con el registro CMP en el intervalo que comprende el estrato

  $$v_{AB} = 2\,(d_B - d_A)\,/\,(t_B - t_A) \quad , \tag{5.4}$$

  donde d_k se obtiene del corte con el eje de ordenadas, en el ajuste X^2-T^2 realizado para el reflector *k*-ésimo del registro CMP (Figura 4-5), y t_k es la medida en el origen del registro CMP sobre dicho reflector (TWT).
- Aplicando la fórmula de Dix, (4.10), que, rescrita con el criterio anterior, y distinguiéndola con una D en el subíndice, queda

  $$v_{\text{D-AB}}^2 = (v_{\text{B}}^2\, t_{\text{B}} - v_{\text{A}}^2\, t_{\text{A}})\,/\,(t_{\text{B}} - t_{\text{A}}) \quad . \tag{5.5}$$

  Las velocidades desde la superficie hasta el reflector *k*-ésimo (v_k) necesarias para esta expresión se han obtenido, además, tanto del análisis X^2-T^2 como del análisis de semblanza.

Para el cálculo de *W* se utiliza la velocidad de Dix, generada, como su autor indica (Dix, 1955), a partir de las obtenidas desde superficie hasta cada estrato en el análisis X^2-T^2.

Para cada estrato definido entre la superficie (s), los reflectores 1 y 2, y el lecho (b) se ha calculado: la velocidad v_{AB} obtenida de (5.4); la velocidad de Dix, $v_{\text{D-}AB}$, obtenida a partir del análisis X^2-T^2 (CMP) y a partir del análisis de semblanza (Semb); el espesor del estrato, H_{AB}, obtenido como diferencia de las profundidades (d) hasta cada reflector en la Tabla 6; y el contenido en agua en el estrato, W_{AB}, obtenido de aplicar (5.3) con $v_{\text{D-}AB}$:CMP. No se ha calculado el contenido en agua con otras velocidades, por su similitud. Los resultados obtenidos se muestran en la Tabla 7.

Estrato	**Parámetro**	**CMP-1 23/07/2003**	**CMP-3 7/08/2003**	**CMP-4 11/04/2004**
Superficie a Reflector 1	v_{s1}	168'6	170'0	171'3
	$v_{\text{D-s1}}$:CMP··Semb	168'6 ·· 168	170'0 ·· 170	171'3 ·· 170
	H_{s1}	91'3	91'2	86'6
	W_{s1}	0	0	0
Reflector 1 a Reflector 2	v_{12}	152'7	183'4	178'7
	$v_{\text{D-12}}$:CMP··Semb	152'3 ·· 153	183'1 ·· 183	178'6 ·· 180
	H_{12}	70'2	84'6	46'1
	W_{12}	3'4	0	0
Reflector 2 a Lecho	v_{2b}	165	138'6	164'7
	$v_{\text{D-2b}}$:CMP··Semb	164'9 ·· 165	134'5 ·· 140	164'6 ·· 167
	H_{2b}	46'3	37'4	90'4
	W_{2b}	0'6	8	0'7
Reflector 1 a Lecho	v_{1b}	157'3	166'9	169'2
	$v_{\text{D-1b}}$:CMP··Semb	157'2 ·· 157	166'9 ·· 167	169'2 ·· 169
	H_{1b}	116'5	122	136'5
	W_{1b}	2'3	0'2	0

Tabla 7 Valor por intervalo, en Hansbreen, de: velocidad media, v_{AB}; velocidad rms, $v_{\text{D-}AB}$ (m μs^{-1}), a partir de las velocidades obtenidas por regresión en X^2-T^2 (CMP), o por análisis de semblanza (Semb); espesor, H_{AB} (m); y contenido en agua W_{AB} (%) [mediante (5.3)], a partir de las velocidades $v_{\text{D-}AB}$:CMP, obtenidas del análisis X^2-T^2.

El uso de la expresión (5.3) supone la ausencia de aire en el medio, que en tal caso, estaría saturado de agua. Teniendo en cuenta las limitaciones indicadas en §4.2.2, no puede utilizarse esta expresión si las velocidades superan el valor del hielo puro, *ca.* 168 m μs^{-1}. Los valores nulos de contenido en agua obtenidos en la Tabla 7 lo son por su resultado negativo.

Pueden obtenerse resultados más realistas usando (4.53) en su forma (4.55). Rescribiendo esta última con la nomenclatura de intervalos utilizada, queda

$$W_{AB} = \frac{(c/v_{AB})^{2/3} - (c/v_d)^{2/3}}{\varepsilon_w^{1/3} - (c/v_d)^{2/3}} \quad . \tag{5.6}$$

Si como estimación del valor de la velocidad en medio seco, v_d, se toma la del estrato frío en la medición de primavera, que puede obtenerse de $v_{\text{D-12}}$:CMP en la Tabla 7, se obtienen los resultados que se muestran en la Tabla 8.

Parámetro	**CMP-1 23/07/2003**	**CMP-3 7/08/2003**	**CMP-4 11/04/2004**
W_{s1}	1'8	1'6	1'3
W_{12}	5'3	0	0
W_{2b}	2'6	9'8	2'6
W_{1b}	4'2	2'2	1'7

Tabla 8 Valores del contenido en agua W_{AB} (%) por intervalo, en Hansbreen [mediante (5.6)].

Nótese que el uso de esta velocidad supone que en la expresión de Looyenga se utilice $\varepsilon_d = (c/v_d)^2 = (300/178'6)^2 = 2'82$, en lugar de $\varepsilon_i = 3'19$.

La mayor velocidad obtenida durante la medida de agosto (CMP-3) puede interpretarse como un aumento de la proporción de aire en el hielo, motivado por la presencia de canales de drenaje, más abiertos al final del verano, como ya se ha deducido a partir de la observación de los índices energéticos reflectivos, en el apartado anterior.

En cualquier caso, aunque sería mejor medida de la permitividad o de la RWV en el medio seco la extraída de un testigo de hielo[66], la estimación realizada en el cálculo del contenido en agua en la Tabla 8 supone una mejora respecto de la suposición de medio saturado, utilizada en el cálculo para la Tabla 13.

A la vista de los resultados, se observa una gran variación del contenido en agua a lo largo del tiempo. En las tablas obtenidas se puede apreciar una redistribución del agua a lo largo del verano en el estrato templado (inferior), que se observa también en el análisis de la semblanza (Figura 5-19). La mayor parte del agua se concentra en la parte superior del estrato templado el 23 de julio, mientras que para el 7 de agosto la mayor concentración se encuentra ya en su parte inferior, donde se mantiene el agua presente en la primavera (11 de abril). Este tipo de redistribución ha sido observada ya en Hansbreen durante el verano de 1999 (Pälli *et al.*, 2003), mostrando variaciones temporales en la RWV y en el contenido en agua en un *moulin* cercano a nuestro punto de medida CMP.

[66] A partir de él, se pueden estimar los parámetros en el medio seco en diferentes profundidades, por métodos que aquí no se valoran, como puedan ser la extracción del agua, la congelación, etc.

5.3.3 RWV y *W* en el glaciar Hurd

El estudio de las velocidades en el glaciar Hurd se ha realizado por dos métodos: a través de medidas CMP y estudiando las hipérbolas de difracción en perfiles de georradar.

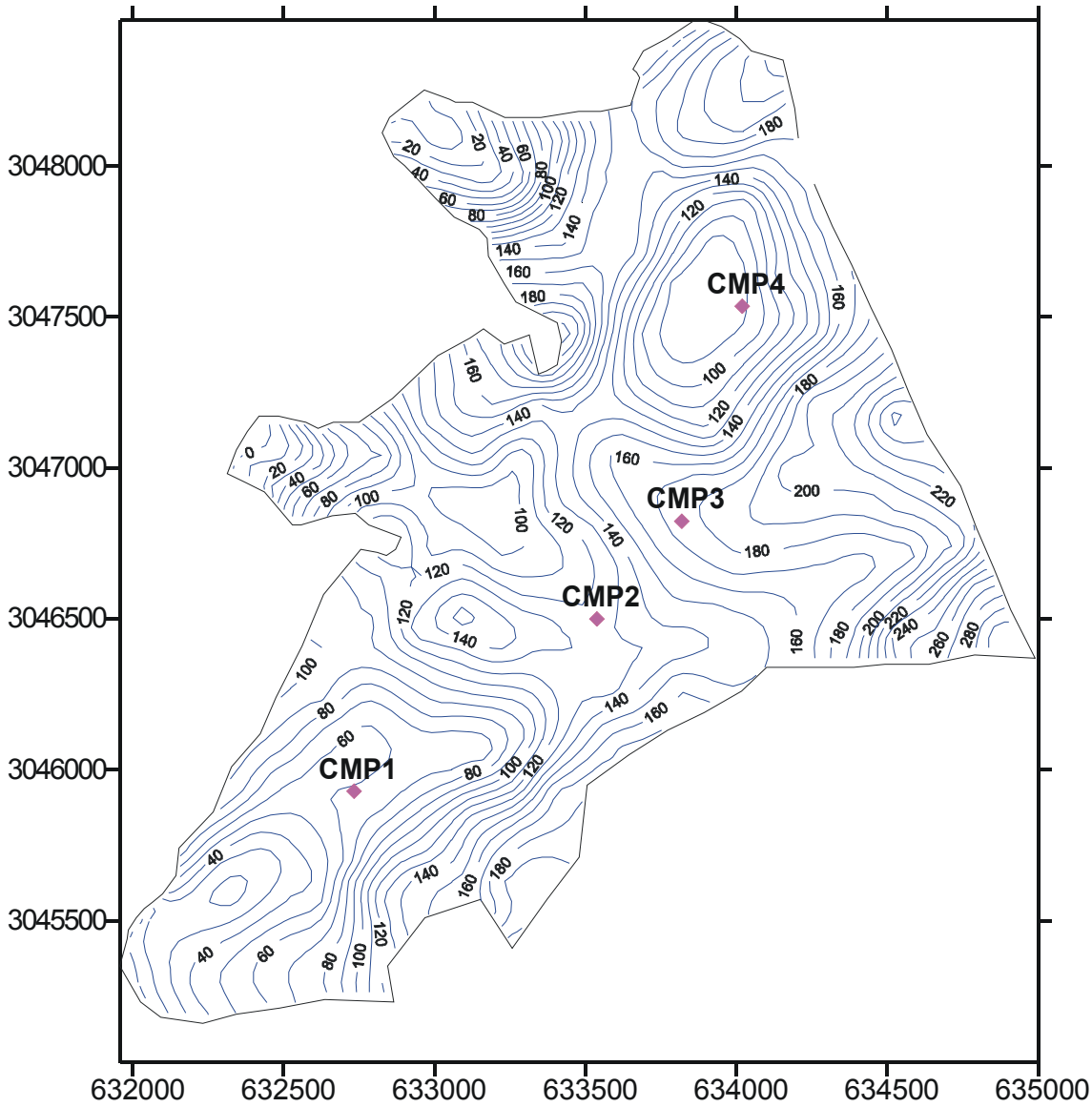

Figura 5-20 Ubicación de los puntos de medida CMP en el glaciar Hurd. Se muestran sobre la topografía del lecho.

Los días 10, 11, 12 y 15 de diciembre de 2003 se realizaron cuatro mediciones CMP en el glaciar Hurd. Las medidas se realizaron, en los puntos CMP-4, CMP-3, CMP-2 y CMP-1, respectivamente, localizados donde se indica en la Figura 5-20. Para realizar estas medidas se utilizó un georradar VIRL-6, con un sistema de sincronización por fibra óptica y antenas resistivamente cargadas al 80%. El intervalo de muestreo de este equipo es de 2'5 ns. Los registros CMP se componen de trazas separadas 10 m, hasta llegar a 480 m. La variación de altitud en la superficie del perfil fue medida con DGPS, para corregir con ella los datos en la estimación de la RWV.

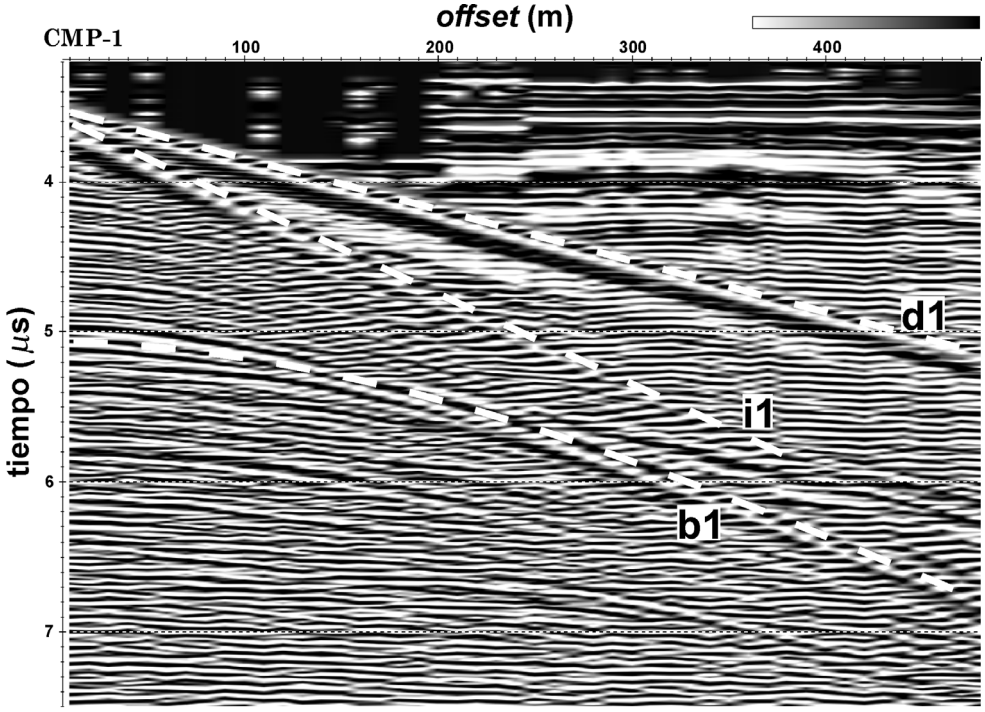

Figura 5-21 Registro CMP-1 obtenido el 15 de diciembre de 2003 en el glaciar Hurd.

En la Figura 5-21 se muestra uno de los registros CMP obtenidos (CMP-1), donde se ha marcado la onda aérea directa (d1), que facilita la estimación del retardo en el sistema de sincronización por fibra óptica, la onda directa a través del estrato más superficial (i1) y la reflexión en el lecho (b1).

De los registros CMP se han escogido dos reflectores internos, además de la onda directa y la reflexión en el lecho. Una vez realizadas las correcciones estáticas por superficie detalladas en §5.3.2, y haciendo uso de la expresión (5.2), se han obteniendo los valores indicados en la Tabla 9.

Onda	**Parámetro**	**CMP-1**	**CMP-3**	**CMP-4**
onda directa	v_{dir}	166'5	-	167'6
reflector interno 1	v_1 d_1	166'8 50'8	169'5 45'9	169'4 105'7
reflector interno 2	v_2 d_2	167'2 85'2	167'6 102'6	167'4 133'4
reflexión en lecho	v_b d_b	165'3 124'3	176'4 121'7	168'0 198'9

Tabla 9 Velocidades medias ($\mathrm{m}\,\mu\mathrm{s}^{-1}$) y profundidades (m) obtenidas de los registros CMP en el glaciar Hurd.

El registro CMP-2 no se ha utilizado, por errores en las medidas, y en el registro CMP-3 no aparece la onda directa con nitidez.

A partir de estos valores se procede de manera análoga a la ya desarrollada y utilizada en el apartado anterior. Haciendo uso de la expresión de Dix, (5.5), se obtienen las velocidades en los intervalos (estratos); el contenido en agua en este glaciar templado se calcula a partir de la ecuación (5.3), en la que se ha supuesto que el contenido en agua satura el medio. Los valores así obtenidos se indican en la Tabla 10.

Estrato	Parámetro	CMP-1	CMP-3	CMP-4
Superficie a Reflector 1	$v_{\text{D-s1}}$:CMP	166'8	169'5	169'4
	H_{s1}	50'8	45'9	105'7
	W_{s1}	0'2	0	0
Reflector 1 a Reflector 2	$v_{\text{D-12}}$:CMP	167'8	166'1	160'0
	H_{12}	34'4	56'7	27'7
	W_{12}	0'03	0'4	1'7
Reflector 2 a Lecho	$v_{\text{D-2b}}$:CMP	161'2	234'4	169'2
	H_{2b}	39'1	19'1	65'5
	W_{2b}	1'4	0	0
Reflector 1 a Lecho	$v_{\text{D-1b}}$:CMP	164'3	180'7	166'4
	H_{1b}	73'5	75'8	93'2
	W_{1b}	0'7	0	0'3

Tabla 10 Valores por intervalo de sus velocidades media, v_{AB}, y rms, $v_{\text{D-}AB}$ ($\text{m}\,\mu\text{s}^{-1}$), espesor, H_{AB} (m) y contenido en agua W_{AB} (%) [mediante (5.3)], en el glaciar Hurd.

Los valores tan altos de velocidad obtenidos en CMP-3 en los estratos cercanos al lecho (234'4 $\text{m}\,\mu\text{s}^{-1}$ y 180'7 $\text{m}\,\mu\text{s}^{-1}$), se explican por la presencia de aire, probablemente asociado a canales del sistema de drenaje, lo que es coherente con los registros de georradar obtenidos y la pendiente en el lecho.

Nótese que los ceros en W se han obtenido como valores negativos, por superar la RWV el valor *ca.* 168 $\text{m}\,\mu\text{s}^{-1}$, límite de aplicabilidad de la expresión (5.3), para $\varepsilon_i = 3'19$, como se ha indicado en §4.2.2.

Procediendo de la misma manera que en el apartado anterior con Hansbreen, se realiza a continuación el estudio del contenido en agua a partir de la velocidad en medio seco [ecuación (5.6)]. La velocidad del medio seco debe estimarse, por ser éste un glaciar templado. Tampoco existen medidas de invierno a partir de las que realizar una estimación más certera.

Pero, dado que las medidas se realizaron los días 10 a 15 de diciembre, al comienzo de la estación estival, si se escoge como velocidad en medio seco la de los estratos que proporcionan contenido en agua nulo con el método anterior, se observa que, tras despreciar los valores de velocidad elevados, debidos a canales de drenaje, ya indicados, hay tres estratos, a diferentes profundidades y de diferentes espesores, cuya velocidad oscila entre 169'2 m μs^{-1} y 169'5 m μs^{-1}. En consecuencia, tomando como velocidad en el medio seco $v_d = 169'5$ m μs^{-1}, se obtiene los valores de contenido en agua que se indican en la Tabla 11.

Parámetro	CMP-1	CMP-3	CMP-4
W_{s1}	0'5	0	0
W_{12}	0'3	0'7	1'9
W_{2b}	1'7	-	0'1
W_{1b}	1'0	-	0'6

Tabla 11 Valores del contenido en agua W_{AB} (%) por intervalo, en el glaciar Hurd [mediante (5.6)].

Puede apreciarse que este segundo método, más realista, ha supuesto un incremento de *ca.* 3 décimas (%) en el contenido en agua en cada estrato. Sin embargo, si se comparan en Hansbreen los valores obtenidos en la Tabla 7 con los de la Tabla 8, se aprecia un incremento de *ca.* 2%. Esto es debido a la velocidad de referencia utilizada en la estimación del medio seco. En Hansbreen, por ser un glaciar politérmico, existe un estrato de hielo frío, sin embargo, en el glaciar Hurd, la elección de las velocidades más elevadas no garantizan que el medio esté seco. Así, a falta de medidas en medio seco, puede estimarse que los valores obtenidos en la Tabla 11 son inferiores a los reales, pudiendo llegar a ser dos puntos porcentuales más elevados.

Otro método de medida de la RWV consiste en el estudio de las hipérbolas de difracción en los perfiles de georradar.

Del estudio de los radargramas (antes de su migración) y despreciando las hipérbolas no simétricas (§4.1.1), se han valorado las velocidades en 16 hipérbolas de difracción, situadas en los puntos indicados en la Figura 5-22.

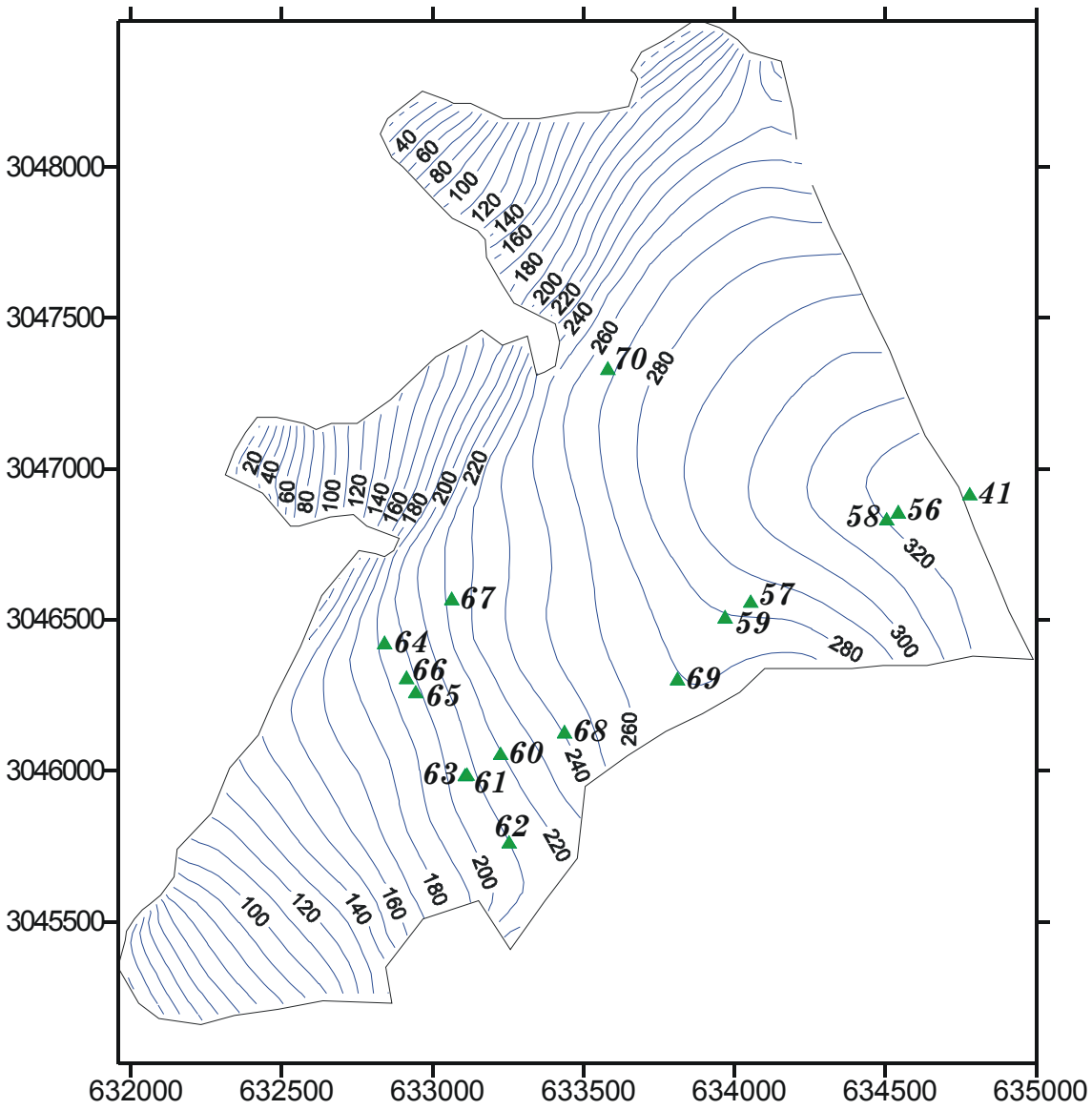

Figura 5-22 Ubicación de los 16 puntos de medida de RWV con hipérbolas de difracción en el glaciar Hurd. Se muestran numerados, junto a su posición (triángulo verde), sobre la topografía de la superficie del glaciar.

Los valores de RWV (v) y profundidad (h) medidos se muestran en la Tabla 12, que incluye también los contenidos en agua obtenidos por los dos métodos anteriores [ecuaciones (5.3) y (5.6)]. Como estimación de la velocidad en el medio seco se utiliza el valor antes usado ($v_d = 169'5\ \mathrm{m}\,\mu\mathrm{s}^{-1}$), cercano al máximo obtenido de las hipérbolas ($169\ \mathrm{m}\,\mu\mathrm{s}^{-1}$). Habitualmente, en cada punto de medida se localiza una hipérbola, por lo que no ha lugar hablar de estratos. Así, las velocidades son medias desde superficie, al igual que los contenidos en agua.

Punto	d (m)	v ($\mathrm{m}\,\mu\mathrm{s}^{-1}$)	W (%) [ε_i] [(5.3)]	W (%) [v_d] [(5.6)]
41	40	165	0'6	0'9
56	103	164	0'8	1'1
57	78	165	0'6	0'9
58	85	164	0'8	1'1
59	78	167	0'2	0'5
60	45	164	0'8	1'1
61	53	161	1'4	1'7
62	105	169	0	0'1
63	74	169	0	0'1
64	91	160	1'6	1'9
65	78	165	0'6	0'9
66	104	169	0	0'1
67	35	162	1'2	1'5
68	57	160	1'6	1'9
69	95	162	1'2	1'5
70	41	162	1'2	1'5

Tabla 12 Valores, obtenidos a partir de hipérbolas de difracción en el glaciar Hurd, de: RWV, v; profundidad, d; y contenido en agua, W (%), calculados con las expresiones (5.3) y (5.6).

Los datos obtenidos en Hurd son fruto de medidas realizadas al comienzo del período estival, por lo que no representan variaciones temporales, sino espaciales. A la vista de los resultados, se observa escasa dependencia del contenido en agua en el glaciar Hurd con la posición (Figura 5-23).

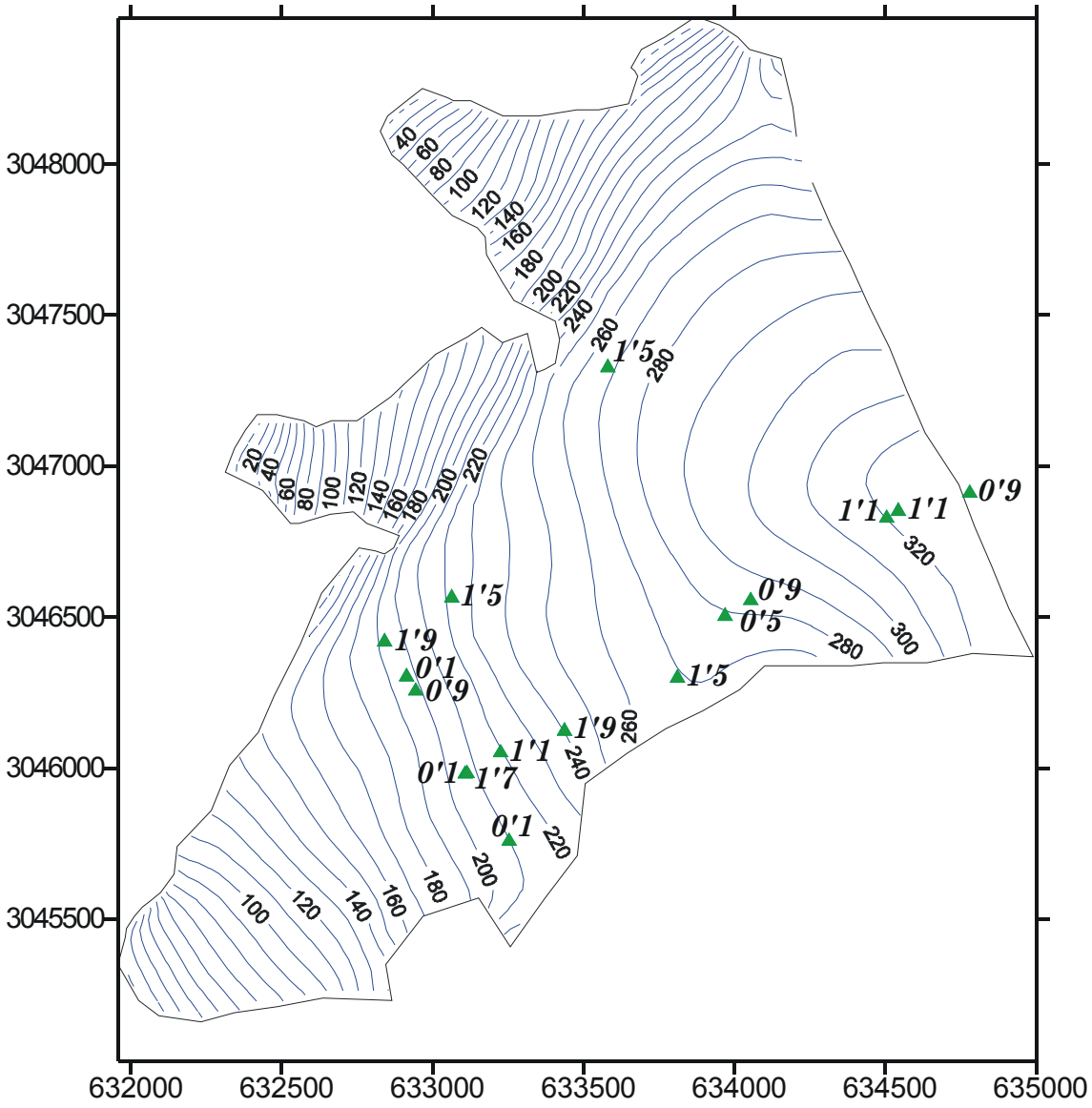

Figura 5-23 Localización de los 16 valores de W_{AB} (%) [ecuación (5.6)] obtenidos a partir de hipérbolas de difracción en el glaciar Hurd. Se muestran junto a su posición (triángulo verde), sobre la topografía de la superficie del glaciar.

Tampoco distribuyendo los datos por profundidades se obtiene correlación apreciable entre ésta y su RWV o su *W*.

Los valores del contenido en agua entre 0 y 2%, distribuidos uniformemente por el glaciar se explican por el carácter templado del glaciar Hurd. En las fechas en que ha sido medido, la fusión estival aún no ha sido importante, y el glaciar está totalmente cubierto por una capa de nieve (de diferente espesor en cada punto). A modo de ejemplo, puede indicarse que en la campaña 2001-02, la fusión hizo acto de presencia de manera repentina con el cambio de año (entre el 30 de diciembre y el 2 de enero). Esto fue observable a simple vista por la desaparición de esta capa de nieve en el glaciar (cuyo hielo está teñido de tonos grisáceos, por la presencia de cenizas volcánicas), el aumento en el caudal de los arroyos y el cambio de color del agua en la costa de la isla. Los contenidos en agua del glaciar, en consecuencia, deben crecer al final del verano. Pero nótese que cada año este efecto puede variar; en la campaña 2003-04, la capa de nieve no llegó a desaparecer hasta avanzado el mes de febrero.

Por otro lado, el uso de una u otra expresión de cálculo de *W* vuelve a provocar diferencias de 3 décimas porcentuales, por la baja velocidad utilizada como medio seco. Probablemente, los valores obtenidos sean inferiores a los reales, incluso en dos puntos, si se utiliza el valor $v_d = 178'6\,\mathrm{m}\,\mu\mathrm{s}^{-1}$, obtenido en Hansbreen, en lugar de $v_d = 169'5\,\mathrm{m}\,\mu\mathrm{s}^{-1}$, utilizado en Hurd, por falta de medida en hielo seco[67].

[67] Benjumea *et al*, (2003) miden una velocidad máxima de $174\,\mathrm{m}\,\mu\mathrm{s}^{-1}$ a partir de hipérbolas de difracción en el glaciar Johnsons, situado en la misma península Hurd (Figura 5-2), velocidad con la que la expresión (5.6) proporciona valores *ca.* de 1'1 puntos más (%) que los obtenidos por (5.3).

Diferentes autores (*e.g.*, Macheret *et al.*, 1993; Moore *et al.*, 1999; Murray *et al.*, 2000) obtienen los valores de W a través de las expresiones derivadas de la fórmula que Paren desarrolla para utilizar con nieve saturada de agua (§4.2.2). Con ánimo de establecer una comparación entre ellas, se introduce en la Figura 5-24 el resultado de las cuatro expresiones [(4.55), (4.59), (4.61) y (4.63)] sobre los datos de RWV obtenidos en el glaciar Hurd a través de hipérbolas de difracción (Tabla 12), con $v_d = 169'5\ \mathrm{m}\,\mu\mathrm{s}^{-1}$, $\varepsilon_i = 3'19$ y $\varepsilon_w = 86$.

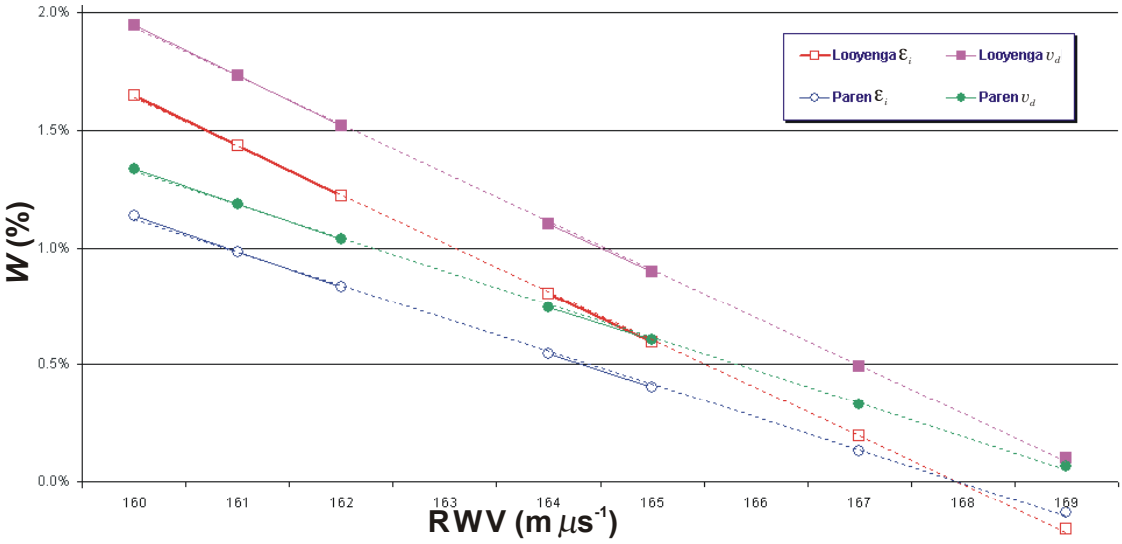

Figura 5-24 Comparación de los resultados de W (%) obtenidos mediante:
- Looyenga ε_i: expresión (4.59) [(5.3)];
- Looyenga v_d: expresión (4.55) [(5.6)];
- Paren ε_i: expresión (4.61);
- Paren v_d: expresión (4.63).

Nota: Los valores negativos son considerados nulos.

Teniendo presentes las ecuaciones indicadas y la Figura 5-24, se aprecia que en las fórmulas basadas en la expresión de Paren el valor de ε_w modifica la pendiente de las recta que relaciona el contenido en agua con las permitividades. Pero para los valores de ε_w entre 80 y 88 (Tabla 1), las expresiones derivadas de la de Paren ofrecen siempre resultados inferiores a las basadas en la expresión de Looyenga.

Pero el uso de $\varepsilon_i = 3'19$ (en lugar de ε_d) en las expresiones (4.59) [(5.3)] y (4.61) equivale a utilizar una velocidad en medio seco de $v_d \approx 168\ \mathrm{m}\,\mu\mathrm{s}^{-1}$, por lo que la expresión de Paren y la de Looyenga se cortan en $W = 0$, para ese valor. Sin embargo, las basadas en la medida de v_d ($\varepsilon_d = (c/v_d)^2$) lo hacen en el valor tomado para este parámetro, por lo que, cuanto mayor sea el valor utilizado en v_d, mayores serán los contenidos en agua obtenidos. Así, utilizando $v_d = 178'6\ \mathrm{m}\,\mu\mathrm{s}^{-1}$ (*i.e.*, $\varepsilon_d = 2'82$), como se ha utilizado en Hansbreen (donde se ha podido medir la velocidad en el estrato frío, *i.e.*, seco), se obtiene la Figura 5-25.

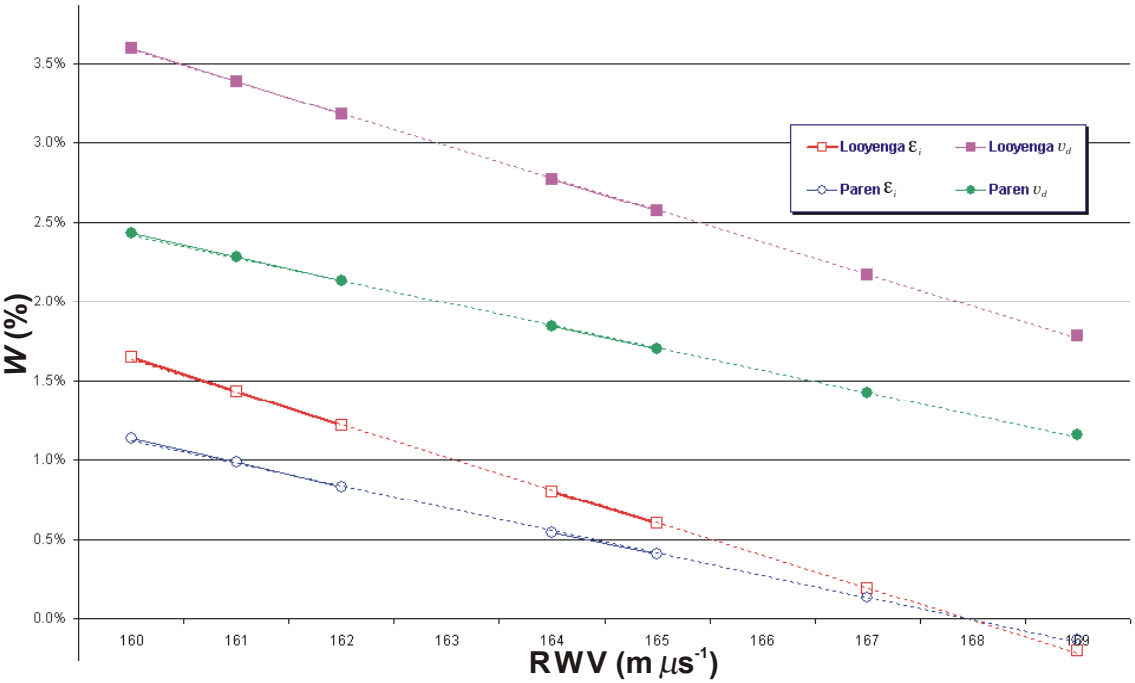

Figura 5-25 Comparación de los resultados de W (%) obtenidos mediante el uso de las expresiones indicadas en la Figura 5-24, pero con $v_d = 178'6\ \mathrm{m}\,\mu\mathrm{s}^{-1}$.

En ella se aprecia que la elección de las expresiones (4.59) [(5.3)] y (4.61) infravaloran el contenido en agua.

Capítulo 6

Régimen térmico de los glaciares

Existen mecanismos de transferencia y de generación de calor que se producen en la masa interna del glaciar (conducción, convección, calor de deformación, calor latente de fusión) e intercambios de calor y de masa entre el glaciar y el medio circundante (flujo geotérmico, intercambios energéticos con la atmósfera, ablación por fusión o sublimación, desprendimiento de témpanos o *icebergs*, desplazamiento de masa por el viento, acumulación por precipitaciones de nieve o lluvia, etc.). Además existen influencias mutuas entre la termomecánica de glaciares, la climatología, la meteorología (albedo, balance energético global, temperaturas medias, circulación atmosférica, etc.) y la oceanografía (volumen de hielo marino en el Ártico, circulación oceánica, nivel medio de los océanos, etc.). Todos estos mecanismos, unidos a la reología no lineal del hielo glaciar, complican el estudio del régimen termodinámico de los glaciares y de los grandes mantos de hielo (*ice sheets*).

6.1 Ecuación general de balance térmico

Es importante conocer la distribución de temperaturas de un glaciar, ya que la tasa de deformación del hielo crece rápidamente según éste se calienta, a la vez que se incrementa su contenido en agua, lo que, por otra parte, puede hacer crecer la presión de agua en el lecho y favorecer el deslizamiento del glaciar sobre él.

La evolución que un sistema sufre en búsqueda del equilibrio térmico de sus partículas está acompañada de un transporte de energía entre puntos de diferente temperatura, con o sin el desplazamiento de aquéllas. Este intercambio de temperatura supone una energía en tránsito, denominada calor (magnitud de naturaleza dinámica). Los mecanismos clásicos del transporte de calor enunciados por la física son la conducción (transporte de calor por agitación de partículas, sin desplazamiento de éstas), la convección (transporte de calor asociado al desplazamiento de partículas, con su energía térmica interna), y la radiación electromagnética (sin desplazamiento material, como en la conducción).

Se pretende establecer la ecuación que rige el transporte y generación del calor en los glaciares, como medio deformable, móvil e incompresible, por sus diferentes mecanismos[68]. Con ese objeto, se procede a estudiar la ecuación que rige el comportamiento del campo escalar de temperaturas del fluido, $T = T(\mathbf{r}, t)$.

[68] En un glaciar pueden despreciarse las transformaciones energéticas en energía cinética, y la energía interna puede estudiarse como meramente térmica.

Para ello consideramos un conjunto de partículas de hielo, que ocupan un volumen fluido $V_{(t)}$, variable y móvil a lo largo del tiempo, y que se encuentra limitado por una superficie cerrada $S_{(t)}$, igualmente variable (deformable) y móvil.

El estudio se realiza partiendo de dos formas equivalentes de expresar la tasa de variación de la energía térmica interna experimentada en este volumen $V_{(t)}$, que igualadas, generarán la ecuación buscada:

- la primera parte de la expresión de la energía térmica interna como función de la temperatura de sus partículas. Derivando ésta, se establece su tasa de variación temporal.
- como segunda expresión, se relaciona esta variación de la energía térmica interna con el flujo de calor entrante por la superficie cerrada $S_{(t)}$, debido al gradiente de temperaturas existente en el glaciar y al movimiento de la masa, al que se le añade el calor generado o perdido internamente por fuentes o sumideros de calor (*heat sources*) en dicho volumen, debido a mecanismos de recongelación de agua en la neviza (*refreezing of meltwater in firn*), fusión (*melting*), fricción (*sliding friction*), deformación de la masa de hielo (*ice deformation*), etc.

El método seguido consiste en obtener igualdades entre integrales triples en el volumen $V_{(t)}$, para así, dado que las igualdades deben cumplirse para cualquier volumen, igualar sus integrandos, simplificando las expresiones.

6.1.1 Variación de la energía térmica interna

Estudiemos la energía térmica interna por unidad de volumen e_I, en función de la energía interna por unidad de masa e_{mI} (en $\mathrm{J\,m^{-3}}$ y en $\mathrm{J\,kg^{-1}}$, respectivamente). En un fluido incompresible no hay transferencia entre la energía interna y la presión, por lo que

$$e_I = \rho \cdot e_{mI} = \rho\, C_p\, T \ , \tag{6.1}$$

donde,

- $C_p = C_p(\mathbf{r},t)$ es el calor específico del material, definido como la cantidad de energía necesaria para incrementar en un grado Celsius (o Kelvin) la temperatura de una masa unitaria de hielo, bajo presión constante. Puede considerarse C_p no constante[69] en principio, con unidades $\mathrm{J\ kg^{-1}K^{-1}}$.
- $\rho = cte$ es la densidad del material, con unidades $\mathrm{kg\ m^{-3}}$.
- $T = T(\mathbf{r},t)$ es la temperatura del medio, con unidades[70] K.

Extendiéndolo a todo el volumen, se obtiene la energía térmica interna de $V_{(t)}$, en J, que se expresa como

$$E_I \quad = \quad \iiint_{V_{(t)}} \rho\, C_p\, T\, dV \ . \tag{6.2}$$

---

[69] Depende del estado del material, hielo en este caso, que puede llegar a ser agua. Dado que se considera función de punto, tendrá dependencia también temporal, al variar las condiciones de cada punto con el tiempo (velocidades, calentamiento, etc.).

[70] La relación Kelvin-Celsius se establece mediante una constante aditiva de 273'16. Así, las variaciones de temperatura pueden expresarse igualmente en grados Celsius o Kelvin.

Su derivada temporal proporciona la tasa de variación de la energía térmica interna en $V_{(t)}$, a lo largo del tiempo, en J a^{-1},

$$\frac{dE_I}{dt} = \frac{d}{dt}\iiint_{V_{(t)}} \rho\, C_p\, T\, dV \ . \tag{6.3}$$

Aplicando el teorema de transporte de Reynolds (C.2)[71], queda

$$\frac{dE_I}{dt} = \frac{d}{dt}\iiint_{V_{(t)}} \rho\, C_p\, T\, dV = \iiint_{V_{(t)}} \left[\frac{d(\rho\, C_p\, T)}{dt} + (\rho\, C_p\, T)(\nabla\cdot\mathbf{u})\right] dV \ . \tag{6.4}$$

Se desarrolla ahora la derivada del integrando, como la derivada del producto $\rho\,(C_p\, T)$, para obtener nuevos términos más sencillos. Así, se obtiene

$$\frac{dE_I}{dt} = \iiint_{V_{(t)}} \left[\rho\ \frac{d(C_p\, T)}{dt} + (C_p\, T)\frac{d\rho}{dt} + (\rho C_p\, T)(\nabla\cdot\mathbf{u})\right] dV \ , \tag{6.5}$$

donde, agrupando los dos últimos términos del integrando, se puede establecer $e_{mI} = C_p\, T$ como factor común de una expresión cuyo valor resultará conocido:

$$\frac{dE_I}{dt} = \iiint_{V_{(t)}} \left[\rho\ \frac{d(C_p\, T)}{dt} + (C_p\, T)\left(\frac{d\rho}{dt} + \rho\,(\nabla\cdot\mathbf{u})\right)\right] dV \ . \tag{6.6}$$

Por la ecuación de continuidad (C.6), se sabe que se anula la suma de los dos términos de los que se ha extraído este factor común. Aplicando esta condición se obtiene

---

[71] con $A = A(\mathbf{r},t) = \rho\, C_p\, T = \rho\, C_p(\mathbf{r},t)\, T(\mathbf{r},t)$.

$$\frac{dE_I}{dt} = \iiint_{V_{(t)}} \rho \; \frac{d(C_p\, T)}{dt} \; dV \; . \tag{6.7}$$

Desarrollando la derivada material (C.1)[72] del integrando, queda

$$\frac{dE_I}{dt} = \iiint_{V_{(t)}} \rho \left[\frac{\partial(C_p\, T)}{\partial t} + \left(\mathbf{u} \cdot \nabla(C_p\, T) \right) \right] dV \; , \tag{6.8}$$

que representa la variación de la energía térmica interna en el volumen como la integral triple de dos términos: variación local en el punto (derivada temporal local) y término convectivo (la advección, cambiada de signo), debido a la velocidad del medio.

Como se explica en el Apéndice C, §C.5, una advección positiva produce un aumento en la temperatura local del punto, pero en la partícula móvil, la temperatura disminuye y pierde energía térmica interna. En este apartado se estudia la variación de energía interna en un sistema de partículas, no en un espacio fijo. De esta manera, la tasa de aumento en la energía térmica interna del conjunto móvil de partículas es igual a la que sufre el espacio que ocupan (término local), menos la advección debida al arrastre del material (la advección positiva supone reducción de dicha energía)

[72] con $A = A(\mathbf{r},t) = C_p\, T = C_p(\mathbf{r},t)\, T(\mathbf{r},t)$.

6.1.2 Flujo y fuentes de calor

Se ha estudiado la variación de la energía térmica interna de un conjunto de partículas limitado por la superficie $S_{(t)}$, que encierra al volumen $V_{(t)}$. Esta variación de la energía térmica interna se ha descompuesto en la variación local del campo y la variación debida a su desplazamiento con una determinada velocidad (advección).

Pero la variación de la energía térmica interna se produce con la entrada de calor del exterior de las partículas (flujo de energía a través de su frontera $S_{(t)}$), más la generación interna de calor (como transformación de otra energía). Esto proporciona otro modo de calcular dicha variación energética.

6.1.2.1 Flujo térmico conductivo

El flujo de calor que se introduce en el conjunto de partículas bajo estudio sólo puede deberse a los mecanismos de conducción térmica, o de radiación (basados en el flujo energético, y no en el transporte de masa), pero no a mecanismos convectivos (y por lo tanto tampoco de advección), que supondrían introducción o extracción de partículas. Por otro lado, se desprecian los efectos de los mecanismos de radiación en el glaciar, por su escasa repercusión. Así, se considera que el flujo de calor introducido en la frontera $S_{(t)}$ se debe exclusivamente a mecanismos de conducción térmica.

Se define la densidad de flujo térmico $\mathbf{j}$ como un vector, en la dirección de la propagación de la energía térmica que se transfiere por conducción entre dos puntos con diferente temperatura, en el sentido decreciente de temperaturas, cuyo módulo es igual al valor de la energía térmica transferida a través de una superficie unitaria plana, normal a dicha dirección, en la unidad de tiempo, y cuyas unidades son $\mathrm{J\ m^{-2} a^{-1}}$.

Para un amplio rango de temperaturas, se sabe por experiencia (Ley de Fourier) que la densidad de flujo térmico que se obtiene entre dos puntos por conducción es proporcional al gradiente de temperaturas existente entre ellos, con la dirección y el sentido de las temperaturas decrecientes (gradiente cambiado de signo), con constante de proporcionalidad $k = k(\mathbf{r},t)$, conocida como conductividad térmica (*thermal conductivity*), con unidades $\mathrm{J\ m^{-1}a^{-1}K^{-1}}$, *i.e.*,

$$\mathbf{j} = -k\,\nabla T \ . \tag{6.9}$$

La cantidad de calor que atraviesa por unidad de tiempo un elemento de superficie, suficientemente pequeño como para ser aproximado por un plano, es igual al producto escalar de la densidad de corriente por el vector normal a esta superficie, $\mathbf{dS}$. Si éste es positivo, habrá flujo neto saliente por la cara por la que sale el vector $\mathbf{dS}$; el flujo será entrante por dicha cara en caso contrario. Estudiamos el caso de una superficie cerrada $S_{(t)}$. Así, estableciendo como criterio que el vector normal a la superficie en cada punto, $\mathbf{dS}$, sea saliente de la misma, se obtendrá flujo neto saliente cuando la integral de superficie de la densidad de flujo extendida a toda la frontera cerrada $S_{(t)}$ sea positivo. Para obtener el flujo neto de calor entrante a través de dicha superficie cerrada $S_{(t)}$, se debe cambiar su signo. De este modo, el flujo entrante será

$$\Phi = \oiint_{S_{(t)}} (-\mathbf{j})\cdot\mathbf{dS} = \oiint_{S_{(t)}} k\,\nabla T\cdot\mathbf{dS} \ . \tag{6.10}$$

Por el teorema de la divergencia (C.10), esta integral de superficie se convierte en otra integral triple, extendida sobre el volumen encerrado $V_{(t)}$,

$$\Phi = \iiint_{V_{(t)}} \nabla\cdot(k\,\nabla T)\,dV \ . \tag{6.11}$$

6.1.2.2 Fuentes internas de calor

Las fuentes internas de calor no son mecanismos de generación espontánea de calor, sino de transformación de otros tipos de energía en calor. En el hielo del glaciar, destaca entre estos mecanismos la deformación del hielo, si bien existen otros, como la compactación de la neviza, la recongelación del agua fundida en la neviza, etc. En este término se pueden agrupar todos aquellos que se producen en el interior de la superficie $S_{(t)}$.

En ocasiones, también se agrupan en este término otras fuentes externas, como son el flujo geotérmico y la fricción con en el lecho, (*e.g.*, Paterson, 1994, p. 226). En este capítulo se pretende obtener una ecuación, que será posteriormente resuelta, de forma aproximada, con el método de elementos finitos (MEF), por lo que, si procede, las fuentes externas al glaciar o en sus fronteras se pueden utilizar como condiciones de contorno.

Denominemos Ψ a la tasa de calor generado internamente en la unidad de volumen, por unidad de tiempo, independientemente de cuáles sean sus causas. El calor interno generado por unidad de tiempo en el conjunto de partículas que forma el volumen $V_{(t)}$, será

$$Q_{\Psi} = \iiint_{V_{(t)}} \Psi \, dV \quad . \tag{6.12}$$

A continuación se estudian las dos fuentes internas de calor principales, que son la deformación del hielo cerca de la base y la recongelación del agua cerca de la superficie.

Para este mismo caso de estudio del balance térmico en los glaciares, puede encontrarse el análisis de otras fuentes de calor *e.g.*, en Paterson (1994, p. 226), así como análisis similares *e.g.*, en Hooke (1998, p. 67-68) o en van der Veen (1999, p. 177-179).

Deformación del hielo

La energía liberada en forma de calor en el proceso de deformación del hielo, por unidad de volumen y de tiempo, es el producto de la tasa de deformación por la tensión desviadora. Así,

$$\Psi_{\mathrm{D}} = \dot{\varepsilon}_{ij}\tau_{ij} = \dot{\varepsilon}_{xx}\tau_{xx} + \dot{\varepsilon}_{yy}\tau_{yy} + \dot{\varepsilon}_{zz}\tau_{zz} + 2(\dot{\varepsilon}_{xy}\tau_{xy} + \dot{\varepsilon}_{xz}\tau_{xz} + \dot{\varepsilon}_{yz}\tau_{yz}) = 2\dot{\varepsilon}\tau \ . \qquad (6.13)$$

donde $\dot{\varepsilon}$ y τ son, respectivamente, la tasa de deformación efectiva y la tensión desviadora efectiva.

Recongelación de agua

La tasa de calor producido por la congelación de agua, por unidad de volumen, se obtiene como el producto de la masa de agua fundida que se recongela por unidad de tiempo y volumen (M_{f}), por el calor latente de fusión del hielo (de congelación del agua) (L_{f}), *i.e.*,

$$\Psi_{\mathrm{C}} = L_{\mathrm{f}} M_{\mathrm{f}} \ , \qquad (6.14)$$

que puede aproximarse por

$$\Psi_{C} = L_{\mathrm{f}} \ \rho_{\mathrm{S}} \, F \, w_{\mathrm{S}} / l \ \ , \qquad (6.15)$$

donde w_S y ρ_S son, respectivamente, la componente vertical de la velocidad[73] y la densidad del medio en la zona superficial, donde se produce la recongelación, F es la fracción de fusión, entendida como la fracción de masa formada por congelación de agua, dentro de la capa anual de neviza y l es la profundidad de penetración máxima del agua fundida.

En esta expresión se asume que la distribución de agua recongelada en la capa de neviza es uniforme. El valor de F en función de la profundidad, puede medirse mediante testigos de hielo.

El valor de L_f es el máximo calor necesario o desprendido en el cambio de estado. Por tanto, esta expresión muestra una cota superior del valor real.

Si el agua que se congela no parte de la temperatura de congelación (porque sea de lluvia, por ejemplo), la expresión sí muestra el calor de cambio de estado (no ya una cota superior suya). Pero, además, debe aparecer un segundo término que represente el calor desprendido al descender su temperatura hasta el punto de congelación. Aún faltaría un pequeño tercer término, que represente el calor desprendido para que este agua, una vez recongelada, se enfríe hasta la temperatura del hielo de su entorno.

[73] w_s se conoce como componente vertical de la velocidad en la superficie, o velocidad vertical.

6.1.3 Ecuación general del balance térmico

La variación de la energía térmica interna en $V_{(t)}$, por unidad de tiempo, puede igualarse con la suma del flujo térmico entrante en su frontera, más el calor generado internamente por unidad de tiempo en el volumen.

$$\frac{dE_I}{dt} = \Phi + Q_\Psi \ . \tag{6.16}$$

En los anteriores apartados se han obtenido expresiones de cálculo de los términos de esta ecuación. Así, igualando el segundo miembro la expresión obtenida en (6.8), con la suma de los de (6.11) y (6.12), se tiene

$$\iiint_{V_{(t)}} \rho \left[\frac{\partial (C_p\, T)}{\partial t} + \left(\mathbf{u} \cdot \nabla (C_p\, T) \right) \right] dV = \iiint_{V_{(t)}} \nabla \cdot (k\, \nabla T)\, dV + \iiint_{V_{(t)}} \Psi\, dV \ . \tag{6.17}$$

Agrupando e igualando integrandos (debe cumplirse para todo $V_{(t)}$), se tiene

$$\rho \left[\frac{\partial (C_p\, T)}{\partial t} + \left(\mathbf{u} \cdot \nabla (C_p\, T) \right) \right] = \nabla \cdot (k\, \nabla T) + \Psi \ . \tag{6.18}$$

Al despejar en esta ecuación la variación temporal, queda

$$\rho \frac{\partial (C_p\, T)}{\partial t} = \nabla \cdot (k\, \nabla T) - \rho \left(\mathbf{u} \cdot \nabla (C_p\, T) \right) + \Psi \ . \tag{6.19}$$

En los términos del segundo miembro pueden distinguirse los debidos a la conducción (izquierda), a la advección (negativo del centro) y a las fuentes internas (derecha). No se ha considerado el calor generado en la propia frontera (*e.g.*, calor de rozamiento por deslizamiento sobre el lecho), ni por fuentes externas a ella (*e.g.*, calor geotérmico), que se incorporan, si procede, en forma de condiciones de contorno.

6.2 Ecuación del balance térmico en los glaciares

6.2.1 Dependencia de k y C_p con la temperatura

Tanto la conductividad térmica como el calor específico dependen de la temperatura. Sus valores pueden calcularse haciendo uso de las expresiones que Budd (1969) obtiene para el caso del hielo con densidad próxima a la del hielo puro:

$$k \approx 7'06\ 10^{-7} - 2'27\ 10^{-3}\, T + 3500\, T^2 \ , \tag{6.20}$$

$$C_p \approx 2120 + 10\, T + 0'10\, T^2 \ , \tag{6.21}$$

donde T se mide en grados Celsius, k se expresa en $\mathrm{J\,m^{-1}\,{}^{o}C^{-1}\,a^{-1}}$ y C_p se expresa en $\mathrm{J\,kg^{-1}\,{}^{o}C^{-1}}$.

6.2.2 Dependencia de k y C_p con la posición y el tiempo

En la ecuación general del balance térmico (6.19) tanto la conductividad térmica como el calor específico se han considerado variables en el espacio y en el tiempo. Se procede al estudio de estas variabilidades en el caso del hielo, para realizar a continuación las aproximaciones pertinentes en la ecuación del balance térmico.

Conductividad térmica

Como ya se ha indicado, la conductividad térmica k es función de la temperatura, por lo que, a través de ésta, puede depender de la posición. Así,

desarrollando por derivación del producto[74] el término conductivo del segundo miembro en la ecuación (6.19), puede expresarse como

$$\nabla \cdot (k\,\nabla T) = k\,\nabla \cdot \nabla T + \nabla k \cdot \nabla T = k\,\nabla^2 T + \nabla k \cdot \nabla T \ , \tag{6.22}$$

por lo que la ecuación (6.19) se transforma en

$$\rho \frac{\partial (C_p\,T)}{\partial t} = k\,\nabla^2 T + \nabla k \cdot \nabla T - \rho \left(\mathbf{u} \cdot \nabla (C_p\,T) \right) + \Psi \ . \tag{6.23}$$

Pero, dado que la variación de temperatura en el glaciar es baja y que la variación de k con la posición se debe al cambio de temperatura, el gradiente de la conductividad térmica resulta prácticamente nulo ($\nabla k \approx 0$), por lo que el segundo término se puede despreciar frente al primero. Así,

$$\rho \frac{\partial (C_p\,T)}{\partial t} = k\,\nabla^2 T - \rho \left(\mathbf{u} \cdot \nabla (C_p\,T) \right) + \Psi \ . \tag{6.24}$$

Calor específico

De manera semejante, dado que el calor específico depende sólo de la temperatura, puede considerarse una constante en el espacio y en el tiempo, y extraerlo de las derivaciones. Partiendo de la ecuación anterior, se obtiene

$$\rho\, C_p \frac{\partial T}{\partial t} = k\,\nabla^2 T - \rho\, C_p\, (\mathbf{u} \cdot \nabla T) + \Psi \ . \tag{6.25}$$

[74] $\nabla \cdot (A\,\mathbf{B}) = A\,(\nabla \cdot \mathbf{B}) + \nabla A \cdot \mathbf{B}$.

6.2.3 Ecuación del balance térmico en los glaciares

La expresión anterior se conoce como ecuación del balance térmico de los glaciares.

Dividiéndola por ρC_p, se obtiene su expresión como variación temporal de la temperatura en el glaciar

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho C_p} \nabla^2 T - \mathbf{u} \cdot \nabla T + \frac{\Psi}{\rho C_p} . \tag{6.26}$$

Y sin más que introducir la difusividad o coeficiente de difusión térmica del material (*thermal diffusivity*) $\kappa = k / \rho C_p$ ($\kappa = 37'2 \text{ m}^2 \text{a}^{-1}$ para el hielo a $T = -1\,^{\circ}\text{C}$; Hooke, 1998, contraportada), se obtiene

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T + (-\mathbf{u} \cdot \nabla T) + F , \tag{6.27}$$

donde se ha nombrado $F = \Psi / \rho C_p$.

En las tres expresiones anteriores el segundo miembro contiene los términos debidos a la conducción (izquierda), a la advección (negativo del centro) y a las fuentes internas (derecha), con las mismas consideraciones realizadas en (6.19). El incremento térmico interno (último término por la derecha) se obtendrá como se ha indicado en §6.1.2.2.

La ecuación que representa el estado estacionario térmico del glaciar se obtiene anulando la variación temporal de la temperatura ($\partial T / \partial t = 0$), por lo

que, a partir de (6.25), se obtiene la ecuación del balance térmico estacionario del glaciar

$$k\,\nabla^2 T \;-\rho\, C_p\,(\mathbf{u}\cdot\nabla T)\;+\;\Psi\;=0\;. \tag{6.28}$$

Dividiéndola por ρC_p e introduciendo las definiciones anteriores, se obtiene

$$\kappa\,\nabla^2 T\;-\mathbf{u}\cdot\nabla T\;+\;F\;=0\;. \tag{6.29}$$

En la Tabla 13 se muestran los valores habituales de los diferentes parámetros para el hielo puro a 0ºC, según Paterson (1994).

Calor específico	C_p	2097 J kg^{-1}K^{-1}
Calor latente de fusión	L_f	333'5 kJ kg^{-1}
Conductividad térmica	k	2'10 W m^{-1}K^{-1} 6'62 10^{7} J a^{-1}m^{-1}K^{-1}
Coeficiente de difusión térmica	κ	1'09 10^{-6} m^{2}s^{-1} 34'4 m^{2}a^{-1}
Densidad	ρ	0'917 Mg m^{-3}

Tabla 13 Tabla de valores de los parámetros del hielo puro que intervienen en la ecuación del balance térmico en glaciares, para 0ºC.
(a partir de Paterson, 1994, tabla 10.1).

6.3 Soluciones analíticas en modelos simplificados

Se pretende calcular en determinadas situaciones, relativamente sencillas, el campo de temperaturas como función de la profundidad (perfil de temperatura) que se obtiene como solución de la ecuación (6.27). Se analizan dos casos de los que, a través de hipótesis simplificadoras, se obtendrá una solución analítica de la ecuación correspondiente. Las hipótesis establecidas limitarán la validez de la solución a determinadas zonas del glaciar. Se analiza el perfil de temperaturas en régimen estacionario en el centro de un manto de hielo y el comportamiento en la zona superficial de neviza alejada de la divisoria.

El sistema de coordenadas que se utiliza se muestra en la Figura 6-1. El origen está en el lecho del glaciar, bajo la divisoria. Los ejes X e Y son horizontales, en la dirección de flujo y transversal a ésta, respectivamente y el Z es vertical y positivo en sentido ascendente. Los casos tratados se restringen al caso bidimensional (plano XZ).

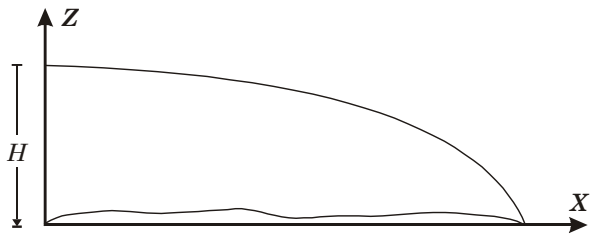

Figura 6-1 Sistema de coordenadas utilizado para los cálculos en el estado estacionario.

La descomposición que se utiliza para la velocidad del flujo de hielo en sus componentes es $\mathbf{u} = u\,\hat{\mathbf{i}} + v\,\hat{\mathbf{j}} + w\,\hat{\mathbf{k}}$.

6.3.1 Régimen estacionario de temperaturas en el centro de un manto de hielo

Para zonas cercanas a la divisoria, utilizaremos la solución de Robin (1955) para estado estacionario. Éste hizo las siguientes hipótesis simplificadoras:

1) Al tratarse de un modelo bidimensional en el plano *XZ*, se suponen nulas las variaciones con *y*.
2) El hielo está soldado al lecho por congelación, luego $w(0)=0$. Por lo tanto, las soluciones obtenidas serán aplicables sólo a glaciares fríos.
3) La difusión horizontal del calor es mucho menor que la vertical. Esto es más notable en las zonas cercanas a la divisoria, donde la simetría del campo de temperaturas contribuye a la verticalidad de sus gradientes:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial y} \approx 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla T = \frac{\partial T}{\partial z}\hat{\mathbf{k}} \quad , \qquad \nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \ .$$

4) En zonas cercanas a la divisoria de un manto de hielo la velocidad horizontal es muy baja, resultando despreciable la advección horizontal del calor ($\mathbf{u} = w\,\hat{\mathbf{k}}$).
5) El calor interno generado por deformación del hielo se incluye en los cálculos incrementando el flujo de calor geotérmico en el lecho del glaciar. Esto es factible por estar el lecho congelado y ser en las capas cercanas al lecho donde la tensión de cizalla es mayor. Además, en la divisoria las tasas de deformación son bajas, por lo que incluso es despreciable el calor interno generado por deformación ($\Psi_D = 0$).

Bajo estas hipótesis, la ecuación (6.27). se reduce a

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - w\frac{\partial T}{\partial z} \ . \tag{6.30}$$

Para que exista solución analítica debe estudiarse esta ecuación en régimen estacionario. Para ello se imponen dos hipótesis simplificadoras más

6) El manto de hielo se encuentra térmicamente en estado estacionario, por lo que su variación temporal será nula: $\partial T/\partial t = 0$.
7) Al estar en la zona de acumulación, el balance de masas neto es positivo, y se representa por su tasa de acumulación ($a > 0$).
8) Como consecuencia de la conservación de masa, y suponiendo que el gradiente de velocidad horizontal es independiente de la profundidad, la componente vertical de la velocidad es una función lineal de la profundidad (*e.g.*, Hooke, 1998, cap. 5). Además, al estar el lecho congelado (por 2), la función toma la forma $w(z) = w_S\, z/H$.

   Al estar en estado estacionario, la componente vertical de la velocidad en la superficie ($w(H) = w_S$) se compensa con la tasa de acumulación, *i.e.*, $w_S = -a$, de donde resulta $w(z) = -a\,z/H$.

En la Figura 6-2 se muestran los perfiles de las componentes horizontal y vertical de velocidad, relativos a su valor en la superficie, y en función de la fracción de distancia al lecho z/H, en situación de flujo laminar, según muestra van der Veen (1999).

En realidad, el perfil de la velocidad es aproximadamente lineal hasta una profundidad en torno al 80% del espesor del hielo, mientras que cerca del lecho lo hace más rápidamente. Por lo tanto, debe esperarse que el perfil lineal adoptado por Robin (1955) sobrestime la advección de calor en la parte alta del glaciar.

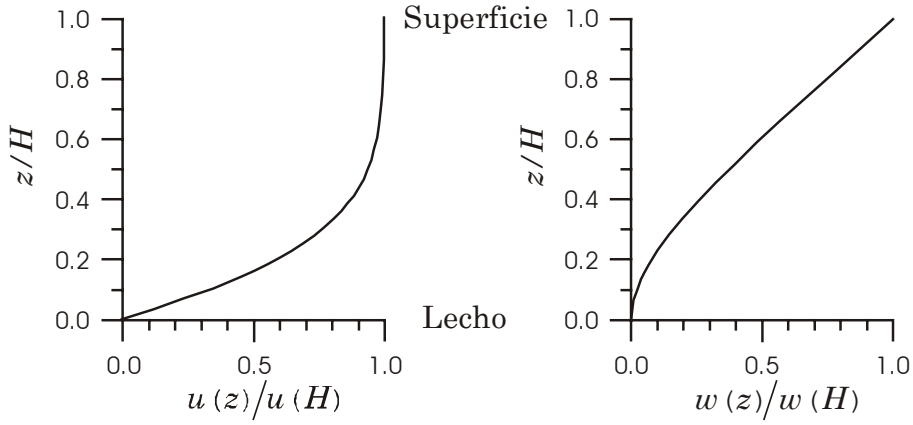

Figura 6-2 Componentes horizontal (izq.) y vertical (dcha.) de la velocidad, escaladas respecto a las de la velocidad en superficie, representadas en función de la fracción de distancia al lecho (z/H), para flujo laminar, utilizando n = 3 en la relación constitutiva. (modificado a partir de van der Veen, 1999, Fig. 5.2)

Con estas nuevas aproximaciones, la ecuación obtenida es

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \left(\frac{a}{\kappa H}\right) z \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \ . \tag{6.31}$$

Dado que la temperatura sólo resulta dependiente de z, pueden rescribirse sus derivadas parciales como totales, obteniendo

$$\frac{d^2 T}{dz^2} + \left(\frac{a}{\kappa H}\right) z \frac{dT}{dz} = 0 \ , \tag{6.32}$$

que representa la ecuación diferencial del régimen de temperaturas en estado estacionario en el centro de un manto de hielo. Esta ecuación tiene solución analítica, que a continuación se desarrolla.

6.3.1.1 Proceso analítico de resolución

La ecuación diferencial (6.32) admite solución analítica por doble integración, con sendas condiciones de contorno (*e.g.*, Hooke, 1998, cap. 6):

- la temperatura en la superficie ($z = H$) debe igualar a la temperatura del hielo en la superficie T_H;
- en el lecho ($z = 0$), el gradiente vertical de temperaturas debe igualar al gradiente geotérmico β_0. Este término puede corregirse para incluir en él el calor por deformación del hielo, y la posible fusión del hielo en el lecho.

Renombrando, por comodidad, en (6.32)

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \dfrac{a}{\kappa\, H} \\ \\ \beta = \dfrac{dT}{dz} \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\beta}{dz} + A\, z\, \beta = 0 \ , \tag{6.33}$$

que se resuelve separando variables:

$$\frac{1}{\beta}\frac{d\beta}{dz} = -A\, z \quad \Rightarrow \quad L\beta = -A\frac{z^2}{2} + C \quad \Rightarrow \quad \beta = e^C\, e^{-\frac{A}{2}z^2} \ . \tag{6.34}$$

Nombrando como β_0 al valor de β para $z = 0$,

$$\beta_0 = \beta(z = 0) = e^C\, e^0 = e^C \ . \tag{6.35}$$

Volviendo a (6.34) y reponiendo el valor de β definido en (6.33) se obtiene

$$\frac{dT}{dz} = \beta_0\, e^{-\frac{A}{2}z^2} \ . \tag{6.36}$$

Se integra nuevamente en z, realizando la integral definida desde una altura z cualquiera, hasta la superficie ($z = H$). Para ello, se renombra la variable z en el integrando, como h. Como límite superior de la integración de la temperatura se introduce la condición de contorno, que en este caso es $T(H) = T_H$, temperatura del hielo en la superficie. Así,

$$\int_{T(z)}^{T_H} dT = \beta_0 \int_z^H e^{-\frac{A}{2}h^2}\, dh \ . \tag{6.37}$$

Integrando el primer miembro y descomponiendo la segunda integral en diferencia de dos que parten desde el lecho, se obtiene

$$T_H - T(z) = \beta_0 \left[\int_0^H e^{-\frac{A}{2}h^2}\, dh - \int_0^z e^{-\frac{A}{2}h^2}\, dh \right] , \tag{6.38}$$

Para unificar parámetros y por comodidad, se renombra nuevamente, utilizando un parámetro cuadrático y, por lo tanto, modular:

$$\zeta^2 = \left| \frac{A}{2} \right| = \frac{|\, a \,|}{2\,\kappa\, H} \ . \tag{6.39}$$

La solución analítica depende del signo de la exponencial. El parámetro ζ^2 es modular, por lo que pierde el signo que tuviese a, y que sí tiene A. En una zona de acumulación, donde $a > 0$, se podrá hacer $\zeta^2 = A/2$, pero en una de ablación, donde $a < 0$, aparecería el signo, $\zeta^2 = -A/2$, y las exponenciales resultarían positivas, sin solución analítica. El caso que estudiamos, cerca de la divisoria, es zona de acumulación (hipótesis 7), por lo que se puede eliminar la forma modular de este parámetro

$$\zeta^2 = \frac{A}{2} = \frac{a}{2\,\kappa\, H} \ . \tag{6.40}$$

Así, para zonas con balance neto positivo, se obtiene

$$T_H - T(z) = \beta_0 \left[\int_0^H e^{-\zeta^2 h^2}\, dh - \int_0^z e^{-\zeta^2 h^2}\, dh \right] . \tag{6.41}$$

Realizando el siguiente cambio de variable,

$$\begin{cases} \zeta^2 h^2 = t^2 \;\Rightarrow\; \zeta h = t \;\Rightarrow\; dh = dt/\zeta \\ h = 0 \;\Rightarrow\; t = 0 \\ h = z \;\Rightarrow\; t = \zeta z \\ h = H \;\Rightarrow\; t = \zeta H \end{cases} . \tag{6.42}$$

e introduciendo el factor $\sqrt{\pi}/2$, por multiplicación y división, para obtener expresiones con forma de función error, se obtiene

$$T_H - T(z) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\beta_0}{\zeta} \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\zeta H} e^{-t^2}\, dt - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\zeta z} e^{-t^2}\, dt \right] , \tag{6.43}$$

que, utilizando la función error

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt \;, \tag{6.44}$$

y despejando $T(z)$, se obtiene

$$T(z) = T_H - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\beta_0}{\zeta} \left(erf(\zeta H) - erf(\zeta z) \right) , \tag{6.45}$$

con ζ definido a través de (6.40). La ecuación obtenida representa el balance térmico en el centro de un manto de hielo en estado estacionario, bajo las hipótesis simplificadoras impuestas.

Cálculo de T_H: condición de contorno en la superficie

Este valor es necesario para poder resolver el perfil de temperaturas (6.45).

Para independizar la temperatura del hielo en la superficie de las rápidas variaciones en la temperatura atmosférica, puede medirse en el hielo más cercano a la superficie, pero no afectado por los efectos superficiales. Hooke (1998, p. 73) indica que puede tomarse a una profundidad de 10m, donde, en zonas de acumulación, en el centro de un manto de hielo, cercanas a la divisoria, habitualmente[75] la temperatura suele ser muy próxima a la media anual de la temperatura atmosférica T_{a}.

Por ello, se redefine el valor de *H*, como el espesor de hielo comprendido desde el lecho hasta el punto en que se mida dicha temperatura $T_H = T_{\mathrm{a}}$, a unos $10\ \mathrm{m}$ de la superficie. Los resultados, por lo tanto, no tendrán en cuenta las temperaturas en esos últimos metros, donde, además, se producen otros efectos que aquí no se consideran.

Cálculo de β_0: condición de contorno en el lecho

La constante de integración β_0 se ha definido a partir de (6.33) y (6.35), obteniendo su expresión definitoria $\beta_0 = \beta(z=0) = dT(z=0)/dz$, que da pie a su interpretación como el gradiente (vertical) de temperaturas en el lecho.[76]

---

[75] Hooke indica algunas excepciones, entre las que cabe destacar, por su aplicación a este caso, la de las zonas de elevada altitud y latitud en mantos de hielo, donde el enfriamiento por radiación durante las despejadas noches rasas de invierno es mucho más efectivo que el calentamiento durante el día en verano. Por ello, a temperatura del hielo en esta zona puede encontrarse por debajo de la T_{a}.

[76] Pueden imponerse otros tipos de constantes de integración, *e.g.*, la temperatura en el lecho. Pero, como se explica más adelante, en general es más sencillo conocer el gradiente que la temperatura, que, sin embargo, es una condición de contorno útil cuando se considera fusión en el lecho.

Necesitamos, por tanto, calcular el valor de dicho gradiente de temperaturas en el lecho, que en general se hace coincidir con el gradiente geotérmico.

A- Valor de β_0 sin fusión en el lecho β_{0G}

Bajo el supuesto de que el glaciar se encuentra en estado estacionario sobre un lecho horizontal, sin producción de calor interno por deformación (despreciable, debido a las pequeñas deformaciones), ni advección en el lecho, por tener velocidad nula con el lecho congelado, puede asegurarse que todo y sólo el flujo geotérmico que proviene de la roca base, β_{0G}, es conducido verticalmente hacia la superficie a través del hielo, transformándose, por conducción, en el gradiente de temperaturas en el lecho. Así,

$$\nabla T(z=0) = \frac{dT(z=0)}{dz}\,\hat{\mathbf{k}} = \beta_0\,\hat{\mathbf{k}} = \beta_{0G}\,\hat{\mathbf{k}} \ . \tag{6.46}$$

Esto se explica, ya que el flujo de calor geotérmico es la única fuente de calor contemplada y se transmite verticalmente.

Recordando la relación entre el flujo, el gradiente térmico y la conductividad térmica del material, según define (6.9), y que, en este caso, tanto el flujo como el gradiente sólo tienen componente vertical, se obtiene

$$\mathbf{j}(z=0) = -k\,\nabla T(z=0) = j_G\,\hat{\mathbf{k}} = -k\,\beta_{0G}\,\hat{\mathbf{k}} \quad \Rightarrow \quad \beta_{0G} = -j_G/k \ . \tag{6.47}$$

Existen numerosas mediciones y estimaciones del flujo geotérmico j_G en diferentes zonas geológicas. Los mayores flujos geotérmicos se dan en los terrenos volcánicos, siendo elevados en los terrenos geológicamente jóvenes y más bajos en los más antiguos. En la Tabla 14 pueden apreciarse ciertos

valores de dicho flujo geotérmico. Para convertir estos flujos a valores de gradiente geotérmico se utiliza la conductividad térmica del hielo

Zona	**Flujo geotérmico (W m^{-2})**
Escudo canadiense (*Canadian Shield*)	3'35 10^{-2}
Valor medio mundial	5'02 10^{-2}
Antártida oriental (e)	5'02 10^{-2}
Bahía de Baffin	5'65 10^{-2}
Antártida occidental (e)	5'86 10^{-2}

Tabla 14 Valores de los flujos geotérmicos en zonas donde existen o han existido glaciares [(e) = estimado] (modificado[77] a partir de Hooke, 1998, Tabla 6.1).

Si se introduce el valor de β_{0G} en la expresión (6.45), suponiendo así que el glaciar está congelado y soldado a su lecho, puede ocurrir que se obtenga una temperatura en la base superior a la de fusión para su presión (*temperature at the pressure melting point* o *pressure melting temperature*, T_{pmp}). Este resultado puede indicar la fusión en el lecho, siendo erróneo el valor de β_0 introducido. Este caso se estudia a continuación.

B- Valor de β_0 si se produce fusión en el lecho β_{0M}

Deben revisarse los cálculos anteriores para permitir que se produzca fusión en el lecho, ya que la expresión (6.45) se ha obtenido suponiendo que éste estaba soldado por congelación. Respetando las demás hipótesis, incluyendo que el deslizamiento resulta despreciable, se contempla ahora la posibilidad

[77] La unidad utilizada en geofísica para el flujo geotérmico es el HFU (*Heat Flow Unit*), $\mathrm{HFU} = \mu\mathrm{cal\,cm^{-2}\,s^{-1}}$. Sin embargo, sus unidades en el S.I. son $\mathrm{W\,m^{-2}} = \mathrm{J\,m^{-2}\,s^{-1}} \approx 23'90\,\mathrm{HFU}$, ($\mathrm{HFU} = 4'184\ 10^{-2}\ \mathrm{W\,m^{-2}}$), si bien es más utilizada su expresión en $\mathrm{J\,m^{-2}a^{-1}}$.

de que se produzca fusión. Con este propósito, denominamos $\beta_{0\mathrm{M}}$ al valor del gradiente térmico en el lecho β_0, cuando parte del flujo de calor geotérmico se utiliza en la fusión. En tal situación, parte de $\beta_{0\mathrm{G}}$ se consume en provocar la fusión y no es conducido hacia la superficie, por lo que

$$\left|\beta_{0\mathrm{M}}\right| < \left|\beta_{0\mathrm{G}}\right| = j_{\mathrm{G}}/k \ . \tag{6.48}$$

Para calcularlo no se parte del flujo geotérmico, dado que no se conoce a priori qué parte de éste se consume en forma de fusión y cuánto se transmite, generando el gradiente de temperaturas. En este caso resulta de mayor utilidad como condición de contorno la temperatura en el lecho, que es conocida (T_{pmp}) por producirse fusión. Sobre la ecuación (6.45), aplicando la condición $T(z=0)=T_{\mathrm{pmp}}$, para la cual $\beta_0 = \beta_{0\mathrm{M}}$, tendremos

$$T_{\mathrm{pmp}} = T(0) = T_H - \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\beta_{0\mathrm{M}}}{\zeta}\left(erf(\zeta H) - erf(0)\right) \ . \tag{6.49}$$

Y, dado que la función error se anula en el origen, puede despejarse

$$\beta_{0\mathrm{M}} = \frac{2\zeta}{\sqrt{\pi}}\frac{T_H - T_{\mathrm{pmp}}}{erf(\zeta H)} \ . \tag{6.50}$$

Introduciendo este valor de β_0 en (6.45), se obtiene la ecuación de temperaturas en la divisoria del glaciar, con fusión en su lecho.

Hooke (1998, p. 74) indica, a modo de ejemplo, que el punto de fusión decrece al ritmo de *ca.* $0'098\,^{\circ}\mathrm{C\ MPa}^{-1}$ (si se produce agua saturada de aire); así, a una profundidad de 500 m de hielo, el punto de fusión será $T_{\mathrm{pmp}} \approx -0'4^{\circ}\mathrm{C}$.

6.3.1.2 Análisis de los resultados

La Figura 6-3 muestra varios perfiles de temperatura, en función de la coordenada vertical desde el lecho, z , para diferentes velocidades verticales (negativas en la zona de acumulación), obtenidos como resultados de la ecuación del balance térmico en el centro de un manto de hielo en estado estacionario, (6.45), en las condiciones planteadas.

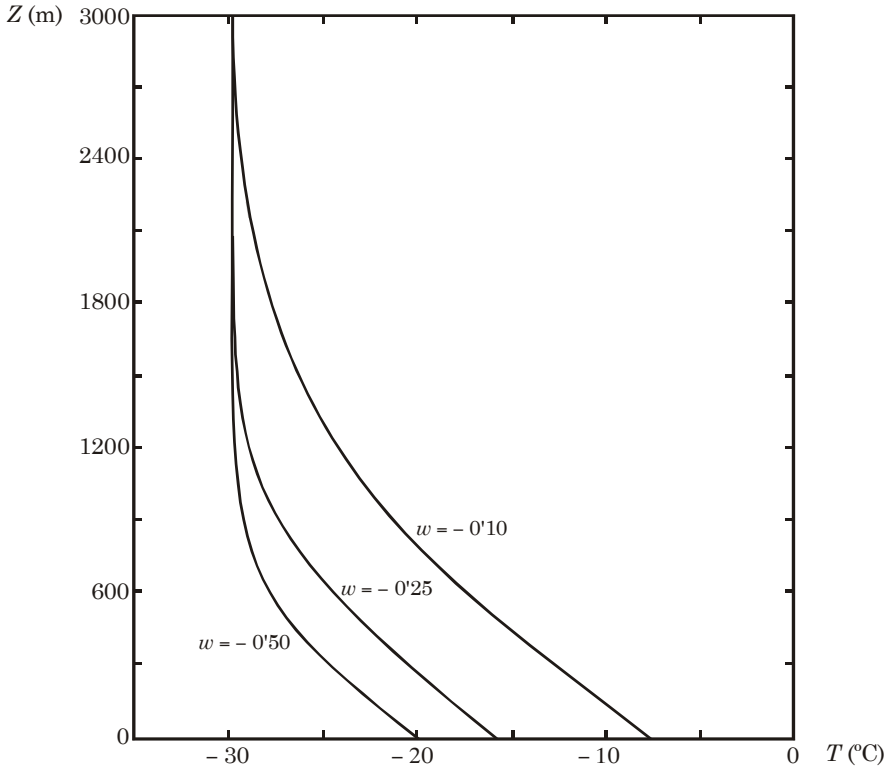

Figura 6-3 Perfiles de temperatura calculados en mantos de hielo polares para la zona de acumulación, con diferentes velocidades verticales.
(modificado a partir de Hooke, 1998, Fig. 6.6)

A la vista de estos resultados, se pueden extraer las siguientes conclusiones:

- En la divisoria, el hielo glaciar es aproximadamente isotermo en los primeros cientos de metros desde la superficie, calentándose lenta pero

progresivamente según se desciende, creciendo rápidamente este calentamiento al acercarse a la base.

- Mayores tasas de acumulación en la superficie (velocidades más negativas) se corresponden con mayores espesores de la zona isoterma desde la superficie, apareciendo temperaturas más negativas en la base.

Estos efectos se explican a través del mecanismo que los produce. Por un lado, existe un enfriamiento que, por advección, desciende hacia el interior del glaciar con el hielo frío aportado desde la superficie, con mayor velocidad cuanto mayor acumulación haya. Por otro lado, y en sentido contrario, existe un calentamiento ascendente, por conducción, debido al flujo de calor geotérmico, que genera un gradiente de temperaturas. Cuanto mayor sea la velocidad vertical descendente (mayor acumulación, en estado estacionario), mayor es el estrato isotermo producido por la advección, y más estrecho y cercano al lecho el estrato sobre el que el flujo geotérmico es capaz de afectar por conducción. Esto hace que la zona cercana al lecho se enfríe, obteniendo menor temperatura basal. Pero la componente vertical de la velocidad depende de su profundidad[78], por lo que los puntos cercanos al lecho, donde el gradiente de temperaturas por conducción es mayor, descienden con muy baja velocidad, reduciéndose el efecto de la advección, lo que permite el calentamiento más rápido de las partículas.

[78] Ya se ha discutido esta dependencia en la hipótesis 8 y con la Figura 6-2.

6.3.2 Perfil de temperaturas en la zona de neviza lejos de la divisoria de un manto de hielo

Para analizar esta situación, se sigue el desarrollo realizado por Robin (1970, *cit.* por Hooke, 1998), donde se realizan las siguientes hipótesis:

1) Se desprecia el aporte interno de calor, debido principalmente a la compresión por el peso de la columna de masa soportada (*strain heating*), de escasa magnitud en la capa superficial.
2) La conductividad térmica k, y con ella, el coeficiente de difusión térmica κ, son muy bajos en las zonas de neviza. La gran cantidad de aire existente entre las partículas de hielo provoca un efecto de aislamiento térmico, por lo que puede despreciarse el término conductivo.
3) El estudio es bidimensional, sin variación con la componente y.
4) El estudio se realiza en zona de acumulación.

En estas condiciones, la ecuación de balance térmico (6.27) se simplifica, quedando sólo el término debido a la advección. Así

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -u\frac{\partial T}{\partial x} - w\frac{\partial T}{\partial z} \ . \tag{6.51}$$

Su primer miembro puede calcularse estudiando los fenómenos de los que depende. En este sentido pueden distinguirse dos factores que afectan a la variación temporal de la temperatura en la zona cercana a la superficie: la variación del espesor del glaciar, que afecta a la temperatura en la superficie por la variación en la altitud del punto en estudio, y los cambios climáticos del entorno en el que se encuentra el glaciar. Esto se expresa como

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda\left(\dot{\varepsilon}_{zz}H - a\right) + \frac{\partial T_H}{\partial t} \ , \tag{6.52}$$

donde

- el término $\dot{\varepsilon}_{zz}H$ representa la disminución de espesor del manto de hielo debido a la componente de deformación vertical.
- la tasa de acumulación, a, representa, en este caso, el aumento de espesor del glaciar por acumulación.
- λ es la tasa de descenso de la temperatura al crecer la altitud.
- $\dfrac{\partial T_H}{\partial t}$ indica la variación de la temperatura a lo largo del tiempo, en función de los cambios climáticos.

Uniendo ambas expresiones, se obtiene

$$\lambda(\dot{\varepsilon}_{zz}H - a) + \frac{\partial T_H}{\partial t} = -u\frac{\partial T}{\partial x} - w\frac{\partial T}{\partial z} \ . \tag{6.53}$$

Teniendo en cuenta que $u\,\partial T/\partial x$, representa la variación de temperatura en la superficie del glaciar, según el hielo fluye hacia altitudes inferiores, se puede sustituir la derivada por el término $\alpha\lambda$, siendo α la pendiente de la superficie del glaciar, e igualando $w = -a$, como ya se ha realizado anteriormente, se llega a la expresión:

$$\lambda(\dot{\varepsilon}_{zz}H - a) + \frac{\partial T_H}{\partial t} = -u\alpha\lambda + a\frac{\partial T}{\partial z} \ , \ n(\varepsilon_{zz}H - a) \tag{6.54}$$

de la que puede despejarse el perfil de temperatura

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{a}\left(\lambda(u\alpha + \dot{\varepsilon}_{zz}H - a) + \frac{\partial T_H}{\partial t}\right) . \tag{6.55}$$

La consecuencia inmediata que se puede obtener de este resultado es que, en general, en un manto de hielo, según nos alejemos de la línea divisoria, la temperatura decrece con la profundidad en el estrato superficial. Para entenderlo, en la Figura 6-4 se muestra el significado de los términos utilizados en la expresión anterior.

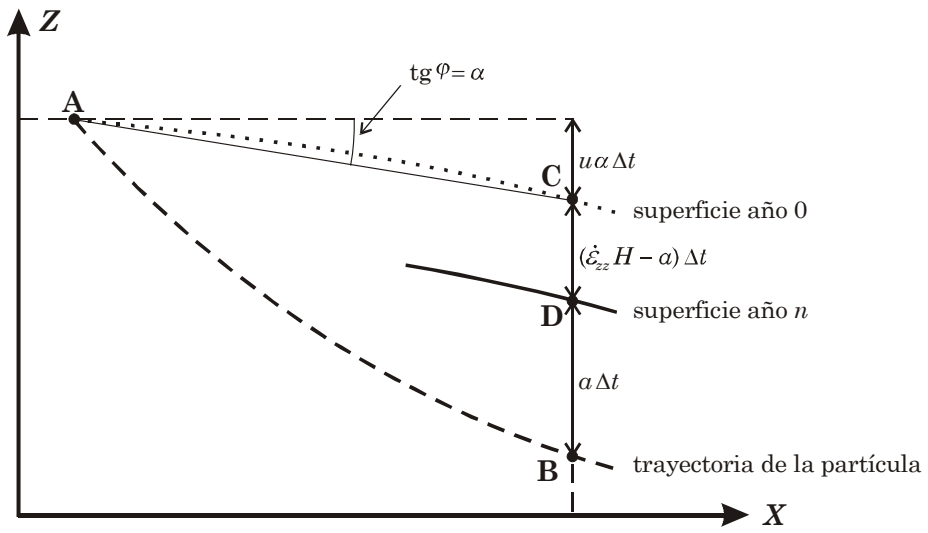

Figura 6-4 Explicación del comportamiento en la superficie del glaciar, como interpretación de la ecuación (6.55). (modificado a partir de Hooke, 1998, Fig. 6.8)

Una partícula o copo de nieve situada en el punto A se desplaza hasta B en un tiempo Δt, quedando bajo una capa de $a\Delta t$ metros de nieve acumulada. Supuesta despreciable la conductividad térmica, la temperatura del copo no ha variado, manteniendo la que tenía en A. Por otro lado, en el momento en que cayó la partícula, la superficie, en la posición donde se encuentra ahora la partícula (B), estaba en C, lugar que se encuentra a una temperatura $u\alpha\lambda\Delta t$ mayor (la altitud ha disminuido) que cuando se depositó el copo en A. Pero, además, el manto de hielo ha reducido su espesor en $(\dot{\varepsilon}_{zz}H - a)\Delta t$ metros al cabo de los n años y la superficie ha pasado a ser D, que se encontrará por ello a una temperatura $(\dot{\varepsilon}_{zz}H - a)\lambda\Delta t$ mayor (por descender

la altitud) que la que tendría en el punto C. Y, debido al cambio en la temperatura atmosférica, la temperatura de la nieve que se encuentra en la superficie ha crecido por este motivo (o decrecido si negativo) $\Delta_t T_H$.

Para comprobar la correspondencia con la ecuación (6.55), calculamos $\partial T/\partial z$ como $\lim_{\Delta z \to 0} \Delta_z T/\Delta z$. Para obtener $\Delta_z T$ se estudia la situación de la Figura 6-4. Nótese que en la figura se ha mostrado el paso del tiempo, con el que se crea el perfil de temperatura (variación en *z*), ya que los incrementos en *z* y en *t* ocurren simultáneamente, y ambos tienden a cero al retroceder hacia A. Así, los incrementos de temperatura y de *z* son, respectivamente,

$$\Delta_z T = T(D) - T(B) = \left(T(C) + \Delta t(\dot{\varepsilon}_{zz} H - a)\lambda + \Delta_t T_H\right) - T(A)$$

$$= \left(T(A) + \Delta t\, u\alpha\lambda + \Delta t(\dot{\varepsilon}_{zz} H - a)\lambda + \Delta_t T_H\right) - T(A) \ . \qquad (6.56)$$

Así,

$$\Delta_z T = \Delta t\, \lambda(u\alpha + \dot{\varepsilon}_{zz} H - a) + \Delta_t T_H \ , \quad \text{y} \qquad \Delta z = a\,\Delta t \ . \qquad (6.57)$$

El límite de su cociente, cuando D y B retroceden hacia A, es

$$\lim_{\mathrm{D,B}\to\mathrm{A}} \frac{\Delta_z T}{\Delta z} = \lim_{\mathrm{D,B}\to\mathrm{A}} \frac{\Delta t\, \lambda(u\alpha + \dot{\varepsilon}_{zz} H - a) + \Delta_t T_H}{a\,\Delta t}$$

$$= \frac{1}{a}\left(\lambda(u\alpha + \dot{\varepsilon}_{zz} H - a) + \lim_{\mathrm{D,B}\to\mathrm{A}} \frac{\Delta_t T_H}{\Delta t}\right) \qquad (6.58)$$

Dado que $\lim_{\mathrm{D,B}\to\mathrm{A}} \frac{\Delta_z T}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta_z T}{\Delta z} = \frac{\partial T}{\partial z}$ y $\lim_{\mathrm{D,B}\to\mathrm{A}} \frac{\Delta_t T_H}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta_t T_H}{\Delta t} = \frac{\partial T_H}{\partial t}$, la ecuación (6.58), obtenida de la Figura 6-4, se transforma, como se quería comprobar, en el perfil de temperaturas obtenido en (6.55).

Pero no siempre es fácil medir los términos implicados en este modelo. No es sencillo valorar si el espesor del manto de hielo crece o adelgaza en la zona de neviza lejos de la divisoria, *i.e.*, si $(\dot{\varepsilon}_{zz}H - a)$ es positivo o negativo. La tasa de acumulación puede medirse extrayendo testigos del estrato superficial por sondeo mecánico. Pero el principal problema de medida reside en $\dot{\varepsilon}_{zz}$, al no tener un punto fijo sobre el que establecer las medidas. Incluso, aunque se obtuvieran las medidas, sólo abarcarían un corto período de tiempo.

Sin embargo, la expresión (6.55) puede ser utilizada para calcular la tasa de aumento de espesor del glaciar, $(\dot{\varepsilon}_{zz}H - a)$, si se conocen los demás términos. Así,

$$(\dot{\varepsilon}_{zz}H - a) = \frac{1}{\lambda}\left(a\frac{\partial T}{\partial z} - \frac{\partial T_H}{\partial t} \right) - u\alpha \ . \tag{6.59}$$

Si se supone despreciable la variación climática de la temperatura en el período en estudio, puede simplificarse, obteniendo

$$(\dot{\varepsilon}_{zz}H - a) = \frac{a}{\lambda}\frac{\partial T}{\partial z} - u\alpha \ . \tag{6.60}$$

En la Tabla 15 se muestra la aplicación de esta expresión sobre dos ejemplos: la base Site 2 (77'0º N, 56'1º W, Groenlandia) y la base Byrd (80'0º S, 120'0º W, Antártida). Una vez medidos α, u_S, λ, a y $\partial T/\partial z$ (este último mediante sondeo a 150 m), se calcula $(\dot{\varepsilon}_{zz}H - a)$, obteniendo una tasa de aumento del espesor de 0'031 $\mathrm{m\,a^{-1}}$ en Site 2 y una tasa de adelgazamiento de 0'018 $\mathrm{m\,a^{-1}}$ en la base Byrd; resultados que Hooke (1998, p. 78) valora como razonables.

Parámetro	Unidades	Site 2	Byrd
α		– 0'00427	– 0'00161
u_S ,	m a^{-1}	17	15
λ ,	K m^{-1}	– 0'011	– 0'008
a ,	m a^{-1}	0'4	0'2
$\partial T/\partial z$,	K m^{-1}	0'00115	0'00024
$(\dot{\varepsilon}_{zz}H - a)$	m a^{-1}	0'031	– 0'018

Tabla 15 Valores de los parámetros en la base Site 2, en Groenlandia y la base Byrd, en la Antártida, y cálculo mediante (6.60) de las respectivas tasas de aumento del espesor glaciar (modificado a partir de Hooke, 1998, Tabla 6-2).

Aunque estas expresiones proporcionan un método para valorar la salud de un manto de hielo, resulta poco práctico, fundamentalmente por lo laborioso de la medida del gradiente de temperaturas, que se llevan a cabo mediante sondeos a profundidades moderadas (*e.g.*, 150 m).

Sin embargo, a pesar de su difícil uso práctico, el perfil de temperaturas obtenido explica y cuantifica el hecho de que, en general, según nos alejemos de la línea divisoria en un manto de hielo, la temperatura decrece con la profundidad en el estrato superficial.

Capítulo 7

Simulación numérica de la termomecánica glaciar

En el capítulo anterior ha quedado de manifiesto la dificultad de la resolución de la ecuación del calor. Sólo los modelos geométricamente muy simples o con hipótesis fuertemente simplificadoras de su comportamiento termodinámico puede resolverse analíticamente. La complejidad de las ecuaciones que gobiernan el régimen termodinámico de los glaciares y la irregular geometría de gran número de ellos requiere la resolución numérica de los problemas de valores iniciales y de contorno correspondientes. Los métodos de elementos finitos juegan aquí un papel preponderante. En este caso concreto, al tratarse de una ecuación de advección-difusión, con dominancia del término advectivo, deben elegirse métodos que eviten las oscilaciones habituales en la solución aproximada de este tipo de ecuaciones.

El submodelo térmico desarrollado en el capítulo anterior, definido por la ecuación de balance térmico con sus correspondientes condiciones iniciales y de contorno, constituye, junto con los submodelos dinámico y de evolución de

la superficie libre, desarrollados por Martín (2003), un modelo completo de la termomecánica glaciar cuya solución es el objeto del presente capítulo.

7.1 Modelo glaciológico

Se presentan a continuación las ecuaciones básicas que definen el modelo termomecánico dependiente del tiempo, que subdividiremos en tres submodelos: dinámico, térmico y de evolución de la superficie libre.

La masa de hielo se considerará como un fluido viscoso no lineal, incompresible e isótropo. Debido al número de Reynolds[79] extremadamente bajo (Re ~ 10^{-13} para glaciares y mantos de hielo; Schiavi, 1987, p. 9), podemos considerar un régimen de flujo estacionario casi estático. Esto permitirá resolver separadamente los tres submodelos, a través de un proceso iterativo que desacopla las ecuaciones. Así, los submodelos dinámico y térmico se resolverán en estado estacionario, introduciéndose la dependencia temporal a través de submodelo de evolución de la superficie libre.

[79] En general, se define Re = $l\, u_0 / \nu$, siendo l y u_0 una longitud y una velocidad características y ν la viscosidad cinemática, cociente de viscosidad y densidad: $\nu = \mu / \rho$. De un análisis adimensional formal del problema (Nye, 1969; Fowler, 1977) es posible derivar un número de Reynolds para el flujo de glaciares definido por Re = $\rho\, u_0^2 d / \tau\, l$, donde d y τ son una profundidad y una tensión características.

7.1.1 Submodelo dinámico

Está constituido por las ecuaciones de conservación del momento lineal en régimen estacionario y de conservación de masa para medios incompresibles

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i = 0 \ , \tag{7.1}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \ , \tag{7.2}$$

donde σ_{ij} es el tensor de tensiones, g_i es la aceleración de la gravedad, ρ es la densidad del hielo, u_i es la velocidad y x_i es el vector de posición, y se ha usado el convenio de Einstein de suma sobre los subíndices repetidos. Como relación constitutiva se ha utilizado la generalización, debida a Nye (1957), de la ley de flujo de Glen (1955, 1958):

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = A\tau^{n-1}\tau_{ij} \ , \tag{7.3}$$

donde τ_{ij} son las tensiones desviadoras, τ es la tensión desviadora efectiva y $\dot{\varepsilon}_{ij}$ son las velocidades de deformación, definidas por las relaciones

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij} \ , \qquad \tau = \left(\frac{1}{2}\tau_{ij}\tau_{ij}\right)^{1/2} \ , \qquad \dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \ , \tag{7.4}$$

siendo p la presión debida a tensión compresiva media, es decir,

$$p = -\sigma_{ii}/3 \, . \tag{7.5}$$

Las velocidades, junto con las presiones, constituyen las incógnitas del submodelo dinámico.

En la ley de Glen (7.3), n es una constante, para la que habitualmente se toma el valor 3, y A es un parámetro cuyo valor depende de la temperatura, estructura cristalina y contenido de impurezas del hielo (en el caso del hielo templado, también depende de su contenido en agua, según discutiremos más adelante). La dependencia de A con la temperatura se establece habitualmente a través de una relación de tipo Arrhenius

$$A = A_0 \, e^{-Q/RT} \, , \tag{7.6}$$

donde Q es la energía de activación y R es la constante de los gases, $R = 8'314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$, y la temperatura T se expresa en K (Kelvin). Existen alternativas a la anterior relación, basadas en ajustes a datos de observaciones experimentales, que proporcionan resultados equivalentes; se puede citar, por ejemplo, la de Dahl-Jensen (1989) que se utiliza más adelante, en una aplicación concreta del modelo. En ocasiones, A (considerada como constante), n o ambos se tratan como parámetros fenomenológicos cuyos valores pueden ser variados, dentro de límites razonables, de forma que se observe el mejor ajuste entre las velocidades calculadas por el modelo y las observadas en la superficie del glaciar (*e.g.*, Hanson, 1995; Corcuera *et al.*, 2001; Martín *et al.*, 2004); en lo que respecta a A, este procedimiento sólo suele aplicarse en el caso de los glaciares templados, puesto que la dependencia de A con T es muy fuerte en el caso de los glaciares fríos.

Si se toma $n \neq 1$, el sistema dinámico será no lineal como consecuencia de la no linealidad de la relación constitutiva.

7.1.2 Submodelo térmico

Viene dado por la ecuación de conservación de la energía en régimen estacionario (6.29),

$$\kappa \nabla^2 T - \mathbf{u} \cdot \nabla T + F = 0 \ .$$

En nuestro caso, la única fuente interna de calor considerada es el calor de deformación

$$\Psi = \tau_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} \ . \tag{7.7}$$

Una vez definida la relación constitutiva (7.3), se puede rescribir el segundo miembro, obteniendo

$$\Psi = 2A^{-1/n} \dot{\varepsilon}^{(1/n)+1} \ , \tag{7.8}$$

siendo $\dot{\varepsilon}$ la velocidad de deformación efectiva, definida como

$$\dot{\varepsilon} = \left(\frac{1}{2} \dot{\varepsilon}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} \right)^{1/2} \ . \tag{7.9}$$

La ecuación (6.29) tiene diversas fuentes de no linealidad: en primer lugar, según se ha visto en §6.2, tanto k como C_p pueden ser funciones de la temperatura. Pero, además, el campo de velocidades también depende de la temperatura a través de la relación $A(T)$, e incluso el término fuente Ψ depende no linealmente de ella. Estas dos últimas fuentes de no linealidad, sin embargo, se obvian al considerar el proceso iterativo que desacopla las ecuaciones de los submodelos.

7.1.3 Submodelo de evolución de la superficie libre

Viene dado por la caracterización cinemática de la superficie libre,

$$\frac{\partial h}{\partial t} = w_S + a - \mathbf{u}_S \cdot \nabla_H h \ , \tag{7.10}$$

que define la evolución de la superficie del glaciar debida al movimiento del hielo y a los procesos de acumulación y ablación. La incógnita es la altitud h de la superficie, cuya derivada material dh/dt (que puede descomponerse en términos local, $\partial h/\partial t$, y convectivo, $\mathbf{u}_S \cdot \nabla_H h$, donde $\mathbf{u}_S$ es la velocidad del hielo en la superficie del glaciar y ∇_H representa un gradiente horizontal, como se expresa en el Apéndice C) ha de igualar a la suma de la componente vertical de la velocidad en la superficie w_S y la tasa de acumulación a.

7.1.4 Consideraciones sobre la relación constitutiva

Aunque la forma de la ley de Glen está bien establecida y puede ser explicada en términos de teoría de las dislocaciones (Weertman, 1983; Alley, 1992), se trata esencialmente de un ajuste empírico a datos de laboratorio y de campo (especialmente, en glaciares templados) para las condiciones de carga típicas de los glaciares. Los valores de n varían entre 1'5 y 4'2, con una media de alrededor de 3, que es el valor habitualmente utilizado en mecánica de glaciares (Weertman, 1973; Hooke, 1981).

Las hipótesis implicadas en la ley de Glen generalizada son que el hielo es homogéneo, isótropo e incompresible y que, de acuerdo con las medidas experimentales, la relación constitutiva no se ve afectada por la presión hidrostática, por lo que se establece en función de las tensiones desviadoras. Además, se consideran las dos siguientes hipótesis, debidas a Nye:

- En cualquier punto, cada componente del tensor velocidad de deformación es proporcional a la componente correspondiente del tensor de tensiones desviadoras. Esto es una hipótesis razonable para un material isótropo.
- La relación constitutiva es independiente del tercer invariante del tensor de tensiones desviadoras.

Aunque la segunda hipótesis de Nye ha sido cuestionada por algunos autores (Baker, 1987), trabajos más recientes (Li *et al.*, 1996) han apoyado su validez. Parece razonable, en consecuencia, utilizar como relación constitutiva la ley de flujo de Glen.

Una importante implicación de la ley de flujo no lineal es que cada componente del tensor velocidad de deformación es proporcional no sólo a la componente correspondiente del tensor de tensiones desviadoras, sino también al cuadrado (para $n = 3$) de la tensión desviadora efectiva. Así, una componente individual de la tensión actuando por sí sola produce menos desviación de la que produciría en presencia de otras tensiones.

En los glaciares fríos, la dependencia más fuerte del coeficiente A de la relación constitutiva es la que presenta con respecto a la temperatura, a través de una relación de tipo Arrhenius (ecuación (7.6)). Sin embargo, en el caso de los glaciares templados, que son prácticamente isotermos (salvo una pequeña dependencia de la temperatura de fusión del hielo con la presión; véase, *e.g.*, Hooke, 1998, cap. 2), podemos suponer que A es independiente de la temperatura. En estos glaciares, sin embargo, la dependencia de A con el contenido en agua líquida del hielo (W) puede ser importante, existiendo relaciones bastante aceptadas, como la calculada por Duval (1977) y discutida por Lliboutry y Duval (1985),

$$A(W) = \left(3'2 + 5'8\,(100W)\right) 10^{-15}\ \mathrm{kPa}^{-3}\,\mathrm{s}^{-1}\ . \qquad (7.11)$$

Esta relación fue establecida utilizando muestras de hielo templado con contenidos en agua entre el 0% y el 0'8%. El incremento de A correspondiente a ese rango de valores de W implica un aumento de la tasa de deformación efectiva $\dot{\varepsilon}$ en un factor de 3. Esto es especialmente importante teniendo en cuenta que, de acuerdo con Lliboutry (1983), el contenido en agua del hielo basal de los glaciares templados varía típicamente entre el 0'6% y el 0'95%, a lo que corresponde un aumento en la deformación efectiva en un factor de 1'3. Pero numerosas medidas de W superan incluso estos valores. Por ejemplo, medidas directas de W en testigos de sondeos extraídos de glaciares templados han dado valores entre el 1% y el 1'7% (Lliboutry, 1971; Raymond y Harrison, 1975), y valores determinados mediante la relación entre W y la velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas en el hielo templado, estimada a partir de hipérbolas de difracción (Benjumea *et al.*, 2003), el método CMP (Macheret *et al.*, 1993) o medidas en sondeos mecánicos (Murray *et al.*, 2000), llegan incluso al 4'1% en glaciares templados y al 5'06% en hielo templado de glaciares politérmicos.

Hay que hacer notar, por último, que, aunque el uso en dinámica de glaciares de la ley de Glen como relación constitutiva sigue siendo prácticamente universal, en los últimos años se han propuesto relaciones constitutivas distintas, algunas de las cuales incorporan la anisotropía del hielo (*e.g.*, Azuma y Goto-Azuma, 1996) y, las más recientes, múltiples mecanismos de deformación (*e.g.*, Goldsby y Kohlstedt, 2001) o expresiones matemáticas no directamente asociadas a mecanismos de deformación concretos pero que proporcionan resultados equivalentes a estos últimos (*e.g.*, Pettit y Waddington, 2003).

7.2 Condiciones de contorno e iniciales

7.2.1 Submodelo dinámico

Las condiciones de contorno del modelo dinámico pueden incluir tensiones aplicadas o velocidades fijadas. La superficie superior se toma normalmente como superficie libre, con tracciones nulas, es decir, $\sigma_{ij}\ n_j = 0$. Esto significa que las velocidades del hielo en la superficie, para las cuales existen, habitualmente, valores experimentales, no se utilizan como condiciones de contorno; en su lugar, se utilizan para ajustar los parámetros libres del modelo.

En una divisoria de hielo, se establecen condiciones mixtas de velocidades horizontales nulas y tensiones de cizalla nulas. Ésta es la práctica habitual en glaciología, donde todos los modelos referidos a divisorias de hielo son bien bidimensionales o bien tridimensionales con simetría de revolución. Hay que destacar, no obstante, que si el modelo utilizado es tridimensional, la divisoria es una superficie alabeada donde la componente horizontal de la velocidad en la dirección normal es nula pero la componente en el plano tangente puede no ser nula (aunque habitualmente será pequeña).

Las velocidades nulas en la base son condiciones típicas de casquetes o mantos de hielo polar o glaciares fríos de montaña, que suelen estar soldados a su lecho por congelación; sin embargo, rara vez se da esta situación en los glaciares templados, salvo, en invierno, en zonas donde el espesor de hielo sea muy pequeño. Respecto a los mantos de hielo polar hay que puntualizar que, en las zonas donde el espesor de hielo es muy grande, puede darse fusión basal (debido al flujo geotérmico) pese a que las temperaturas en la

superficie sean muy bajas; en zonas de menor espesor, sin embargo, las temperaturas en el lecho serán inferiores al punto de fusión. También hay zonas concretas de los mantos de hielo, como las denominadas corrientes de hielo (*ice streams*), donde las velocidades basales no son nulas, sea por deslizamiento basal o por deformación de los sedimento subglaciares (véase, *e.g.*, Kamb, 2001). Otro caso de interés es el de los glaciares politérmicos con terminación en tierra (como es el caso que se analiza en el capítulo siguiente). Debido a que su lengua termina en tierra, el espesor de la zona terminal disminuye gradualmente hasta cero, por lo que el hielo es frío y soldado al lecho en ella; sin embargo, en zonas de mayor espesor de hielo en la cabecera o zonas intermedias del glaciar, donde el hielo basal es templado (por efecto del flujo geotérmico), podrá darse deslizamiento basal. Éste puede además ser reforzado por la abundante cantidad de agua presente habitualmente en estos glaciares durante la época de fusión, que implica presiones de agua mayores y, consiguientemente, una presión efectiva menor que favorece el deslizamiento basal. Esto, sin embargo, no debe inducir a pensar que a mayor cantidad de agua de fusión necesariamente será mayor la presión de agua basal. De hecho, en los glaciares templados y politérmicos, al inicio de la temporada de ablación, la relativa abundancia de agua junto con la escasa eficiencia del sistema hidráulico glaciar para evacuarla (debido a que muchos conductos permanecen obturados por congelación invernal o por deformación del hielo), implican presiones de agua elevadas, mientras que según avanza la época de ablación, el sistema de drenaje se desarrolla, la descarga de agua se hace más eficiente y la presión de agua disminuye generalmente (Bennet y Glasser, 1996, cap. 4). Por esta misma razón, tanto en glaciares templados como en politérmicos con hielo basal templado puede darse en ocasiones deslizamiento basal durante la época invernal, debido a que el cierre de buena parte de los conductos del sistema hidráulico glaciar puede implicar, pese a la mucho menor cantidad de agua disponible (que

será mayoritariamente de origen endoglaciar), una presión de agua basal elevada que favorece el deslizamiento del glaciar sobre su lecho.

En cuanto a leyes de deslizamiento basal, las hay de carácter teórico y experimental. Los modelos teóricos presentan serias limitaciones, por lo que suelen utilizarse aproximaciones basadas en observaciones experimentales; éstas, sin embargo, requieren habitualmente disponer de estimaciones de magnitudes para las que raramente se dispone de datos precisos (tensión de cizalla basal, presión del agua presente en el lecho, etc.). Esta cuestión aparece ampliamente discutida en el capítulo 7 del texto de Paterson (1994), del que se extraen los siguientes puntos:

- El hielo se mueve entre los abultamientos del lecho rocoso mediante una combinación de recongelación (dominante para pequeños abultamientos) y flujo plástico mejorado (dominante para grandes abultamientos). El tamaño de obstáculo para el cual ambos procesos son igualmente efectivos está probablemente en el rango de 10 a 100 mm.
- Cuando el agua de fusión de la superficie alcanza el lecho y su presión excede un cierto valor (denominado presión de separación) que depende de la rugosidad del lecho, se forman cavidades a sotavento de los abultamientos, de los que depende la velocidad de deslizamiento.
- Cuando la presión de agua excede un segundo umbral (denominado presión crítica), mayor que la presión de separación pero menor que la presión ejercida por el hielo suprayacente, el deslizamiento se hace inestable.
- La fricción entre el lecho y las partículas de roca en el hielo basal reduce la velocidad de deslizamiento, quedando por debajo de la esperada para una interfaz bien definida entre hielo “limpio” y roca.

Ninguna teoría existente proporciona una condición de contorno basal realista para el problema del flujo de glaciares. Las más adecuadas son las

relaciones empíricas entre la velocidad de deslizamiento, u_b, la tensión de cizalla basal, τ_b, y la presión efectiva, p_e (presión del hielo menos empuje de Arquímedes del agua basal), de la forma

$$u_b = C\frac{\tau_b^p}{p_e^q} \ , \tag{7.12}$$

donde, de acuerdo con el nivel de conocimientos presentes, los valores más apropiados son $q = 1$ y $p = 2$ ó 3. La cantidad C, que depende de las propiedades mecánicas y térmicas del hielo, resulta adecuado tratarla como un parámetro ajustable, pero con la precaución de que los valores obtenidos para un glaciar no deberían aplicarse a otros. El valor de p_e es incierto, puesto que la presión de agua raramente se mide. En el caso de los modelos tridimensionales, la ecuación anterior se utiliza para determinar las componentes horizontales de la velocidad basal; la componente vertical se calcula, a partir de ellas, utilizando la condición de equilibrio en el lecho, que, considerando lecho rígido y sin fusión basal, es $w = u(\partial b/\partial x) + v(\partial b/\partial y)$, donde $z = b(x, y)$ representa la altitud del lecho. De esta forma, la velocidad de deslizamiento resultante sigue la dirección horizontal de la tensión conductora (*driving stress*), siendo, a la vez, tangente al lecho (Martín *et al.*, 2004).

Otra alternativa a la especificación de una ley de deslizamiento en los términos descritos es su sustitución por una delgada capa de sedimentos subglaciales, con reología habitualmente lineal (en términos prácticos, añadiendo una fila de elementos con reología distinta), que proporcione una velocidad en la parte inferior del hielo equivalente a la que proporcionaría una ley de deslizamiento. Esta aproximación, que ha sido utilizada por bastantes autores (*e.g.*, Vieli *et al.*, 2000; Pettit *et al.*, 2003), permite tratar el deslizamiento basal y la deformación de sedimentos subglaciales de forma

unificada. De hecho, considera únicamente el desplazamiento producido por estos últimos, aunque incrementándolo para que englobe también, cuantitativamente, al posible deslizamiento del glaciar sobre los sedimentos.

Las paredes laterales típicas de los glaciares de valle no son sino una prolongación del lecho, por lo que pueden aplicarse a ellas las consideraciones anteriores.

En cuanto a la zona terminal del glaciar, se dan dos situaciones claramente diferenciadas. Si se trata de un glaciar con terminación en tierra, su espesor disminuye gradualmente hasta cero, por lo que bastan las condiciones de contorno de superficie y de lecho; no obstante, en caso de tratarse de una zona terminal de espesor nulo con velocidad no nula, será necesario aplicar técnicas específicas que permitan el avance o retroceso de la lengua del glaciar, como las discutidas por Hodge (1985). El segundo caso característico es el de los glaciares con terminación en mar o en lago, pero apoyados sobre su lecho, es decir, sin flotar en él, también denominados glaciares de marea. En este caso, lo procedente será especificar una ley de desprendimiento de témpanos (*calving*). Existen para ello leyes de carácter puramente experimental, como la de Sikonia (1982), que tienen la desventaja de no ser válidas más que para el glaciar donde se establecieron, o las que se basan en argumentos teóricos pero apoyados por observaciones experimentales (*e.g.*, Vieli *et al.* 2001, 2002). No obstante, el problema de especificar una ley de desprendimiento de témpanos presenta serias dificultades, según se discute en van der Veen (1996). En el caso de los mantos de hielo cuya parte terminal llega a flotar sobre el océano, a la parte flotante se le denomina banco de hielo (*ice shelf*) y estaríamos ante un problema radicalmente distinto, en el que deben establecerse las ecuaciones dinámicas del manto de hielo y del banco de hielo por separado, estableciendo las condiciones requeridas para

acoplar las soluciones respectivas en la zona de transición (*e.g.*, Baral y Hutter, 2001).

Es interesante destacar, por último, que en determinadas aplicaciones nos interesa o nos vemos forzados a establecer una terminación artificial del glaciar. Un ejemplo típico del primer caso sería el estudio del flujo de hielo en la zona de la divisoria (*e.g.*, Hindmarsh *et al.*, 2004), mientras que uno del segundo sería aquél en el que se desconocen los espesores de un glaciar de marea en su zona terminal, por estar ésta fuertemente agrietada (*e.g.*, Martín *et al.*, 2004). En el primero de los ejemplos, los contornos laterales, a ambos lados de la divisoria, se definen mediante una sección artificial a una distancia del orden de 15 veces el espesor de hielo en la divisoria H_d. En ella, se definen condiciones de contorno de velocidad típicas de la aproximación de hielos someros (*Shallow Ice Approximation*, en adelante SIA), puesto que, en zonas alejadas de la divisoria, la SIA proporciona una buena aproximación a la solución. En estos extremos, la velocidad en la superficie se ajusta igualando la acumulación en la zona comprendida entre la sección artificial y la divisoria de hielo corriente arriba, y el flujo de hielo a través de la sección artificial (se está considerando un ejemplo en el que toda el área de estudio corresponde a zona de acumulación). El desacoplamiento entre las soluciones del sistema de Stokes y las soluciones SIA, sin embargo, da lugar a una inestabilidad de la solución que se propaga habitualmente a lo largo de distancias del orden de $5H_d$ (Schøtt-Hvidberg, 1996; Martín, 2003). En el segundo de los ejemplos, al disponer de medidas de velocidad del hielo en la superficie de la sección terminal, pueden utilizarse éstas (y otras interpoladas a partir de ellas) para especificar las condiciones de contorno en los nodos correspondientes, y utilizar una ley de variación de velocidad con la profundidad que proporcione en el lecho velocidades congruentes con la ley de deslizamiento basal.

7.2.2 Submodelo térmico

Como condiciones de contorno del submodelo térmico se utilizan, como norma general, temperaturas atmosféricas en la superficie superior y, en el lecho, gradiente de temperaturas compensado por el flujo de calor geotérmico[80] G. Esto último, sin embargo, sólo tiene sentido si la temperatura del hielo basal permanece por debajo del punto de fusión. Si éste se alcanza (lo que ocurre, por ejemplo, en las zonas más profundas de los mantos de hielo), la temperatura permanecerá constante y el flujo de calor geotérmico se empleará en la fusión del hielo basal[81]. Además, en el caso de hielo basal politérmico, una parte de la frontera, desconocida a priori, está a temperatura de fusión, mientras que otra está por debajo de ella, lo que se modela mediante condiciones de contorno de tipo Signorini (*e.g.*, Schiavi, 1997, p. 20; Calvo, 1999, p. 10), es decir,

$$T \le T_m, \quad (T - T_m)(k\frac{\partial T}{\partial n} - G) = 0, \quad 0 \le k\frac{\partial T}{\partial n} \le G \ , \tag{7.13}$$

donde T_m representa la temperatura de fusión (*melting*) del hielo y $\partial T/\partial n$ representa la derivada normal saliente (es decir, hacia abajo).

En las divisorias de hielo, y también en secciones artificiales de mantos de hielo suficientemente alejadas de la divisoria (de forma que el flujo de hielo sea predominantemente horizontal), se utiliza gradiente horizontal de

---

[80] Su valor promedio sobre la superficie terrestre es $G = 42$ mW m^{-2}. Utilizar un valor constante del flujo geotérmico (sea el anterior u otro cualquiera) no es estrictamente correcto; sería más realista considerar la conducción de calor en el lecho rocoso, como hace, por ejemplo, Hanson (1990). Sin embargo, un valor constante de G es una condición de contorno habitual en glaciología.

[81] La velocidad descendente del hielo, como resultado de esta fusión basal, es habitualmente pequeña y puede ser despreciada (*e.g.*, Fowler, 1997, p. 333), si bien algunos autores sí la consideran (*e.g.*, Pattyn, 2003).

temperaturas nulo. En el caso de las divisorias, esta hipótesis, junto con otras adicionales, conduce a la conocida solución de Robin (1955) discutida en el capítulo anterior. También en las secciones artificiales podrían aplicarse como condiciones de contorno otras soluciones analíticas de modelos simplificados, tales como el modelo de columna y el modelo de línea de flujo, discutidos en Hooke (1998, cap. 6).

7.2.3 Submodelo de evolución de la superficie libre

El tipo de condiciones iniciales del submodelo de evolución de la superficie libre será muy dependiente del problema en estudio. Si se trata de un problema de evolución temporal del glaciar a partir de la situación presente, la geometría de la superficie actual del glaciar será lógicamente la condición inicial. Si estamos interesados en conocer la configuración de un manto de hielo en equilibrio con unas determinadas condiciones de acumulación-ablación, podemos partir, como condición inicial, del perfil de Nye-Vialov (Vialov, 1958), que proporciona una solución analítica, con aproximación de tipo SIA, para el perfil de un manto de hielo con lecho plano y tasa de acumulación constante. Si se considera un modelo de manto de hielo con adelgazamiento, del que se quiere realizar una evolución temporal desde una configuración pretérita desconocida hasta la actual, se puede partir de una configuración inicial consistente con la tasa de adelgazamiento estimada y el número de años entre el momento de inicio de la simulación y el presente.

7.3 Solución numérica

Según hemos mencionado anteriormente, la solución del modelo glaciológico descrito se efectúa a través de un proceso iterativo que permite desacoplar las ecuaciones de los distintos submodelos, que se resuelven así de forma separada. Los submodelos dinámico y térmico se resuelven en estado estacionario, introduciéndose la dependencia temporal a través de submodelo de evolución de la superficie libre. La interdependencia entre los submodelos dinámico y térmico viene definida a través de la relación $A(T)$ en el sistema de Stokes, y la presencia de $\mathbf{u}$ en la ecuación de conservación de la energía. La interdependencia entre los modelos dinámico y de evolución de la superficie libre, por su parte, viene determinada por la presencia de w_s y $\mathbf{u}_s$ en la caracterización cinemática de la superficie libre.

Puesto que los submodelos dinámico y térmico son de régimen estacionario, los métodos numéricos utilizados serán de elementos finitos, por lo que empezaremos planteando la formulación débil o variacional de los problemas correspondientes. Esto no será necesario para el submodelo de evolución de la superficie libre, puesto que éste se resolverá mediante métodos semilagrangianos.

7.3.1 Submodelo dinámico

7.3.1.1 Problema de Stokes clásico

El conjunto de ecuaciones (7.1)-(7.2), considerado conjuntamente con la relación constitutiva (7.3), constituye el sistema de Stokes estacionario típico de los fluidos altamente viscosos (número de Reynolds muy pequeño) y término convectivo despreciable, salvo que, en nuestro caso, el sistema es no

lineal debido a la relación constitutiva empleada. Esto se ve fácilmente si más que rescribir la relación constitutiva en la forma

$$\tau_{ij} = 2\mu\dot{\varepsilon}_{ij} \quad , \tag{7.14}$$

donde

$$\mu = \left[2A_0 e^{-Q/RT}\tau^{n-1}\right]^{-1} \tag{7.15}$$

es la viscosidad efectiva[82,83]. Si se tratara de un fluido newtoniano (μ constante), se obtendría, pasando a notación vectorial, la forma estándar del sistema de Stokes estacionario:

$$\begin{aligned} -\nu\,\Delta\mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{g}, \\ \nabla\cdot\mathbf{u} &= 0, \end{aligned} \tag{7.16}$$

donde $\nu = \mu/\rho$ es la denominada viscosidad cinemática.

---

[82] Algunos autores (*e.g.*, Pettit y Waddington, 2004) añaden un término multiplicativo E (*Enhancement factor*), que nosotros hemos englobado dentro de A_0, que recoge las variaciones en la velocidad de deformación debidas a cambios en el tamaño de cristal, contenido de impurezas y orientación de los cristales, y que es función de la posición (en el caso de la orientación de los cristales, también del campo local de deformaciones), quedando A_0 asociada, como constante, al hielo limpio isótropo holoceno.

[83] Esta expresión pone de manifiesto que, para $n > 1$, $\mu \to \infty$ cuando $\tau \to 0$. Esto puede resultar en una singularidad en la base del hielo bajo una divisoria. Se han propuesto distintas formas de evitarla; por ejemplo, Pattyn (2003) añade un pequeño (10^{-30}) término aditivo constante a la velocidad de deformación efectiva, mientras que Pettit y Waddington (2003) proponen, por analogía con los metales policristalinos, acotar la viscosidad para tensiones desviadoras pequeñas mediante una transición a un régimen lineal.

Sobre la formulación débil del problema de Stokes

Existen distintos esquemas para la formulación débil del problema de Stokes. En uno de ellos (Carey y Oden, 1986, §3.3.2), se incluye la condición de incompresibilidad $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ en el espacio del problema variacional, lo que resulta en la eliminación de la presión en el planteamiento del problema. Esto implica, sin embargo, que el espacio de aproximación de las velocidades debe satisfacer la condición $\nabla \cdot \mathbf{u}_h = 0$, lo que requiere el diseño de elementos finitos especiales.

Desde los puntos de vista computacional y de programación de los elementos finitos, es preferible utilizar métodos mixtos (Carey y Oden, 1986, §3.3.3; 11), en los cuales tanto **u** como p deben ser aproximados. El sistema de elementos finitos resultante será mayor, al incluir el vector de presiones nodales **P**, pero los elementos serán de naturaleza estándar.

Otra alternativa para el planteamiento de la formulación débil del problema de Stokes es el método de los multiplicadores (Carey y Oden, 1986, §3.3.4). La condición de incompresibilidad puede ser considerada como una restricción, y el método de los multiplicadores de Lagrange proporciona un método natural para incorporar restricciones en el planteamiento variacional de un problema. Sin embargo, es conocido que los métodos mixto y de multiplicadores son equivalentes, identificándose el multiplicador con la presión.

Pueden, por último, utilizarse métodos de penalización (Carey y Oden, 1986, §3.3.5) para establecer una formulación variacional que implique sólo velocidades, y no presiones, pero sin la complejidad añadida de requerir elementos finitos de divergencia nula. No obstante, pueden presentarse problemas de consistencia que requieren estrategias de cuadratura de la presión especiales.

Por motivos computacionales y de simplicidad de programación de los elementos finitos se ha elegido la formulación mixta velocidad-presión. Para obtener la forma débil del problema de Stokes, al aplicar el teorema de Green podría, en principio, integrarse o no por partes el término de presión. Pero de no hacerlo, se obtendría una formulación menos favorable desde el punto de vista computacional, ya que podrían requerirse elementos de mayor grado para la aproximación de las presiones.

La existencia y unicidad de solución de la forma débil del problema de Stokes se demuestra, *e.g.*, en Quarteroni y Balli (1994, §9.1)

Discretización y aproximación

La formulación débil del problema de Stokes estacionario (7.16), mediante un método mixto velocidad-presión, seguida por la discretización de Galerkin del problema mediante elementos finitos, conduce al un sistema lineal

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \tag{7.17}$$

donde **A** es una matriz $N_h \times N_h$ simétrica y definida positiva y **B** es una matriz rectangular $K_h \times N_h$, siendo N_h y K_h las dimensiones de los espacios de aproximación de velocidades y presiones, respectivamente (Quarteroni y Valli, 1994, §9.2.1). Si la versión discreta de la forma débil asociada al sistema de Stokes (7.16) satisface la denominada condición de compatibilidad (o inf-sup, o Ladyzhenskaya-Brezzi-Babuška; véanse Babuška, 1971; Brezzi, 1974), queda garantizada la existencia y unicidad de la solución del problema; además, con una condición adicional, la solución es estable y la estimación de convergencia es óptima (Quarteroni y Valli, 1994,

§9.2). Podría demostrarse que la condición de compatibilidad se verifica si y sólo si $\ker \mathbf{B}^T = 0$. En tal caso, la matriz global

$$\mathbf{S} := \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & 0 \end{pmatrix}, \tag{7.18}$$

cuya dimensión es $K_h + N_h$, es no singular. Nótese que $\mathbf{S}$ es simétrica pero indefinida (por lo que sus autovalores son reales pero de signo variable). Un sencillo cambio, no obstante, permitiría transformar el sistema (7.17) en otro equivalente, con matriz no simétrica pero definida positiva, por lo que todos sus autovalores tendrían parte real positiva (Quarteroni y Valli, 1994, §9.2).

Sobre la existencia, unicidad, estabilidad y convergencia de sus soluciones aproximadas

En la discretización de elementos finitos del problema débil emplearemos una técnica de tipo Galerkin, tomando los mismos espacios para las funciones test y las funciones de prueba. En las ecuaciones resultantes, las funciones base del espacio V_h de aproximación de las velocidades aparecen derivadas una vez, mientras que las del espacio Q_h de aproximación de las presiones aparecen sin derivar. Resulta, por lo tanto, natural escoger V_h y Q_h tales que $\dim Q_h < \dim V_h$. Argumentos relativos a convergencia y estabilidad de la solución apoyan también esta elección, si bien no constituye una condición ni necesaria ni suficiente para ello (Carey y Oden, 1986, §3.3.3).

Según hemos anticipado, la verificación de la condición de compatibilidad implica la existencia y unicidad de la solución aproximada y, bajo condiciones adicionales, su estabilidad y convergencia. La condición de compatibilidad significa que el espacio V_h es suficientemente rico comparado con el espacio Q_h. Otra implicación importante suya es que evita los modos espurios de presión y, con ello, la inestabilidad en el cálculo de las presiones.

Si la condición de compatibilidad no se verifica, el campo de velocidades puede todavía obtenerse de forma estable y convergente. Sólo la solución de presiones podrá ser contaminada por los modos espurios. Si se desea que la solución para las presiones sea también buena, la forma más evidente de conseguirlo es construir espacios V_h y Q_h que verifiquen la condición de compatibilidad. Si éste no es el caso, sin embargo, pueden emplearse otras alternativas, tales como una estabilización del sistema que relaje la restricción de incompresibilidad sobre $\mathbf{u}_h$ (Quarteroni y Valli, 1994, §9.4), filtrar los modos espurios de la solución de presiones (Quarteroni y Valli, 1994, §9.5) o el uso de macroelementos en el contexto de las aproximaciones de elementos finitos (Quarteroni y Valli, 1994, §9.3).

Hay que destacar que la condición de compatibilidad constituye sólo una condición suficiente, pero no necesaria, por lo que elecciones de espacios de aproximación que no la satisfagan pueden, pese a ello, proporcionar soluciones convergentes y estables. En este sentido, una elección obvia y de bajo coste computacional, que satisface $\dim Q_h < \dim V_h$, es la de funciones base constantes a trozos para Q_h y lineales a trozos para V_h, como ocurre, en el caso bidimensional, con la elección de elementos finitos que se muestra en la Figura 7-1. Estos tipos de elementos, sin embargo, no satisfacen la condición de compatibilidad. Además, puede producirse un fenómeno de bloqueo de la solución de velocidades (Quarteroni y Valli, 1994, §9.3.1; Carey y Oden, 1986, §3.3.3).

La elección de elementos de tipo Taylor-Hood (Taylor y Hood, 1973; Brezzi y Fortin, 1991, §VI.3), con funciones base lineales a trozos para Q_h y cuadráticas a trozos para V_h, sí satisface la condición de compatibilidad. La Figura 7-2 muestra, para el caso bidimensional, elementos de este tipo.

Nótese que todas las consideraciones basadas en la condición de compatibilidad son sólo estrictamente válidas para el problema de Stokes lineal, y no para el no lineal propio de la glaciología. No obstante, la forma de resolver el sistema en glaciología es un proceso iterativo en el cual, en cada paso, se resuelve el sistema lineal resultante de fijar un valor de la viscosidad μ. En consecuencia, sí serán válidas las mencionadas consideraciones cuando se apliquen a cada paso de este proceso iterativo.

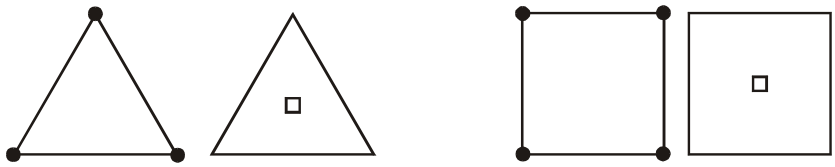

Figura 7-1 Elementos con presión constante y velocidades lineales/bilineales. Punto negro = nodo de velocidad; cuadrado blanco = nodo de presión.

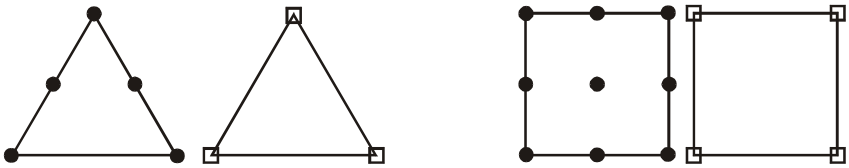

Figura 7-2 Elementos de Taylor-Hood con presión lineal/bilineal y velocidades cuadráticas/bicuadráticas. Punto negro = nodo de velocidad; cuadrado blanco = nodo de presión.

El mejor comportamiento de la elección lineal-cuadrático frente a constante-lineal para Q_h-V_h se ilustra en la Figura 7-3 (Corcuera *et al.*, 2001), donde se muestra la solución de presiones para un plano de flujo del glaciar Johnsons (Isla Livingston, Antártida). Las dos soluciones muestran un patrón general consistente con la física del problema, con máximos de la presión en los lados corriente arriba de los obstáculos más prominentes del lecho y mínimos en el lado corriente abajo. La solución para el caso lineal-constante, sin embargo, muestra (especialmente en el lecho) la inestabilidad característica de la presión para esta elección de los espacios de aproximación.

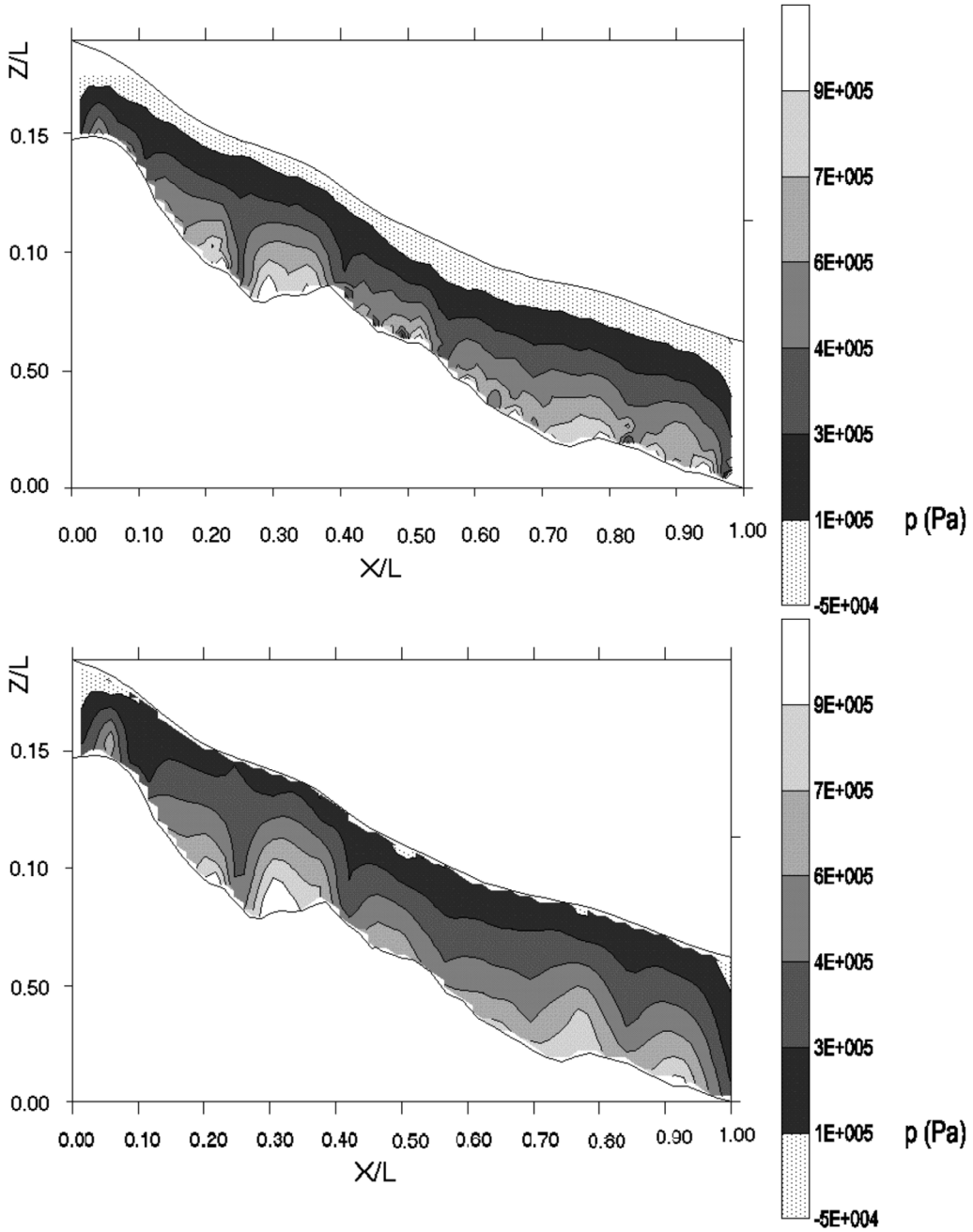

Figura 7-3 Solución para presiones en el glaciar Johnsons. Elementos cuadriláteros. Panel superior: 4 nodos de velocidad y 1 de presión por elemento (**u** bilineal, *p* constante; no verifica condición inf-sup). Panel inferior: 8 nodos de velocidad y 4 de presión por elemento (**u** bicuadrática, *p* bilineal; sí verifica condición inf-sup).

7.3.1.2 Problema de Stokes en dinámica de glaciares

En el caso de la dinámica de glaciares, tomando la ley de Glen como relación constitutiva, el carácter no lineal de ésta implica que los elementos de la matriz **A** en la forma algebraica del sistema de Stokes, (7.17), sean función de la viscosidad μ, que es a su vez función de las velocidades de acuerdo con las ecuaciones (7.15) y (7.4). El sistema resultante, por lo tanto, será no lineal, requiriendo una solución iterativa.

Se describe a continuación el proceso de resolución numérica, siguiendo a Martín *et al.* (2004).

Formulación débil

Tomemos un sistema de referencia cartesiano con coordenada vertical z (positiva hacia arriba) y coordenadas horizontales x e y en direcciones este y norte, respectivamente. Entonces, $\mathbf{g} = (0,0,-g)$.

Para establecer la formulación débil del problema, y de acuerdo con lo discutido anteriormente, escogemos una formulación mixta velocidad-presión, aplicando el argumento de residuos ponderados habitual, multiplicando las ecuaciones (7.1) y (7.2) por funciones test arbitrarias q^u, q^v, q^w, q^p (respectivamente) y haciendo iguales a cero las integrales, sobre el dominio considerado, de los productos resultantes.

Aplicamos a continuación el teorema de Green (integración por partes) a los términos que contienen las derivadas de las tensiones.

La formulación débil queda así establecida en los siguientes términos: encontrar u, v, w, p que satisfagan condiciones de contorno prescritas y tales que

$$\int_\Omega \left(\sigma_{xx} \frac{\partial q^u}{\partial x} + \sigma_{xy} \frac{\partial q^u}{\partial y} + \sigma_{xz} \frac{\partial q^u}{\partial z} \right) d\Omega = \int_\Gamma \left(\sigma_{xx} n_x + \sigma_{xy} n_y + \sigma_{xz} n_z \right) q^u \, d\Gamma \ ,$$

$$\int_\Omega \left(\sigma_{xy} \frac{\partial q^v}{\partial x} + \sigma_{yy} \frac{\partial q^v}{\partial y} + \sigma_{yz} \frac{\partial q^v}{\partial z} \right) d\Omega = \int_\Gamma \left(\sigma_{xy} n_x + \sigma_{yy} n_y + \sigma_{yz} n_z \right) q^v \, d\Gamma \ , \qquad (7.19)$$

$$\int_\Omega \left(\sigma_{xz} \frac{\partial q^w}{\partial x} + \sigma_{yz} \frac{\partial q^w}{\partial y} + \sigma_{zz} \frac{\partial q^w}{\partial z} - \rho g q^w \right) d\Omega = \int_\Gamma \left(\sigma_{xz} n_x + \sigma_{yz} n_y + \sigma_{zz} n_z \right) q^w \, d\Gamma \ ,$$

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) q^p d\Omega = 0 \ ,$$

para todas las funciones test q^u, q^v, q^w, q^p pertenecientes a espacios de naturaleza apropiada (de tipo Sobolev, para las velocidades, y de funciones de cuadrado integrable, para la presión). La solución débil (u,v,w,p) se busca también en esos mismos espacios.

En las ecuaciones anteriores, $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ es el vector unitario normal (saliente) a la frontera Γ del dominio Ω.

Discretización y aproximación

Para obtener una aproximación de elementos finitos a la solución de nuestro problema débil (7.19), discretizamos en primer lugar el dominio Ω como una unión de elementos finitos.

A continuación, introducimos aproximaciones globales a trozos U, V, W, P a las funciones incógnita u ,v ,w, p construyendo subespacios de dimensión finita Φ_u, Φ_v, Φ_w y Φ_p, usando polinomios de Lagrange a trozos. Denotando las funciones base correspondientes como

$$\left\{ N_j^u \right\}_{j=1}^{NU}, \left\{ N_j^v \right\}_{j=1}^{NV}, \left\{ N_j^w \right\}_{j=1}^{NW}, \left\{ N_j^p \right\}_{j=1}^{NP},$$

las soluciones aproximadas (o funciones de prueba) vendrán dadas por

$$U = \sum_{j=1}^{NU} U_j N_j^u, \quad V = \sum_{j=1}^{NV} V_j N_j^v, \quad W = \sum_{j=1}^{NW} W_j N_j^w, \quad P = \sum_{j=1}^{NP} P_j N_j^p \ . \tag{7.20}$$

Las ecuaciones de elementos finitos se construyen mediante el método de Galerkin, tomando los mismos espacios para las funciones de test y de prueba. El problema débil (7.19) conduce, usando las ecuaciones (7.20), la relación constitutiva (7.3) y las definiciones (7.4), al sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}^{uu} & \mathbf{K}^{uv} & \mathbf{K}^{uw} & \mathbf{B}^x \\ (\mathbf{K}^{uv})^T & \mathbf{K}^{vv} & \mathbf{K}^{vw} & \mathbf{B}^y \\ (\mathbf{K}^{uw})^T & (\mathbf{K}^{vw})^T & \mathbf{K}^{ww} & \mathbf{B}^z \\ (\mathbf{B}^x)^T & (\mathbf{B}^y)^T & (\mathbf{B}^z)^T & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{V} \\ \mathbf{W} \\ \mathbf{P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}^x \\ \mathbf{F}^y \\ \mathbf{F}^z \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} , \tag{7.21}$$

donde $\mathbf{U} = (U_1,...,U_{NU})^T$, $\mathbf{V} = (V_1,...,V_{NV})^T$, $\mathbf{W} = (W_1,...,W_{NW})^T$, $\mathbf{P} = (P_1,...,P_{NP})^T$, el superíndice T denota una traspuesta y los elementos de las submatrices y vectores del sistema de ecuaciones (7.21) vienen dados por las siguientes expresiones, en las cuales una coma seguida de subíndice denota derivación parcial respecto a la variable especificada por el subíndice:

$$K_{ij}^{uu} = \int_\Omega \mu (2N_{i,x}^u N_{j,x}^u + N_{i,y}^u N_{j,y}^u + N_{i,z}^u N_{j,z}^u)\, d\Omega \ , \tag{7.22}$$

$$K_{ij}^{vv} = \int_\Omega \mu (N_{i,x}^v N_{j,x}^v + 2N_{i,y}^v N_{j,y}^v + N_{i,z}^v N_{j,z}^v)\, d\Omega \ , \tag{7.23}$$

$$K_{ij}^{ww} = \int_\Omega \mu (N_{i,x}^w N_{j,x}^w + N_{i,y}^w N_{j,y}^w + 2N_{i,z}^w N_{j,z}^w)\, d\Omega \ , \tag{7.24}$$

$$K_{ij}^{uv} = \int_\Omega \mu N_{i,y}^u N_{j,x}^v \, d\Omega \ , \quad K_{ij}^{uw} = \int_\Omega \mu N_{i,z}^u N_{j,x}^w \, d\Omega \ , \quad K_{ij}^{vw} = \int_\Omega \mu N_{i,z}^v N_{j,y}^w \, d\Omega \ , \tag{7.25}$$

$$B_{ij}^x = -\int_\Omega N_{i,x}^u N_j^p \, d\Omega \ , \quad B_{ij}^y = -\int_\Omega N_{i,y}^v N_j^p \, d\Omega \ , \quad B_{ij}^z = -\int_\Omega N_{i,z}^w N_j^p \, d\Omega \ , \tag{7.26}$$

$$F_i^x = \int_\Gamma (\sigma_{xx} n_x + \sigma_{xy} n_y + \sigma_{xz} n_z) N_i^u \, d\Gamma \ , \tag{7.27}$$

$$F_i^y = \int_\Gamma (\sigma_{xy} n_x + \sigma_{yy} n_y + \sigma_{yz} n_z) N_i^v \, d\Gamma \ , \tag{7.28}$$

$$F_i^z = -\int_\Omega \rho g N_i^w \, d\Omega + \int_\Gamma (\sigma_{xz} n_x + \sigma_{yz} n_y + \sigma_{zz} n_z) N_i^w \, d\Gamma \ . \tag{7.29}$$

Estas expresiones ponen de manifiesto la simetría de la matriz del sistema de *NU*+*NV*+*NW*+*NP* ecuaciones (7.21) mencionada anteriormente.

Pese a tener apariencia de sistema lineal, los elementos de las submatrices **K** dependen de la viscosidad μ, que a su vez depende de las derivadas de las velocidades. El sistema será, por lo tanto, no lineal, requiriendo solución iterativa.

7.3.2 Submodelo térmico

7.3.2.1 Ecuación de advección-difusión

La ecuación de conservación de la energía en régimen estacionario, (6.29),

$$\kappa \nabla^2 T \ - \mathbf{u} \cdot \nabla T \ + \ F \ = 0 \ ,$$

es de tipo advección-difusión. Renombrado localmente la temperatura por θ para evitar problemas de notación al desarrollar la solución aproximada mediante el método de elementos finitos, puede rescribirse como

$$\kappa \Delta\theta - \mathbf{u} \cdot \nabla\theta + F = 0 \, . \tag{7.30}$$

Según se ha mencionado anteriormente, la no linealidad de esta ecuación puede provenir de la dependencia de la difusividad con la temperatura, de la dependencia de la velocidad con la temperatura o de la dependencia no lineal de F con θ, obviándose estas dos últimas fuentes de no linealidad al considerar el proceso iterativo que desacopla los submodelos dinámico y térmico. En cuanto a la primera, en la aplicación concreta que desarrollaremos más adelante consideraremos constante la difusividad, al tratarse de un glaciar con espesor de hielo relativamente reducido (espesor máximo del orden de 200 m) y, por consiguiente, con un rango de variación de temperaturas pequeño (del orden de unos pocos grados). La existencia y unicidad de la solución de la forma débil de la ecuación (7.30), considerada como lineal, puede ser asegurada por el lema de Lax-Milgram (*e.g.*, Quarteroni y Valli, 1994, §5.1.1), bajo hipótesis adecuadas para la forma bilineal y el funcional implicados y elecciones apropiadas de las constantes de continuidad y coercividad[84] (Quarteroni y Valli, 1994, §8.1).

Es bien conocido que la resolución numérica de este tipo de ecuaciones, especialmente cuando el término advectivo ($-\mathbf{u}\cdot\nabla\theta$) es dominante frente al difusivo ($\kappa\Delta\theta$), presenta problemas de estabilidad (oscilación de las soluciones) cuando se utilizan esquemas de diferencias finitas centrales o métodos de elementos finitos con formulación de Galerkin estándar (Galerkin-Bubnov). La dominancia del término advectivo frente al difusivo se estima utilizando el denominado número de Péclet

$$\mathrm{Pe} = u_0 l/\kappa \ , \tag{7.31}$$

[84] Que engloba, a su vez, a las constantes de elipticidad y de Poincaré.

siendo u_0 y l una velocidad y una longitud características[85]. Si Pe >> u_0, domina el término advectivo. Las mayores dificultades y los resultados numéricos ambiguos surgen cuando Pe es grande. Considerando la dimensión horizontal, los valores típicos de Pe en glaciología oscilan entre 10^4 y 10^6, siendo el primero característico de glaciares de valle y el segundo de grandes mantos de hielo[86]. Realmente, en el análisis de estabilidad resulta de mayor interés el denominado número de Péclet local (o "de celda"), dependiente del mallado,

$$\mathrm{Pe} = u_0 h / 2\kappa \ , \tag{7.32}$$

donde h es la longitud de paso espacial (tamaño de malla). El factor 2 del denominador, que algunos autores omiten, se introduce por comodidad. Los problemas de inestabilidad de la solución numérica antes mencionados surgen cuando Pe>1. Claramente, si la difusividad y la velocidad son fijas, en principio siempre será posible encontrar un tamaño de malla h lo suficientemente pequeño como para que Pe≤1. Sin embargo, esto no será práctico si implica un mallado excesivamente fino, con el consiguiente coste computacional, que podría resultar inviable en problemas de varias dimensiones. Tal es el caso de la glaciología, donde la condición Pe≤1 requeriría tamaños de malla del orden del metro en glaciares de valle o del orden de la decena de metros en mantos de hielo, claramente inviables desde el punto de vista de coste computacional.

---

[85] Existen, por supuesto, versiones para más dimensiones, que utilizan la norma del vector velocidad e incluso introducen un vector de Péclet. Para nuestros propósitos, sin embargo, basta con esta definición. Se entiende, para casos de varias dimensiones o de mallas irregulares, que h es tal que diam(E)≤h para todo elemento E de la triangulación de elementos finitos.

[86] Considerando la dimensión vertical son bastante menores, del orden de 10 tanto para glaciares como para mantos de hielo.

El origen de la inestabilidad que surge al resolver el problema débil correspondiente a la ecuación (7.30) mediante el método de Galerkin de elementos finitos, o la propia ecuación (7.30) mediante esquemas de diferencias finitas centrales[87], radica en el término advectivo, puesto que las oscilaciones desaparecen al excluir éste de la ecuación, como ocurre, por ejemplo, en el caso de la ecuación de reacción-difusión (Quarteroni y Valli, 1994, §8.2.1). El paralelismo, para el caso unidimensional, con los métodos de diferencias finitas, nos proporciona además la clave para evitar estas oscilaciones al utilizar métodos de elementos finitos. De hecho, al resolver la ecuación aproximando el término advectivo mediante diferencias finitas regresivas (*upwind*, refiriéndonos a la dirección del flujo, aunque sería más propio en nuestro caso decir *upstream*) desaparecen las oscilaciones. Sin embargo, el esquema *upwind* introduce un error de truncamiento local de orden $O(h)$, mientras que el de diferencias centrales es de orden $O(h^2)$. A pesar de esta falta de exactitud, el esquema *upwind* es más adecuado para la aproximación de la solución cuando Pe>1. Este hecho puede ser explicado de forma distinta: la aproximación *upwind* del término advectivo introduce una disipación numérica que puede ser considerada como una discretización directa de un término artificial viscoso, por lo que se utilizan habitualmente los términos difusión numérica o viscosidad numérica para referirse a este efecto. Es también posible interpretar el esquema de diferencias *upwind* como una aproximación de Petrov-Galerkin al problema débil correspondiente. Este método se basa en el uso de espacios funcionales distintos para las funciones test y de prueba (*e.g.*, Quarteroni y Valli, 1994, §8.2.2).

---

[87] Puede demostrarse (*e.g.*, Quarteroni y Valli, 1994, §8.2.1) que la solución aproximada del caso unidimensional, con coeficientes constantes y en una malla regular, mediante el método de Galerkin con polinomios lineales a trozos es equivalente a la aproximación mediante diferencias finitas centrales.

El método de difusión artificial clásica (*e.g.*, Quarteroni y Valli, 1994, §8.3.1; Johnson, 1987, §9.6) es una generalización d-dimensional del esquema de diferencias finitas *upwind*, que introduce una difusión numérica de orden $O(h)$ actuando en todas las direcciones. La idea de este método se explica como sigue: como las oscilaciones del método de Galerkin aparecen cuando el número de Péclet es grande, es decir, cuando la constante de elipticidad es pequeña comparada con la norma[88] de la velocidad $\|\mathbf{u}\|$ y el tamaño de malla h, para evitar estos problemas se considera un problema modificado con una constante de elipticidad mayor. Por ejemplo, añadiendo al operador diferencial L de la ecuación de advección-difusión (7.30)[89] el operador ℓ tal que $\ell\theta = h\|\mathbf{u}\|\Delta\theta$, aumenta el valor de la constante de elipticidad de forma que el método de Galerkin aplicado al nuevo operador conduce a una solución numérica que no se ve afectada por oscilaciones y que puede ser interpretada como la solución de un problema de Galerkin generalizado (Quarteroni y Valli, 1994, §8.3.1 y §5.5). Este procedimiento tiene una clara desventaja: aunque el esquema es consistente, sólo tiene exactitud de primer orden, con independencia del grado polinómico del espacio de elementos finitos. Por lo tanto, el término de estabilización no es compatible con el orden óptimo garantizado por la aproximación polinómica. Puede encontrarse en Quarteroni y Valli (1994, §8.3.1) una estimación del error del método de difusión artificial. Según vemos, la estabilidad se consigue a expensas de la exactitud. Los resultados típicos muestran un comportamiento excesivamente difusivo. En particular, en el caso bidimensional se observa una difusión no sólo a lo largo de las líneas de

---

[88] Por simplicidad, denotaremos $\|\mathbf{u}\|_{L^\infty(\Omega)}$ como $\|\mathbf{u}\|$. Su definición se recuerda en el Apéndice D.

[89] $L = \kappa\Delta - \mathbf{u}\cdot\nabla$.

corriente (las líneas paralelas a **u**) sino también en la dirección perpendicular a **u**, por lo que se denomina difusión transversal (*crosswind diffusion*) a este comportamiento indeseado.

Este comportamiento no deseado puede evitarse añadiendo a L el operador $\hat{\ell}$ tal que

$$\hat{\ell}\theta = h\|\mathbf{u}\|^{-1}\nabla\cdot\big((\mathbf{u}\cdot\nabla\theta)\mathbf{u}\big)\,. \tag{7.33}$$

Este procedimiento, que fue propuesto por Raithby (1976) para métodos de diferencias finitas y por Hughes y Brooks (1979) para métodos de elementos finitos, se denomina método de difusión artificial modificado (*e.g.*, Johnsons, 1987, §9.7) o *streamline upwind* (*e.g.*, Quarteroni y Valli, 1994, §8.3.1) y genera una difusión artificial que contamina la solución aproximada sólo en la dirección de las líneas de corriente. Sin embargo, todavía introduce un término adicional de primer orden, y por lo tanto es sólo exacto hasta orden $O(h)$. Pese a ello, es el método que utilizaremos en nuestra aplicación, ya que, aunque existen otros métodos que evitan las oscilaciones y a la vez tienen mayor exactitud, requieren, para que ésta sea efectiva, espacios polinómicos de mayor grado que implicarían un elevado coste computacional para nuestra aplicación tridimensional. No obstante, dedicaremos unos breves comentarios a estos métodos, puesto que constituirían la mejora natural (en cuanto a exactitud) del método por nosotros utilizado.

Estos métodos se han denominado métodos de estabilización fuertemente consistentes (*e.g.*, Quarteroni y Valli, 1994, §8.3.2) y todos se ajustan a la forma de Galerkin generalizada (Quarteroni y Valli, 1994, §5.5); presentan la propiedad de consistencia fuerte y permiten al método estabilizado mantener la exactitud óptima inherente a la elección del subespacio polinómico de dimensión finita. Estos métodos proporcionan soluciones no oscilatorias incluso cuando el número de Péclet es grande; cierta difusión

numérica permanece, pero afecta fundamentalmente a la solución en la dirección de las líneas de corriente, reduciendo sensiblemente la difusión transversal. Entre estos métodos destaca el denominado método de difusión según las líneas de corriente (*streamline diffusion method*, Johnsons, 1987, §9.7) o SUPG (*Streamline Upwind Petrov-Galerkin*, Quarteroni y Valli, 1994, §8.3.2), propuesto en Hughes y Brooks (1982) y Brooks y Hughes (1982)[90], que utiliza funciones test $q^\theta + \delta q_u^\theta$, donde $\delta = h - \kappa$ y $q_u^\theta = \partial q^\theta / \partial u = \mathbf{u} \cdot \nabla q^\theta$ es la derivada direccional de q^θ según la dirección de $\mathbf{u}$. Puede encontrarse un análisis detallado de la estabilidad y convergencia (con su estimación de error asociada) de los métodos de estabilización fuertemente consistentes en Quarteroni y Valli (1994, §8.4) o en Johnson (1987, §9.7), así como en referencias adicionales allí comentadas.

7.3.2.2 Solución numérica de la ecuación de advección-difusión en glaciología mediante el método de la difusión artificial modificado

Los valores del número de Péclet (sea global o local) típicos de la glaciología mencionados en el apartado anterior indican la dominancia habitual del término advectivo, con los consiguientes problemas de inestabilidad si se aplicara la formulación estándar de Galerkin del método de elementos finitos, lo que justifica nuestra elección del método de la difusión artificial modificado. No obstante, conviene destacar, como hace Paterson (1994, p. 220), que la asunción, realizada en ocasiones en glaciología, de que todos los términos de la ecuación de transferencia de calor (7.30) son despreciables

[90] Pese al acrónimo, este método, según señaló el propio Hughes (1987), no parece ser realmente apropiado, ya que se trata de un método de Galerkin generalizado.

comparados con el término advectivo, será cierta, a lo sumo, en los primeros cientos de metros más cercanos a la superficie de un manto de hielo; a mayores profundidades, la conducción de calor geotérmico no puede ser ignorada.

Formulación débil

De acuerdo con lo discutido en el apartado anterior, añadimos el término $\hat{\ell}\theta$ a la ecuación (7.30), resultando

$$\kappa\Delta\theta + h\|\mathbf{u}\|^{-1}\nabla\cdot\big((\mathbf{u}\cdot\nabla\theta)\mathbf{u}\big) - \mathbf{u}\cdot\nabla\theta + F = 0 \ . \tag{7.34}$$

Para obtener la formulación débil, multiplicamos la ecuación por funciones test arbitrarias q^θ y hacemos igual a cero la integral, sobre el dominio Ω considerado, del producto resultante, obteniendo

$$\begin{aligned}\kappa\int_\Omega \nabla\cdot(\nabla\theta)q^\theta\,d\Omega \ + \int_\Omega h\|\mathbf{u}\|^{-1}\big[\nabla\cdot\big((\mathbf{u}\cdot\nabla\theta)\mathbf{u}\big)\big]q^\theta\,d\Omega \\ - \int_\Omega (\mathbf{u}\cdot\nabla\theta)q^\theta\,d\Omega \ + \int_\Omega Fq^\theta\,d\Omega = 0\,.\end{aligned} \tag{7.35}$$

Aplicando la fórmula de Green (integración por partes) a los términos difusivos, la formulación débil queda establecida en los siguientes términos: encontrar funciones θ, que satisfagan condiciones de contorno prescritas, y tales que

$$\begin{aligned}\kappa\int_\Gamma (\mathbf{n}\cdot\nabla\theta)q^\theta\,d\Gamma \ - \kappa\int_\Omega \nabla\theta\cdot\nabla q^\theta\,d\Omega \ + \int_\Gamma h\|\mathbf{u}\|^{-1}\big[\mathbf{n}\cdot\big((\mathbf{u}\cdot\nabla\theta)\mathbf{u}\big)\big]q^\theta\,d\Gamma \\ - \int_\Omega h\|\mathbf{u}\|^{-1}\big((\mathbf{u}\cdot\nabla\theta)\mathbf{u}\big)\cdot\nabla q^\theta\,d\Omega \ - \int_\Omega (\mathbf{u}\cdot\nabla\theta)q^\theta d\Omega \ + \int_\Omega Fq^\theta\,d\Omega = 0,\end{aligned} \tag{7.36}$$

para toda función test q^θ perteneciente a un espacio de naturaleza apropiada (de tipo Sobolev). La solución débil θ se busca también en ese mismo espacio.

El tercer sumando, que es el término de contorno correspondiente a la difusión artificial, es prácticamente nulo en las aplicaciones glaciológicas porque:

- si el lecho es rígido, se anula en él por ser **u** tangente al lecho y **n** normal a él,
- se anula en las divisorias, por ser **u** tangente y **n** normal a ellas,
- en la superficie, no entra en juego este término, por aplicarse condiciones de contorno de tipo Dirichlet,
- es muy pequeño en las secciones artificiales, puesto que, aunque la velocidad horizontal puede no ser pequeña, el gradiente horizontal de temperaturas es pequeño y, por otra parte, aunque el gradiente vertical de temperaturas puede no ser pequeño, la velocidad vertical es pequeña.

Descartando, consecuentemente, ese término de contorno, la ecuación (7.36) queda, una vez efectuadas las operaciones vectoriales implicadas,

$$\begin{aligned}
&\kappa\int_{\Omega}\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial q^{\theta}}{\partial x}+\frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{\partial q^{\theta}}{\partial y}+\frac{\partial\theta}{\partial z}\frac{\partial q^{\theta}}{\partial z}\right)d\Omega+\int_{\Omega}\left(u\frac{\partial\theta}{\partial x}+v\frac{\partial\theta}{\partial y}+w\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)q^{\theta}\,d\Omega\\
&+\int_{\Omega}h\|\mathbf{u}\|^{-1}\left[u^{2}\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial q^{\theta}}{\partial x}+v^{2}\frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{\partial q^{\theta}}{\partial y}+w^{2}\frac{\partial\theta}{\partial z}\frac{\partial q^{\theta}}{\partial z}\right.\\
&\qquad+uv\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{\partial q^{\theta}}{\partial x}+\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial q^{\theta}}{\partial y}\right)+uw\left(\frac{\partial\theta}{\partial z}\frac{\partial q^{\theta}}{\partial x}+\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial q^{\theta}}{\partial z}\right)\\
&\qquad\left.+vw\left(\frac{\partial\theta}{\partial z}\frac{\partial q^{\theta}}{\partial y}+\frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{\partial q^{\theta}}{\partial z}\right)\right]d\Omega\\
&=\int_{\Omega}F(x,y,z)\,q^{\theta}\,d\Omega+\kappa\int_{\Gamma}\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}n_{x}+\frac{\partial\theta}{\partial y}n_{y}+\frac{\partial\theta}{\partial z}n_{z}\right)q^{\theta}d\Gamma\,.
\end{aligned}\tag{7.37}$$

Discretización y aproximación

Sobre la base de la misma discretización del dominio Ω como una unión de elementos finitos utilizada en la solución aproximada del modelo dinámico, introducimos una aproximación global a trozos Θ a la función incógnita θ construyendo un subespacio de dimensión finita Φ_θ usando polinomios de Lagrange a trozos. Denotando las funciones base correspondientes como $\left\{ N_j^\theta \right\}_{j=1}^{N\theta}$, la solución aproximada (o función de prueba) del problema débil (7.37) vendrá dada por

$$\Theta = \sum_{j=1}^{N\theta} \Theta_j N_j^\theta \ , \tag{7.38}$$

cuyos valores nodales se obtienen como solución del sistema de ecuaciones

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\Theta} = \mathbf{F}^\theta \ , \tag{7.39}$$

donde $\boldsymbol{\Theta} = (\Theta_1, ..., \Theta_{N\theta})^T$ y los elementos de la matriz $\mathbf{A}$ y el vector $\mathbf{F}^\theta$ vienen dados por

$$\begin{aligned} A_{ij} = \kappa \int_\Omega & (N_{i,x}^\theta N_{j,x}^\theta + N_{i,y}^\theta N_{j,y}^\theta + N_{i,z}^\theta N_{j,z}^\theta)\, d\Omega \\ & + \int_\Omega (u N_{j,x}^\theta + v N_{j,y}^\theta + w N_{j,z}^\theta)\, N_i^\theta \, d\Omega \\ & + \int_\Omega h \|\mathbf{u}\|^{-1} \Big(u^2 N_{i,x}^\theta N_{j,x}^\theta + v^2 N_{i,y}^\theta N_{j,y}^\theta + w^2 N_{i,z}^\theta N_{j,z}^\theta \\ & \qquad + uv(N_{i,x}^\theta N_{j,y}^\theta + N_{i,y}^\theta N_{j,x}^\theta) + uw(N_{i,x}^\theta N_{j,z}^\theta + N_{i,z}^\theta N_{j,x}^\theta) \\ & \qquad\qquad + vw(N_{i,y}^\theta N_{j,z}^\theta + N_{i,z}^\theta N_{j,y}^\theta) \Big) d\Omega, \end{aligned} \tag{7.40}$$

$$F_i = \int_\Omega F(x,y,z)\, N_i^\theta \, d\Omega + \kappa \int_\Gamma (N_{j,x}^\theta n_x + N_{j,y}^\theta n_y + N_{j,z}^\theta n_z)\, N_i^\theta \, d\Gamma \ , \tag{7.41}$$

donde, nuevamente, una coma seguida de subíndice denota derivación parcial respecto a la variable especificada por el subíndice. Como, en la resolución del submodelo térmico, u, v, w y F se toman de la solución del submodelo dinámico (y, por lo tanto, dentro del submodelo térmico no dependen de la temperatura), si la difusividad κ se considera independiente de la temperatura, el sistema (7.39) será lineal, aunque, como queda de manifiesto en la ecuación (7.40), la matriz **A** no es simétrica (sí lo es su parte difusiva, pero no su parte advectiva).

7.3.3 Submodelo de evolución de la superficie libre

La ecuación de evolución de la superficie libre (7.10) es advectiva y no lineal. La resolución numérica de las ecuaciones advectivas se efectúa habitualmente mediante métodos de diferencias finitas que combinan discretizaciones espaciales y temporales (*e.g.* van der Veen, 1999, §8.2). Una aproximación alternativa es el empleo de métodos pseudoespectrales (*e.g.* Hindmarsh, 2001). Sin embargo, hemos encontrado más apropiado el uso de métodos semilagrangianos (Staniforth y Côté, 1991). Los esquemas de advección eulerianos funcionan bien en mallas cartesianas regulares, pero a menudo conducen a pasos temporales excesivamente restrictivos debido a consideraciones de inestabilidad computacional. Los esquemas de advección lagrangianos permiten pasos temporales mucho mayores, pero presentan la desventaja de que un conjunto de partículas espaciadas regularmente en el instante inicial generalmente evolucionan hasta convertirse en un conjunto muy irregularmente espaciado en instantes posteriores, e importantes características del flujo pueden, en consecuencia, quedar no bien representadas. La idea que subyace a los esquemas de advección semilagrangianos es la de intentar quedarse con lo mejor de cada una de ambas aproximaciones: la resolución regular de los esquemas eulerianos y la

estabilidad mejorada de los esquemas lagrangianos. Esto se consigue utilizando un distinto conjunto de partículas en cada paso temporal, siendo este conjunto escogido de forma que las partículas llegan exactamente a los puntos de una red cartesiana regular al final del paso temporal.

Centrándonos en nuestro problema, si intentamos resolver iterativamente las ecuaciones de los modelos termomecánico y de evolución de la superficie libre, partiendo de la geometría actual del glaciar, hasta que alcance una configuración de estado estacionario, la ecuación de advección no lineal causa dispersión espuria acoplada con otros campos (velocidades y temperaturas), conduciendo a inestabilidades no lineales (Hindmarsh, 2001). Los esquemas de diferencias finitas para evolución temporal implican migración de modos a diferentes velocidades de fase, mientras que los métodos semilagrangianos muestran buenas velocidades de fase con escasa dispersión (Staniforth y Côté, 1991).

Nuestra implementación del método semilagrangiano utiliza interpolación espacial cúbica y extrapolación temporal lineal de dos pasos. Los algoritmos específicos empleados son (extensión tridimensional de Martín, 2003, §4.4):

- Definimos la posición de llegada $x_a = x_{(i,j)}, y_a = y_{(i,j)}, z_a = z_{(i,j)}$.
- Calculamos en qué punto (x_m, y_m, z_m) se encontraba, en el instante $t = (n+\frac{1}{2})\Delta t$, la partícula de hielo que en el instante $t = (n+1)\Delta t$, está en la posición (x_a, y_a, z_a):

$$\begin{aligned} x_m &= x_a - \frac{\Delta t}{2} u_s\left(x_m, y_m, z_m, (n+\frac{1}{2})\Delta t\right), \\ y_m &= y_a - \frac{\Delta t}{2} v_s\left(x_m, y_m, z_m, (n+\frac{1}{2})\Delta t\right), \\ z_m &= z_a - \frac{\Delta t}{2} w_s\left(x_m, y_m, z_m, (n+\frac{1}{2})\Delta t\right). \end{aligned} \tag{7.42}$$

- Calculamos en qué punto (x_d, y_d, z_d) se encontraba, en el instante $t = n\Delta t$, la partícula de hielo que en el instante $t = (n+1)\Delta t$, está en la posición (x_a, y_a, z_a):

$$\begin{aligned} x_d &= x_a - \Delta t\, u_s\left(x_m, y_m, z_m, (n+\frac{1}{2})\Delta t\right), \\ y_d &= y_a - \Delta t\, v_s\left(x_m, y_m, z_m, (n+\frac{1}{2})\Delta t\right), \\ z_d &= z_a - \Delta t\, w_s\left(x_m, y_m, z_m, (n+\frac{1}{2})\Delta t\right). \end{aligned} \tag{7.43}$$

- Integrando la ecuación de caracterización cinemática de la superficie libre (7.10) con un esquema de dos niveles temporales, usando la regla de integración trapezoidal:

$$\begin{aligned} h^{n+1}_{(i,j,k)} = h(x_d, y_d, z_d, n\Delta t) + \Delta t \Bigg[& a\left(x_m, y_m, z_m, (n+\frac{1}{2})\Delta t\right) \\ & + w_s\left(x_m, y_m, z_m, (n+\frac{1}{2})\Delta t\right) \Bigg]. \end{aligned} \tag{7.44}$$

Las interpolaciones espaciales de velocidades y altitudes son cúbicas para evitar la atenuación de la solución (Martín, 2003, §4.2) y el paso 2 del algoritmo se resuelve iterativamente, siendo

$$\Delta t \le \left(\max\left\{ \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|, \left|\frac{\partial u}{\partial z}\right|, \left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial v}{\partial y}\right|, \left|\frac{\partial v}{\partial z}\right|, \left|\frac{\partial w}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial w}{\partial y}\right|, \left|\frac{\partial w}{\partial z}\right| \right\} \right)^{-1} \tag{7.45}$$

una condición suficiente para su convergencia (extensión tridimensional de Pudykiewicz *et al.*, 1985).

Capítulo 8

Estructura y termomecánica del glaciar Aldegondabreen (Spitsbergen) a partir de datos de georradar y simulaciones numéricas

Con la simulación numérica pretendemos mejorar nuestro conocimiento de la estructura y dinámica de Aldegondabreen, como ejemplo de muchos glaciares de valle de pequeño tamaño de Spitsbergen con terminación en tierra. Esto se conseguirá a través de una combinación de investigaciones de georradar y simulación numérica. Esta última nos permitirá además evaluar la utilidad de modelos numéricos bastante complejos para el estudio de los glaciares politérmicos.

8.1 El glaciar Aldegondabreen

Aldegondabreen es un pequeño (*ca.* 7'6 km² en 1990) glaciar de valle situado en el área de Grønfjorden (Spitsbergen), a *ca.* 77º 58' N, 14º 05' E (Figura 8-1). El glaciar termina en tierra y actualmente abarca un rango de altitudes entre 30 y 450 m.

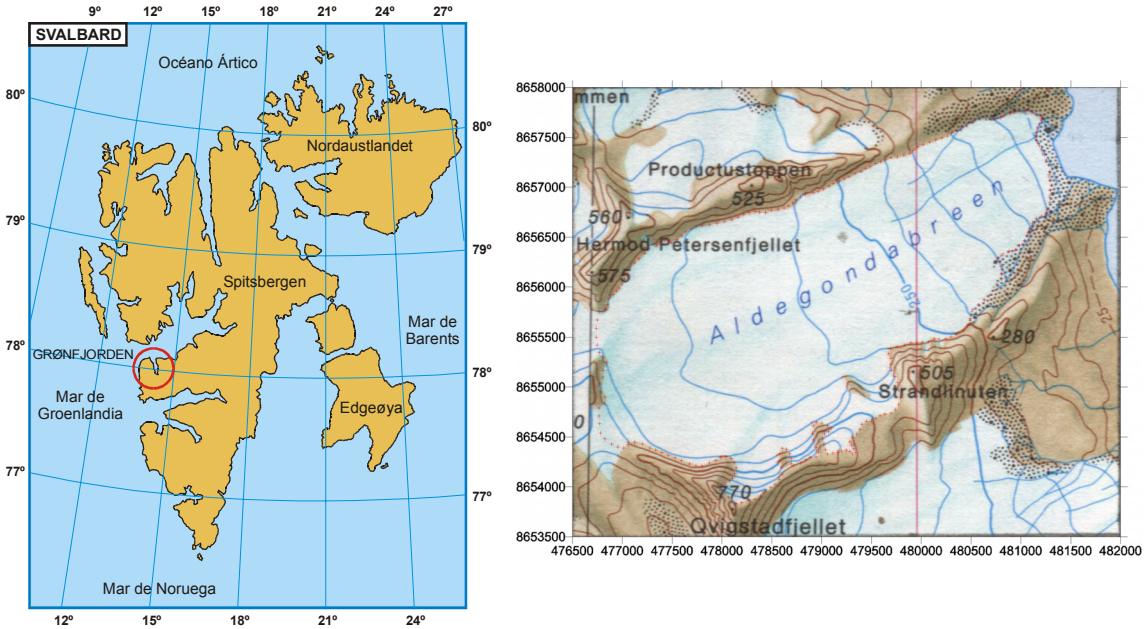

Figura 8-1 Localización de Grønfjorden (izquierda), en la Isla Spitsbergen, del territorio ártico noruego de Svalbard, donde se encuentra Aldegondabreen (derecha).

En 1974-75 se realizó un radioecosondeo desde helicóptero, usando un georradar de 440 MHz, que reveló una estructura politérmica, con un estrato superficial frío y uno templado subyacente, a lo largo de un perfil longitudinal del glaciar, y un espesor de hielo máximo de 150 m en ese perfil (Macheret y Zhuravlev, 1980).

Existen pocos estudios glaciológicos referentes a Aldegondabreen. Se dispone de datos de balance de masa bien documentados sólo para el año de balance 1975-76, para el cual se estimó un balance neto de masa de $-1'10$ m we; el espesor de la cobertura media de nieve de Aldegondabreen, para ese mismo año de balance, se estimó, a partir de 367 medidas, en 1'64 m (Troitsky *et al.*, 1985). En 2002-03 se midió un balance de invierno de +0'45 m we y uno de verano de $-1'80$ m we, resultando un balance anual neto de $-1'35$ m we (B.R. Mavlyudov, comunicación personal a A. Glazovsky). No existen datos documentados sobre velocidades del hielo en Aldegondabreen.

El sistema hidráulico de Aldegondabreen puede considerarse como uno de sus aspectos más estudiados. El glaciar tiene un sistema bien desarrollado de canales y cuevas endoglaciares, con galerías exploradas que alcanzan los 500 m de longitud (Eraso y Pulina, 2001). Dos cauces de agua principales emergen del frente glaciar, uno de ellos próximo a la pared norte del glaciar y el otro en la parte central de la lengua, aunque se sabe que otro cauce o conjunto de cauces discurren bajo la morrena lateral-terminal junto a la pared sur del glaciar.

Durante la primavera, el volumen de agua descargada sólo por la cueva central alcanza varios $m^3 s^{-1}$, decreciendo a valores entre 0'1 y 0'2 $m^3 s^{-1}$ en el verano y siendo prácticamente insignificante durante el otoño y el invierno. A pesar de ello, el largo y estrecho hielo presente en el frente del glaciar, con volumen de *ca.* 40.000 a 50.000 m^3 y espesor de hasta 4 m, es indicativo de flujo de agua durante el invierno desde debajo de la lengua del glaciar (Gokhman y Khodakov, 1985). La descarga media anual de Aldegondabreen ha sido evaluada como muy baja, *ca.* 0'05 $m^3 s^{-1}$ (*e.g.*, Eraso y Pulina, 2001), aunque se reconoce actualmente que este valor fue

ampliamente subestimado, siendo más plausibles valores de hasta 2 a 5 $m^3 s^{-1}$ (A. Eraso, comunicación personal a F. Navarro).

Parte del interés de la hidrología de Aldegondabreen proviene de la sugerencia (Pulina y Postnov, 1989) de que los bajos valores de descarga de Aldegondabreen se deben al drenaje subglacial de Aldegondabreen por el karst de yesos en su lecho, y de que este karst drena la mayor parte de sus aguas hacia el cercano lago Kongress, existiendo planes de utilización de sus aguas para contribuir al suministro de agua del asentamiento minero ruso de Barentsburg. Esta idea del drenaje del karst de Aldegondabreen karst hacia el lago Kongress también ha sido cuestionada (A. Eraso, comunicación personal a F. Navarro).

Aldegondabreen ha experimentado un retroceso significativo desde finales de la Pequeña Edad de Hielo, especialmente desde la segunda mitad del siglo XX. Este retroceso tiene claras manifestaciones en el sistema de morrenas terminales. También se evidencia por varios *eskeres*[91] presentes en el antecampo glaciar, que muestra además estrías y morrenas aflautadas que revelan deslizamiento del glaciar sobre su lecho en el pasado. Este retroceso ha sido evaluado (Glazovsky *et al.*, 2002), en el periodo 1936-1990, comparando el mapa topográfico noruego de 1936 (Norsk Polarinstitutt, 1982), con un modelo digital de altitud (*digital elevation model*, DEM) de Aldegondabreen construido (Glazovsky *et al.*, 2002) a partir de fotografía aéreas tomadas en 1990. Los resultados muestran una disminución, durante

[91] Cuando un glaciar retrocede, los sedimentos acumulados en los canales por los que fluye el agua forman depósitos de arena y grava en forma de montículo alargado, denominado *esker*, que discurre serpenteante paralelamente al canal que lo generó.

el citado periodo, de 930 m (18%) en longitud (línea central), 1'309 km^2 (15%) en área, 28 m (28%) en espesor medio y 0'347 km^3 (38%). Este último es equivalente a un balance neto anual promedio de −0'7 m we durante el periodo 1936-1990. El importante retroceso de Aldegondabreen puede apreciarse en la Figura 8-2, donde se muestran los márgenes del glaciar en 1936 y 1990.

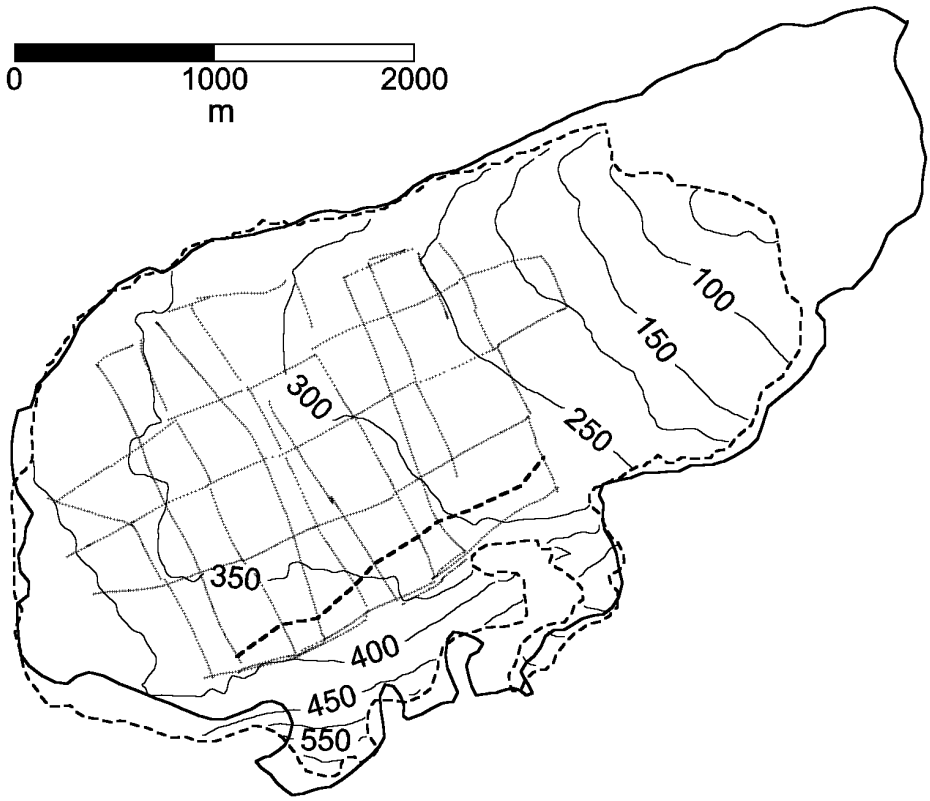

Figura 8-2 Mapa de la superficie de Aldegondabreen que muestra las isolíneas del DEM obtenido a partir de las fotografías aéreas de 1990. Se muestran también los perfiles de georradar efectuados en 1999, así como la supuesta ubicación del canal endoglaciar (línea gruesa a trazos). Se muestran los márgenes del glaciar 1936 (línea continua) y 1990 (línea punteada).

8.2 Métodos

8.2.1 Prospección de georradar y procesado de datos

8.2.1.1 Prospección de georradar

En la primavera de 1999 se efectuó un radioecosondeo de Aldegondabreen en el que participó el director de esta tesis. El equipo utilizado fue un georradar VIRL-2 de 15 MHz de frecuencia central (Vasilenko *et al.*, 2002, 2003), que ha sido descrito en §5.2.2.1, con antenas de tipo dipolo cargado resistivamente al 100% y 5'8 m de longitud. Para la realización de los perfiles, transmisor y receptor se colocaron en trineos de madera separados, arrastrados por una moto de nieve. Las antenas transmisora y receptora se dispusieron paralelas entre sí, a una distancia de 4 m (para garantizar la sincronización emisor-receptor) y transversales a la dirección del perfil.

Se realizó una prospección inicial consistente en 5 perfiles longitudinales y 12 transversales, tomando muestras a intervalos de 5 s entre disparos consecutivos, manteniendo una velocidad constante de *ca.* 2 m s^{-1} (*ca.* 10 m entre registros adyacentes). Se observaron numerosas hipérbolas de difracción en la zona sur del glaciar. Se realizó a continuación una prospección más detallada en esta zona, consistente en 6 perfiles transversales adicionales (de unos 400 m de longitud), utilizando un intervalo de 1 s entre registros (*ca.* 2 m de distancia entre puntos adyacentes). La longitud total de los perfiles realizados fue de 40 km aproximadamente. La malla de perfiles de georradar puede observarse en la Figura 8-2.

8.2.1.2 Proceso de datos

Los datos de georradar fueron procesados utilizando el programa *RadExPro*, de *GSD Production* (Kulnitsky *et al.*, 2001), y constó de corrección estática, interpolación de registros de radar, análisis espectral, corrección de amplitud, filtrado de paso banda, deconvolución, cálculo de la RWV, transformación de Hilbert (fase instantánea), selección (Picking) interactiva de las reflexiones en el lecho y conversión de tiempos a profundidades. Para esta última, se utilizó una RWV de 168 m μs^{-1}, que es el valor de transición entre hielo frío y templado (Macheret *et al.*, 1993), como valor de compromiso entre los obtenidos a partir de las hipérbolas de difracción observadas en los radargramas (*e.g.*, Figura 8-3) y los obtenidos a partir de una medida de CMP. Los detalles del procesado se discuten en Vasilenko *et al.* (2001).

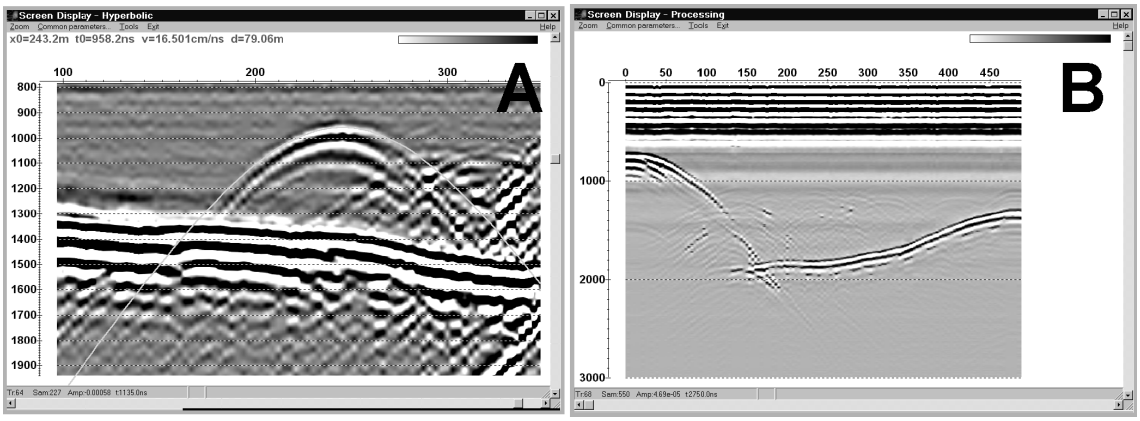

Figura 8-3 a) Radargrama con un ejemplo de difracciones hiperbólicas; b) radargrama donde se aprecia la diferencia entre hielo frío y templado (la zona limpia de reflexiones internas corresponde a hielo frío, mientras que la "ruidosa" corresponde a hielo templado).

8.2.2 Simulación numérica

8.2.2.1 Ecuaciones del modelo

Las hipótesis y las ecuaciones básicas del modelo, desglosado en sus tres submodelos (dinámico, térmico y de evolución de la superficie libre), han sido descritas en el capítulo anterior. En esta aplicación concreta hemos utilizado la versión de estado estacionario (es decir, sin ecuación de evolución de la superficie libre) y tanto modelos isotermos como termomecánicos. La única variación digna de reseñar es que, para la dependencia con la temperatura del parámetro A de la relación constitutiva, se ha tomado el ajuste debido a Dahl-Jensen (1989):

$$A(T) = \left[0'2071\, \mathrm{e}^{0'5978T} + 0'09833\, \mathrm{e}^{0'14747T} \right] 10^{-15}\ \mathrm{a}^{-1}\ \mathrm{Pa}^{-3}\ , \qquad (8.1)$$

con T dado en ºC.

8.2.2.2 Condiciones de contorno

Para el submodelo dinámico, se consideraron tracciones nulas en la superficie. En los nodos basales, las velocidades se fijaron nulas, es decir, se consideró al glaciar soldado a su lecho por congelación. Esto vino impuesto por la no disponibilidad de datos de campo para parametrizar cualquier posible ley de deslizamiento. Las fronteras laterales del glaciar y su zona terminal también se especificaron con velocidad nula, teniendo en cuenta la presencia de un grueso estrato de hielo frío (< 0 ºC) junto a la superficie, como evidencian los radargramas.

Como condiciones de contorno para el submodelo térmico, se toman las temperaturas atmosféricas en la superficie superior, el gradiente de temperaturas consistente con el flujo de calor geotérmico en el lecho y se anulan los gradientes horizontales de temperatura en las paredes laterales. Esta última condición sólo se justifica porque los márgenes reales de espesor nulo (sea en las paredes laterales o en la zona terminal) han sido modelados como secciones verticales de $5\,\mathrm{m}$ de espesor, y el uso para ellos de condiciones de contorno en términos de gradientes de temperatura, en lugar de temperaturas, suaviza la solución y, a la vez, no supone cambios apreciables en la solución numérica. Las temperaturas en la superficie superior se calcularon considerando una temperatura de $-6\,^{\circ}\mathrm{C}$ a nivel del mar (media, sobre el siglo XX, de las temperaturas en la cercana estación meteorológica de Barentsburg) y un gradiente vertical de temperatura atmosférica de $-0'65\,^{\circ}\mathrm{C}/100\,\mathrm{m}$.

8.2.2.3 Solución numérica

Según se describió en el capítulo anterior, el modelo se resuelve mediante un procedimiento iterativo que desacopla los submodelos dinámico y térmico. Los problemas débiles (o variacionales) asociados se discretizan mediante elementos finitos, utilizando una formulación de Galerkin mixta (velocidad-presión) en el submodelo dinámico y de Galerkin generalizado, con el método de la difusión artificial modificado (*streamline upwind*), en el submodelo térmico. Los elementos utilizados fueron hexaedros. La presión se toma constante dentro de cada elemento y las velocidades varían linealmente (en las tres dimensiones) a lo largo de cada elemento. Las integrales por elementos se calculan utilizando cuadratura de Gauss-Legendre, con 4 puntos de integración por elemento, mediante las usuales transformaciones isoparámetricas sobre el elemento maestro. El sistema no lineal resultante

del submodelo dinámico se resuelve iterativamente, utilizando un procedimiento directo de iteración de punto fijo, y el sistema lineal asociado a cada paso de este proceso iterativo, así como el resultante del submodelo térmico, se resuelve mediante un método directo de descomposición LU (Quarteroni y Valli, 1994, cap. 2). Los análisis de sensibilidad del submodelo dinámico han sido descritos en Corcuera *et al.* (2001) y Martín *et al.* (2004); los del térmico fueron realizados con posterioridad y no han sido publicados. La malla usada para nuestros cálculos constó de 21×15×9 = 2835 nodos, que definen 2240 hexaedros.

8.3 Resultados

8.3.1 RWV

Del ajuste a una recta de los datos de $X^2 - T^2$ obtenidos de una medida de CMP, se estimó una RWV media de V = 174'1 ± 3'0 m μs^{-1} y un espesor de hielo $H = 98'8$ m en el punto medio común. El coeficiente de correlación fue $R^2 = 0'903$. Esta velocidad es típica de hielo frío y es consistente con la ubicación del punto de medida cerca de la zona terminal del glaciar, donde el estrato de hielo templado se supone que es muy delgado o incluso inexistente.

También se estimó la RWV a partir de varias hipérbolas de difracción presentes en los radargramas, especialmente en los correspondientes a la zona sur del glaciar, a profundidades de *ca.* 60 a 80 m. Su velocidad media es 164'5±4'1 m μs^{-1}, que es un valor típico de hielo templado (Macheret *et al.*, 1993). Aunque en esta zona existe ciertamente tal estrato, el hecho de que,

según los radargramas, está recubierto por un estrato de hielo frío que alcanza los 90 m de espesor en ciertas áreas (véase, *e.g.*, la Figura 8-3) y que las hipérbolas están situadas a profundidades de *ca.* 60 a 80 m implica que la columna de hielo por encima de los difractores debería ser fundamentalmente hielo frío; la RWV debería pues esperarse que fuera mayor. Las estimaciones de velocidad a partir de hipérbolas de difracción, por lo tanto, están infraestimadas. Debido a ello, y considerando la RWV de 174'1 m μs^{-1} determinada a partir de datos de CMP, se prefirió utilizar, para la conversión de tiempos a profundidades, un valor conservador de 168 m μs^{-1}, que es el valor de transición entre hielo frío y templado (Macheret *et al.*, 1993).

8.3.2 Topografía superficial, espesores de hielo y relieve subglacial

El mapa de espesor de hielo en 1999, construido a partir de datos de georradar, se muestra en la Figura 8-4a. El espesor medio del hielo es de 73 m. Los valores máximos se observan en la zona sur del glaciar, donde se alcanza un máximo absoluto de 216 m.

La Figura 8-4b muestra la topografía del lecho, calculada sustrayendo el espesor del hielo de la topografía superficial dada por el DEM de 1990 (Figura 8-2). La información de altitudes de la superficie registrada durante el radioecosondeo de 1999 no es adecuada para este propósito, debido a su pobre resolución vertical (GPS trabajando en modo autónomo). Se puede apreciar en el mapa que todo el lecho glaciar se encuentra por encima del nivel del mar.

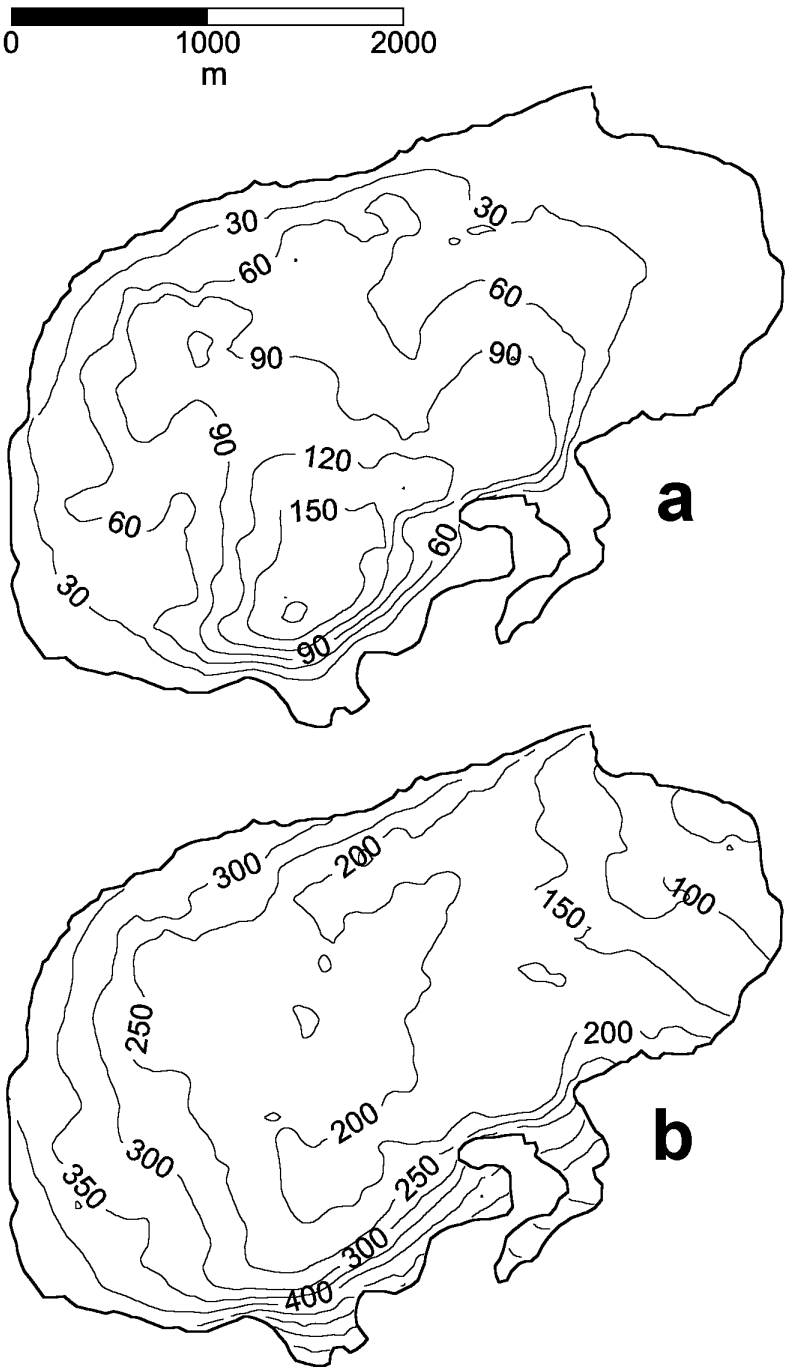

Figura 8-4 a) Mapa de espesores de hielo obtenido a partir de los datos de georradar de 1999;
b) mapa de topografía del lecho.

8.3.3 Campos de temperatura, velocidad y tensiones

Los resultados para el campo de temperaturas del hielo junto al lecho glaciar, calculados usando el modelo termomecánico, se muestran en la Figura 8-5, junto con las temperaturas correspondientes a la superficie superior (condiciones de contorno).

El campo de temperaturas calculado no es compatible con la estructura politérmica observada a partir de los radargramas, en amplias porciones del glaciar (especialmente en su parte sur). Esto se debe con toda probabilidad a que el modelo utilizado no considera los efectos de las capas de nieve y neviza, ni tampoco el calor liberado en las transiciones de fase agua-hielo, que son factores importantes en los glaciares politérmicos.

Por esta razón, preferimos calcular el campo de velocidades usando la versión isoterma del modelo, con una temperatura media de –6'0 ºC. En la Figura 8-6 y en la Figura 8-7 puede observarse una muestra de los resultados del modelo referentes a los campos de velocidades y tensiones correspondientes a la configuración actual del glaciar, con la suposición de las condiciones de contorno discutidas anteriormente (que no consideran deslizamiento basal).

Las velocidades representadas son las de la superficie superior. Sus valores máximos están ligeramente por encima de los 3 m a^{-1} y corresponden a la zona de fuerte pendiente situada en la parte sur del glaciar. Respecto a las tensiones, se muestran las tensiones desviadoras efectivas en la superficie y junto al lecho, así como las componentes principales del balance de fuerzas (tensión conductora –*driving stress*– y arrastre basal –*basal drag*–). Las tensiones desviadoras efectivas están por debajo de los 0'7 bar (0'07 MPa), apareciendo los valores cercanos a 0'7 bar sólo en la porción central de la

zona sur del glaciar, donde se conjugan las fuertes pendientes y el máximo espesor de hielo.

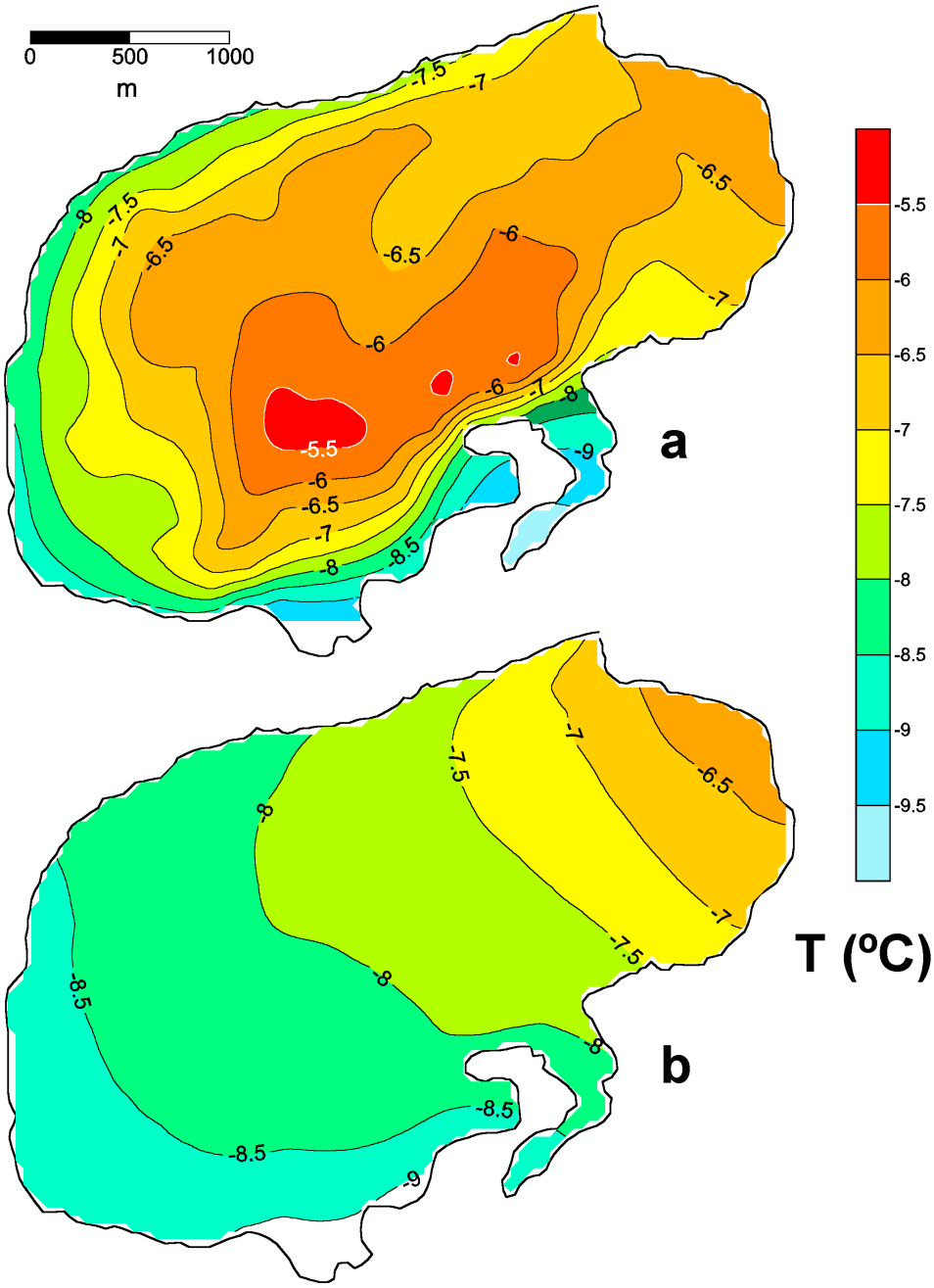

Figura 8-5 a) Temperaturas calculadas por el modelo termomecánico junto al lecho;
b) temperaturas en la superficie superior suministradas al modelo como condiciones de contorno.

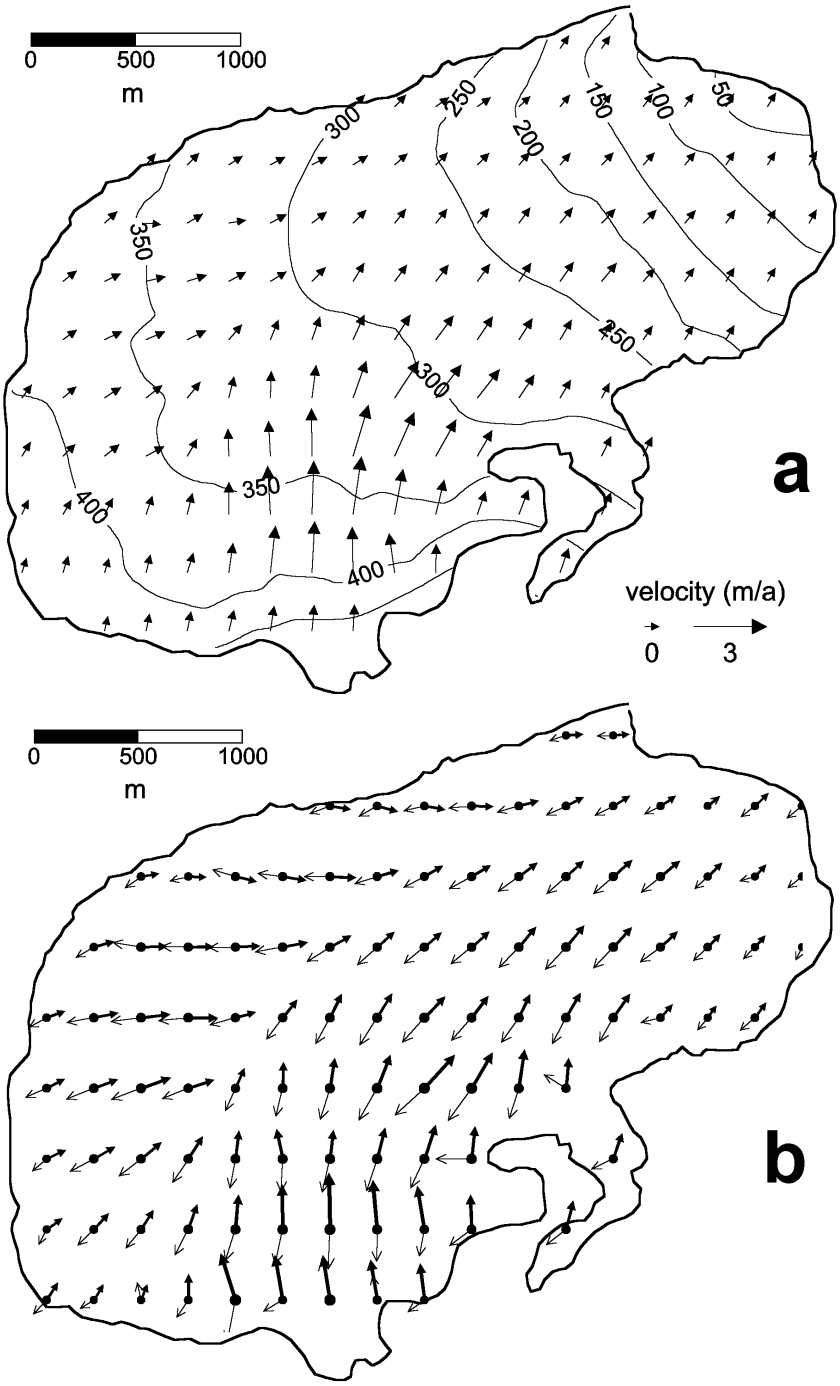

Figura 8-6 (a) Campo de velocidades horizontales calculadas en la superficie del glaciar;
(b) componentes principales del balance de fuerzas: tensión conductora (flechas gruesas) y arrastre basal (flechas finas).

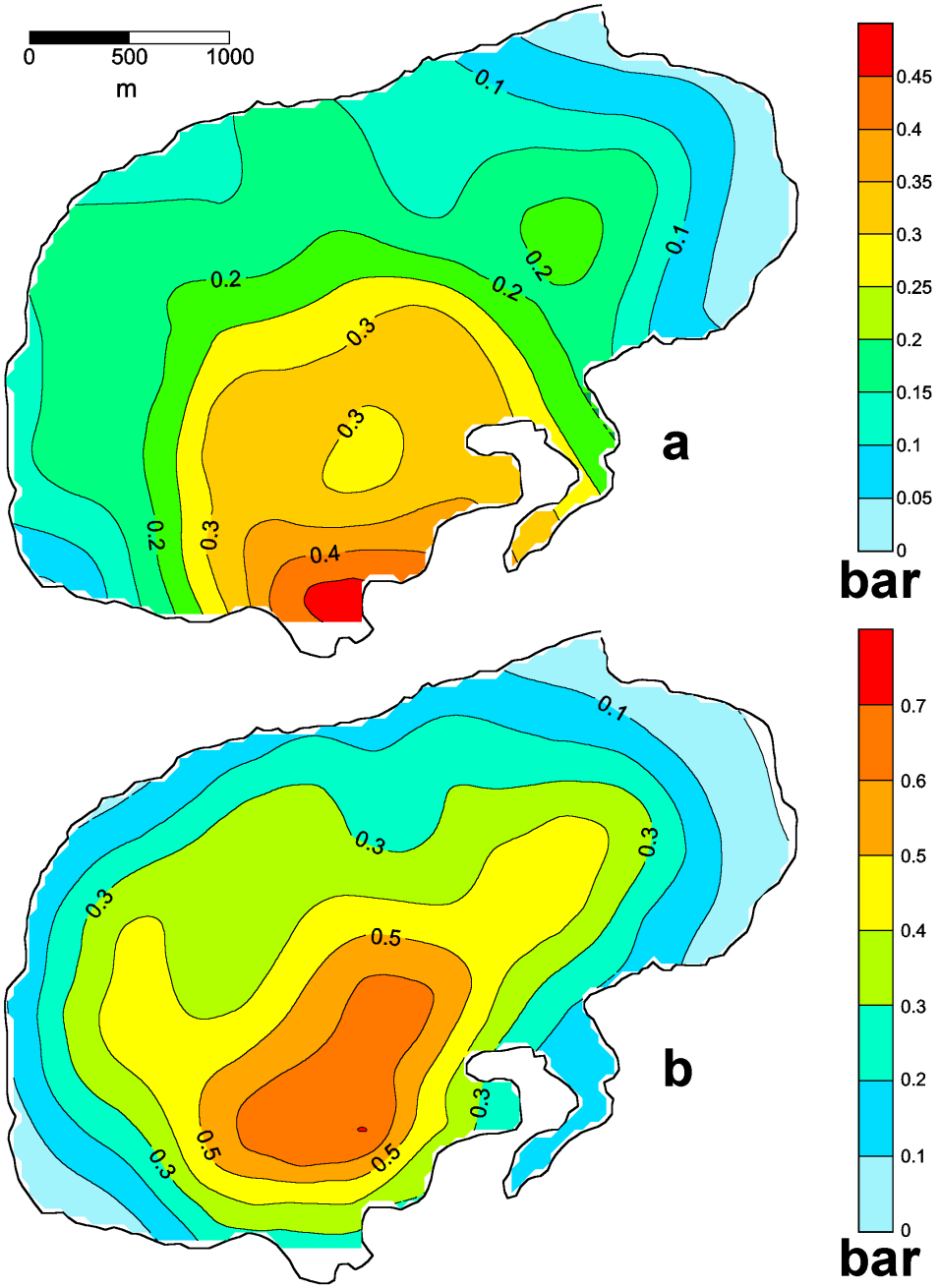

Figura 8-7 (a) tensión desviadora efectiva calculada en la superficie del glaciar; y (b) junto al lecho.

8.4 Discusión

Las discrepancias en las estimaciones de la RWV a partir de datos de CMP y de hipérbolas de difracción apuntan el interés de la realización de medidas más detalladas, bien mediante el método CMP o mediante la técnica de perfiles próximos y paralelos descrita por Macheret (2000), puesto que las medidas clásicas de hipérbolas de difracción llevan asociadas amplias incertidumbres. Se requerirían asimismo sistemas de posicionamiento más precisos, puesto que este factor tiene una gran influencia sobre los resultados. Por ejemplo, un procedimiento de migración efectivo requiere datos de posicionamiento y de RWV más precisos. Cálculos efectuados con un modelo de reflector puntual muestran que incluso errores pequeños, del orden del 1 al 2 %, en la determinación de la distancia a lo largo del perfil de georradar, conducen a errores significativos (1 a 2 m μs^{-1}) en la estimación de la RWV a partir de hipérbolas de difracción. Estudios más detallados de la distribución en profundidad de la RWV, bien a partir de hipérbolas situadas a distintas profundidades (*e.g.*, Benjumea *et al.*, 2003) o mediante el método de la semblanza (Neidell y Taner, 1971), permitirían realizar estimaciones de la distribución del contenido en agua del hielo, que tiene una influencia notable sobre la reología del hielo templado, puesto que, según se ha indicado en el capítulo anterior, el parámetro A de la relación constitutiva depende fuertemente del contenido en agua (Lliboutry and Duval, 1985).

Los datos registrados desde la superficie del glaciar en 1999 (georradar de 15 MHz) confirman la estructura politérmica biestratificada postulada por los datos tomados desde helicóptero en 1974 (georradar de 440 MHz). El estrato de hielo frío alcanza profundidades de 90 m en la parte sur del glaciar. El

máximo espesor de hielo, 216 m, se alcanza también en esta zona. Todo el lecho del glaciar se encuentra por encima del nivel del mar y la topografía subglacial no revela accidentes notables sino, al contrario, una progresión bastante suave a lo largo de toda la parte central del glaciar y fuertes pendientes cerca de las paredes que lo delimitan.

En la parte sur del glaciar, un patrón repetitivo de difracciones hiperbólicas observado en todos los perfiles transversales que cubren esta zona, a profundidades de 50 a 80 m y con pendiente en la dirección de la lengua del glaciar, ha sido interpretado como un canal endoglaciar que se origina en el hielo templado (Figura 8-2). Esto es consistente con la presencia de una corriente o conjunto de corrientes de agua que fluyen bajo la morrena lateral-terminal junto a la pared sur del glaciar.

Los cambios en longitud a lo largo de la línea central, área, espesor medio de hielo y volumen de Aldegondabreen durante el periodo de 1936 a 1990, mencionados en la introducción, muestran que el glaciar ha experimentado un retroceso dramático durante ese periodo, consistente con el aumento en 1'12 ºC en temperatura media observado en la cercana estación meteorológica de Barentsburg durante el mismo, que es parte de un aumento mayor, en 1'65 ºC, desde enero de 1912 hasta agosto de 1990. Es también consistente con el calentamiento regional en Spitsbergen que siguió al final de la Pequeña Edad de Hielo y con la tendencia general de recesión de los glaciares observada en esta región. Además, la estimación cuantitativa de −0'7 m we como cambio medio en espesor de hielo durante el período comprendido entre 1936 y 1990 es comparable con los únicos datos de

balance de masa disponibles para Aldegondabreen (−1'1 m we en el año de balance 1976-77 y −1'35 m we en 2002-03) y consistente con el balance de masas neto de muchos otros glaciares de Spitsbergen durante la segunda mitad del siglo XX (Dyurgerov, 2002).

Según se ha mencionado anteriormente, los resultados de temperatura del modelo termomecánico no son consistentes con la estructura politérmica de Aldegondabreen. Atribuimos esto, principalmente, a los siguientes factores:

1) nuestro modelo no considera una capa de neviza en la zona de acumulación y la habitual infiltración de agua, recongelación y procesos de intercambio de calor típicos de ella (nótese que el calor de deformación ha sido la única fuente interna de calor considerada en el modelo);
2) tampoco considera los efectos de aislamiento térmico de la capa de nieve en la zona de ablación;
3) no se incluye un modelo hidráulico que proporcione un mecanismo rápido de intercambio de calor entre la superficie y las zonas más profundas del glaciar;
4) no considera la frontera libre entre los estratos de hielo frío y templado;
5) no se tienen en consideración transiciones de fase hielo-agua-vapor en la superficie del glaciar.

Teniendo presentes todas estas limitaciones, no resulta sorprendente que un modelo numérico matemáticamente complejo y robusto, que proporciona buenos resultados cuando se aplica a mantos de hielo fríos (artículo en preparación), no resulta útil para la aplicación discutida, puesto que no incorpora algunos de los procesos físicos involucrados, que han resultado ser cuantitativamente importantes. La inclusión de muchos de esos procesos, sin

embargo, implica la necesidad de disponer de un amplio número de parámetros libres en el modelo, lo que a su vez requiere disponer de un buen número de observaciones de campo de variado tipo para constreñir los valores de esos parámetros. Por supuesto, si la solución de temperaturas generada por la versión de estado estacionario del modelo no resulta apropiada, no tiene sentido considerar ningún tipo de análisis de evolución temporal como respuesta a condiciones climáticas cambiantes.

La versión isoterma del modelo, sin embargo, proporciona resultados que son al menos cualitativamente importantes. Debemos destacar que se trata de un modelo de orden superior que resuelve el sistema dinámico de Stokes completo, sin descartar ningún término, lo que lo convierte en ideal para la simulación de glaciares de valle o zonas de los mantos de hielo, tales como las divisorias de hielo o los glaciares de descarga (*outlet glaciers*), donde las hipótesis de la SIA no se verifican. El campo de velocidades simulado es plenamente consistente con las pendientes de superficie y lecho. En general, el principal componente del balance de fuerzas que se opone a la tensión conductora es el arrastre basal; el arrastre lateral (*lateral drag*) es apreciable fundamentalmente en la zona de fuertes pendientes próxima a la pared sur del glaciar y las fuerzas normales (*normal forces*) también aportan su mayor contribución en esta zona, donde son extensionales, mientras que son compresivas (aunque pequeñas) en la zona terminal del glaciar. Las tensiones desviadoras efectivas son también mayores en la zona sur; las de la superficie alcanzan su máximo cerca del muro sur, mientras que las próximas al lecho lo hacen en la zona de mayor espesor de hielo.

Respecto a las limitaciones de los resultados del modelo dinámico, debe resaltarse que deberían ser entendidas desde un punto de vista cualitativo, más que cuantitativo, debido fundamentalmente a la falta de datos de campo necesarios para ajustar adecuadamente los parámetros del modelo (nótese, por ejemplo, la total ausencia de medidas de velocidad de hielo en la superficie del glaciar o la de medidas de la presión de agua basal). Esta ha sido la razón de no haber introducido una ley de deslizamiento basal en el modelo, lo que implica no considerar los efectos de la presión de agua basal sobre el movimiento del glaciar. El espesor de hielo en la zona terminal disminuye gradualmente hasta cero lo que, considerado conjuntamente con las temperaturas medias anuales, sugeriría que no hay deslizamiento sobre el lecho en la zona terminal. Sin embargo, ya se ha mencionado la presencia de estrías y morrenas aflautadas en el antecampo glaciar, lo que proporciona evidencias de (al menos) deslizamiento basal en el pasado. Además, podrían darse perfectamente en la actualidad condiciones de deslizamiento en zonas del glaciar con hielo de mayor espesor, donde existe un estrato de hielo templado y podría esperarse la presencia de agua en la interfaz hielo-lecho.

Otra mejora en el modelo dinámico resultaría de considerar las influencia del contenido en agua sobre el parámetro A de la ley constitutiva, puesto que, según se ha mencionado en el capítulo anterior, un aumento del 0'8% en el contenido en agua implica, de acuerdo con la fórmula de Duval (1977), recogida en la expresión (7.11), un aumento correspondiente de la velocidad de deformación efectiva $\dot{\varepsilon}$ en un factor de 3.

8.5 Conclusiones

Del análisis realizado pueden extraerse las siguientes conclusiones principales:

- Los datos de georradar registrados en 1999 confirman la estructura politérmica biestratificada del glaciar Aldegondabreen, con un estrato de hielo frío que alcanza los 90 m en la zona más profunda del glaciar, donde el espesor de hielo alcanza 216 m.
- La presencia de canales de agua endoglaciares puede ser inferida combinando el análisis de las hipérbolas de difracción presentes en los radargramas y la observación de evidencias hidrológicas.
- Los modelos termomecánicos requeridos para realizar estimaciones cuantitativas fiables de los campos de temperatura, velocidad y tensiones para glaciares politérmicos, y su evolución temporal, han de incorporar necesariamente un número de procesos físicos que implica un amplio espectro y una gran cantidad de datos de campo para constreñir los valores de los parámetros involucrados en la simulación de tales procesos.

Capítulo 9

Conclusiones y líneas de trabajo futuro

9.1 Conclusiones

En esta tesis se ha desarrollado un procedimiento propio para procesar los datos de georradar que permite visualizar el interior del glaciar y medir los espesores del hielo. Las imágenes obtenidas tras el procesado desvelan la estructura interna del glaciar y ofrecen datos sobre su hidrología, sobre la disposición de las grietas y su comunicación con estratos más profundos, sobre la interfaz entre los estratos de hielo frío y templado de los glaciares politérmicos, etc.

El procedimiento desarrollado puede dividirse esquemáticamente en dos fases, la de preparación de los datos, o preprocesado, y la del procesado en sí mismo. En el preprocesado se corrigen los errores de medida, ya sean introducidos por los equipos o por el sistema de registro (supresión del desplazamiento DC, eliminación de las trazas ruidosas, interpolación de trazas, reubicación de las mismas, etc.). En el procesado, por su parte, se realiza una secuencia de pasos que intercala una serie de filtros y ganancias que facilitan una correcta deconvolución y su posterior migración, antes de la conversión de los TWT a profundidades, para finalizar con una corrección topográfica.

El correcto procesado es, además, la garantía de una fuente de datos de espesores de hielo fiables para definir la geometría del modelo numérico.

Este procedimiento de procesado se ha aplicado al glaciar Hurd (Isla Livingston, Antártida), permitiéndonos determinar su geometría.

De la medida de sus espesores, se han revelado profundidades máximas de más de 200 m con valores medios en la zona de acumulación de *ca.* 120 m.

Se ha observado la existencia bajo el glaciar de una cordillera longitudinal entre el monte Reina Sofía y los islotes Sally Rocks, y otras transversales que unen Punta Salisbury con los Picos Mac Gregor; Punta Henry con las rocas cercanas al Pico Moores; y éstas con el monte Reina Sofía por debajo de la divisoria.

Se aprecian también depresiones situadas entre estas cordilleras, que forman valles cerrados, dando lugar a los máximos espesores del glaciar.

En esta tesis, por otro lado, también se ha realizado un exhaustivo análisis de los métodos que otros autores han propuesto para la obtención de los parámetros físicos del hielo, comparando los diferentes métodos y concluyendo los más adecuados para cada aplicación. La realización de este análisis ha desvelado errores que están extendidos en la aplicación de los métodos (*e.g.*, el uso que se ha dado a las expresiones de Looyenga o de Paren) y que así han sido puestos de manifiesto, tanto teóricamente como en su aplicación práctica, lo que ha llevado al autor al desarrollo de nuevos procedimientos de cálculo.

Cada uno de los parámetros físicos medidos, de manera aislada, es de importancia en el modelado numérico del glaciar. Pero, además, se han establecido las relaciones entre ellos, que proporcionan información sobre el glaciar, su distribución de temperaturas, su hidrología, etc. Así, el contenido en agua (W) es importante para establecer la relación constitutiva en el hielo templado. La RWV, directamente relacionada con el contenido en agua, se necesita para migrar correctamente el radargrama y para transformar sus valores de TWT a profundidades, proporcionando la geometría del modelo. A pesar de que actualmente el modelo numérico supone la incompresibilidad del medio, la densidad (ρ) resulta de utilidad por ser fuente de información

del tipo de medio (nieve, neviza o hielo) existente en el estrato más superficial y por su relación con los dos parámetros anteriores.

Los valores de RWV y *W* calculados en el glaciar Hansbreen confirman su estructura politérmica, con la presencia de un estrato frío sobre otro templado, y una estructura de drenaje bien desarrollada. Se ha observado la evolución temporal de estos estratos: es nítida la escasez de agua en la primavera, antes del comienzo del deshielo; al comienzo del verano el agua se acumula en la zona superior del estrato templado; al avanzar el verano se detecta la aparición de aire en forma de canales de drenaje en el interior del hielo, éstos transportan el agua, que finalmente se concentra en la zona inferior.

La velocidad media desde la superficie obtenida en Hansbreen a partir de los registros CMP realizados es de *ca.* 169 m μs^{-1}, lo que coincide con los valores obtenidos durante el procesado de los datos de georradar, como mejor valor de migración.

Los valores calculados en el glaciar Hurd, más homogéneos, representan un glaciar templado. Sus medidas, al comienzo del verano, no dejan ver grandes contenidos en agua. La velocidad media desde la superficie obtenida en este glaciar, tras despreciar el valor obtenido en presencia de grietas, es de *ca.* 165'4 m μs^{-1}, lo que es acorde con el valor utilizado durante el procesado de los datos de georradar (165 m μs^{-1}), obtenido también como mejor valor en la migración, y con el carácter templado del glaciar.

El estudio de estos parámetros se complementa con el de unos índices energéticos reflectivos, que aportan evidencias de la estructura en el interior y en lecho, que se relacionan fundamentalmente con la distribución de su contenido en agua, lo que facilita la adopción de una ley de deslizamiento adecuada a cada caso.

El análisis de las definiciones previas y de los usos realizados de estos índices ha llevado al autor a la proposición de nuevos procedimientos de cálculo, redefiniendo sus expresiones y sus ventanas de cálculo, así como de nuevos índices, que proporcionan información más precisa sobre el glaciar (*BRM*, *IRE*, IRP_E, etc.).

Estos métodos de cálculo de parámetros físicos, aplicados a Hansbreen, nos han permitido conocer su estructura a lo largo de un perfil transversal cercano a la línea de equilibrio, abundando en la estructura politérmica del glaciar.

Se ha detectado la existencia de canales de drenaje que transportan el agua de la superficie hasta el lecho. También se han encontrado grietas sepultadas en las que se ha acumulado agua. La evolución de los índices a lo largo del verano ha hecho patente el transporte de agua de las zona superior del estrato de hielo templado al principio del verano, a su zona inferior al final del mismo.

La acumulación superficial de agua ha provocado la disminución de la potencia transmitida al subsuelo, lo que ha supuesto un descenso en los índices energéticos reflectivos medidos, obteniendo el efecto opuesto al señalado por Gades (1998, p. 54, 57 y 81), quien indica que la energía transmitida al interior del glaciar aumenta cuando hay agua en la superficie. Esta diferencia puede deberse a que en nuestro caso la antena se encontraba a 30 cm de la superficie, mientras que Gades la situó en contacto con el

agua. Sería, por ello, de interés disponer de una medida de la variación de la potencia transmitida a través de la superficie. La medida de la onda directa no sirve, por saturar el receptor. Este problema no ha sido solucionado aún.

Se ha desarrollado, además, en esta tesis, un submodelo térmico que complementa al dinámico y de superficie libre previamente desarrollados. La solución aproximada del modelo no se realiza a través de un método Galerkin estándar, sino a través de otro optimizado (difusión artificial mejorado), que evita las inestabilidades habituales en aquél.

El modelo termomecánico resultante se ha aplicado a Aldegondabreen, de cuyo análisis se ponen de manifiesto las siguientes conclusiones principales:

- Los datos de georradar registrados en 1999 confirman la estructura politérmica biestratificada del glaciar Aldegondabreen, cuyo estrato de hielo frío alcanza los 90 m en la zona más profunda del glaciar, donde el espesor de hielo alcanza 216 m.
- Puede inferirse la presencia de canales de agua endoglaciares combinando el análisis de las hipérbolas de difracción presentes en los radargramas y la observación de evidencias hidrológicas.
- Los resultados de temperatura obtenidos de la aplicación del modelo termomecánico no son consistentes con la estructura politérmica de Aldegondabreen. El modelo numérico utilizado es matemáticamente complejo y robusto, y proporciona buenos resultados cuando se aplica a mantos de hielo fríos (artículo en preparación); a pesar de ello, no resulta útil para la aplicación discutida, puesto que no incorpora algunos de los procesos físicos indicados, que han resultado ser cuantitativamente importantes.

Respecto a la versión isoterma del modelo, puede concluirse que al menos proporciona resultados cualitativamente importantes:

- Al tratarse de un modelo de orden superior que resuelve el sistema dinámico de Stokes completo, sin descartar ningún término, puede considerarse ideal para la simulación de glaciares de valle o zonas de los mantos de hielo, tales como las divisorias de hielo o los glaciares de descarga (*outlet glaciers*), donde las hipótesis de la SIA no se verifican.
- Aplicada a un glaciar politérmico, como Aldegondabreen, el campo de velocidades simulado es plenamente consistente con las pendientes de superficie y lecho. En general, el principal componente del balance de fuerzas que se opone a la tensión conductora es el arrastre basal; el arrastre lateral (*lateral drag*) es apreciable fundamentalmente en la zona de fuertes pendientes próxima a la pared sur del glaciar y las fuerzas normales (*normal forces*) son más contributivas en esta zona, donde son extensionales, mientras que en la zona terminal del glaciar son compresivas (aunque pequeñas). Las tensiones desviadoras efectivas son también mayores en la zona sur; las de la superficie alcanzan su máximo cerca del muro sur, mientras que las próximas al lecho lo hacen en la zona de mayor espesor de hielo.
- Respecto a las limitaciones de los resultados de la aplicación del modelo dinámico sobre Aldegondabreen, debe resaltarse que deben entenderse en forma cualitativa, más que cuantitativa, fundamentalmente por la falta de datos de campo (*e.g.*, inexistencia de medidas de velocidad de hielo en la superficie del glaciar o de medidas de la presión de agua basal), necesarios para realizar adecuadamente el ajuste de los parámetros del modelo.

9.2 Líneas de trabajo futuro

Los trabajos desarrollados en esta tesis ponen de manifiesto la necesidad de profundizar y continuar en las siguientes líneas de trabajo:

- Los modelos termomecánicos requeridos para realizar estimaciones cuantitativas fiables de los campos de temperatura, velocidad y tensiones para glaciares politérmicos, y su evolución temporal, deben incorporar necesariamente un número de procesos físicos que abarca un amplio espectro y una gran cantidad de datos de campo para acotar los valores de los parámetros involucrados en la simulación de tales procesos.
- Otra mejora en el modelo dinámico resultaría de considerar la influencia del contenido en agua sobre el parámetro A de la ley constitutiva, puesto que cada aumento en el contenido en agua lleva asociado otro en la velocidad de deformación efectiva $\dot{\varepsilon}$.
- La mejora del algoritmo numérico de resolución del submodelo térmico aconseja hacer uso del método SUPG, pero debe valorarse la utilidad de éste, ante el incremento de coste computacional que implica.
- La inclusión en el modelo termomecánico de los procesos físicos indicados implica la necesidad de que éste disponga de gran número de parámetros libres, lo que a su vez requiere de un buen número de observaciones de campo de variado tipo para acotar los valores de esos parámetros.
- La adquisición y procesado de perfiles tridimensionales, por agrupación de perfiles paralelos, proporciona nuevas fuentes de información en el procesado de los datos, acotando en mayor medida las ambigüedades que el procesado bidimensional no resuelve. Esta línea de trabajo implica el desarrollo de nuevas formas de adquisición en campo y la inclusión posterior de nuevas técnicas de procesado.

- Debe incorporarse al procedimiento de procesado de datos el análisis de velocidades utilizando el mismo software ReflexW, en la actualidad realizado externamente, utilizando Matlab, que proporcione un análisis exhaustivo de la velocidad por diferentes métodos.
- Se ha encontrado una sistemática tendencia en el ámbito glaciológico a utilizar expresiones para el cálculo de parámetros físicos que han sido obtenidas para su aplicación con bajas densidades (nieve) y con bajos contenidos en agua (régimen pendular), en situaciones que incumplen estos requisitos. Para el correcto cálculo de estos parámetros es preciso realizar un estudio de las modificaciones que requieren estas expresiones para poder ser utilizadas en cualquier medio glaciar.
- Un estudio de la sensibilidad a cada variable de las diferentes expresiones revelaría los procedimientos de cálculo más convenientes para la medida de cada parámetro físico. Esto permitiría planificar adecuadamente el tipo de medidas a realizar en el glaciar.
- Para el correcto uso de las expresiones de cálculo de parámetros físicos en los glaciares se requieren ciertos valores de permitividad, densidad, etc., para los diferentes tipos de medio, como son las diferentes clases de nieve, la neviza o el hielo, tanto glaciares como de laboratorio. En este sentido, es necesario realizar un estudio que, por comparación con los datos experimentales, desvele los valores más apropiados para cada caso, de acuerdo con el tipo de medio (*e.g.*, nieve, neviza, hielo), por el tipo o ubicación del glaciar (*e.g.*, frío, templado o politérmico; en el alto ártico canadiense o en Spitsbergen), etc., proporcionando además una fuente de información para el uso de valores apropiados cuando no puedan ser medidos (*e.g.*, ρ_d en el cálculo de W).
- Sería de interés disponer de una medida de la variación de la potencia transmitida a través de la superficie. La medida de la onda directa no sirve, por saturar el receptor.

Bibliografía

Agmon, N. (1996). Tetrahedral displacement: the molecular mechanism behind the Debye relaxation in water. *Journal of Physical Chemistry,* **100** (3), 1072-1080. Erratum, **101** (21), 4352 (1997).

Alley, R.B. (1992). Flow law hypothesis for ice sheet modeling. *Journal of Glaciology*, **38**, 245-256.

Ambach, W. y Denoth, A. (1980). The dielectric behavior of snow: A study versus liquid water content. presented at *NASA Workshop on the microwave Remote Sensing of Snowpack Properties,* Ft. Collins, CO, NASA CP-2153.

Annan, A.P. (2001), *Ground Penetrating Radar: Workshop Notes*, Sensors and Software, Inc., Mississauga (Ontario), 192 p.

Annan, A.P. y Davis, J.L. (1976). Impulse radar sounding in permafrost. *Radio Science*, **4**, 383-394.

Annan, A.P. y Davis, J.L. (1978). Methodology for radar transillumination experiments. *Report of Activities, Geological Survey of Canada*, Paper 78-1B, 107-110.

Arcone, S.A., O'Neill, K., Delaney, A.J. y Sellmann, P.V. (2000). UXO Detection at Jefferson Proving Ground using ground-penetrating radar. *U.S. Army Corps of Engineers, Cold Regions Research and Engineering Laboratory,* Technical Report ERDC/CRREL TR-00-5. Hannover (New Hampshire).

Azuma, N. y Goto-Azuma, K. (1996). An anisotropic flow-law for ice-sheet ice and its implications. *Annals of Glaciology*, **23**, 202-208.

Babuška, I. (1971). Error bounds for finite element methods. *Numer. Math*, **16**, 322-333.

Bahr, D.B. y Rundle, J.B. (1995). Theory of lattice Boltzmann simulations of glacier flow. *Journal of Glaciology,* **41**, 634-640.

Baker, R.W. (1987). Is the creep of ice really independent of of the third deviatoric stress invariant?. En *The Physiccal Basis for Ice Sheet Modelling. Proceedings of the Vancouver Symposium*, IASH public. **170**, 7-16.

Bamber, J.L. (1988). Enhanced radar scattering from water inclusions in ice. *Journal of Glaciology,* **34** (118), 293-296.

Bamber, J.L. (1989). Ice/bed interface and englacial properties of Svalbard ice masses deduced from airborne radio echo-sounding data. *Journal of Glaciology,* **35** (119), 30-37.

Baral, D.R. y Hutter, K. (2001). Asymptotic theories of ice sheets and ice shelves. N.J. Balmforth y A. Provenzale (Eds.), *Geomorphological Fluid Mechanics,* Springer-Verlag, 227-278.

Baysal, E., Kosloff, D.D. y Sherwood, W.C. (1983) Reverse time migration. *Geophysics,* **48** (11), 1514-1524.

Beasley, C. y Lynn, W. (1992). The zero-velocity layer: Migration from irregular surfaces. *Geophysics,* **57** (11), 1435-1443.

Benjumea, B., Macheret, Yu.Ya., Navarro, F.J. y Teixidó, T. (2003). Estimation of water content in a temperate glacier from radar and seismic sounding data. Annals of Glaciology, 37, 317-324.

Bennet, M.R. y Glasser, N.F. (1996). *Glacial Geology. Ice Sheets and Landforms.* John Wiley and Sons.

Benson, R.C., Glaccum, R.A. y Noel, M.R. (1984). *Goephysical Techniques for Sensing Buried Wastes and Waste Migration.* U.S. Dept of Commerce. National Technical Information Service, PB84-198449. Springfield. 255 p.

Bentley, C.R. (1998). Rapid sea-level rise from a West Antarctic ice-sheet collapse: a short-term perspective. *Journal of Glaciology,* **44** (146), 157-163.

Bentley, C.R., Lord, N. y Liu, C. (1998). Radar reflections reveal a wet bed beneth stagnant Ice Stream C and frozen bed beneath ridge BC, West Antarctica. *Journal of Glaciology,* **44** (146), 149-156.

Berry, M.V. (1972). On deducing the form of surfaces from their diffracted echoes. *Journal of Physics A: General Physics,* **5** (2), 272-291.

Berry, M.V. (1973). The statistical properties of echoes diffracted from rough surfaces. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London,* **273** (1237), 611-654.

Berryhill, J.R. (1979). Wave-equation datuming. *Geophysics,* **44** (8), 1329-1344.

Bleistein, N., Cohen, J.K. y Stockwell, J.W. Jr. (2001). *Mathematics of Multidimensional Seismic Imaging, Migration, and Inversion.* Springer-Verlag. New York. 510 p.

Bogorodsky, V.V., Bentley, C.R., y Gudmandsen, P.E. (1985). *Radioglaciology.* D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland. 254 p.

Brenner, S.C. y Scott, L.R. (1994). *The Mathematical Theory of Finite Element Methods.* Springer-Verlag, New York.

Brezzi, F. (1974). On the existence, uniqueness and approximation of saddle point problems arising from lagrangian multipliers. *RAIRO*, **8-R2**, 129-151.

Brezzi, F. y Fortin, M (1991). *Mixed and Hybrid Finite Element Methods.* Springer-Verlag.

Brooks, A.N. y Hughes, T.J.R. (1982). Streamline Upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, **32**, 199-259.

Budd, W.F. (1969). The dynamics of ice masses, *ANARE Sci. Rep.*, Ser. A (IV), Glaciol. Publ. 108.

Calvo, N. (1999). Análisis y Resolución Numérica de Algunos Modelos Matemáticos de Frontera Libre en Glaciología, Tesis Doctoral, Universidad de Vigo.

Calvo, N. (2000). *Análisis y Resolución de algunos Modelos Matemáticos de Frontera Libre en Glaciología.* Tesis Doctoral, Universidad de Vigo.

Carey, G.F. y Oden, J.T. (1986). *Finite Elements: Fluid Mechanics* (Texas Finite Element Series, vol. VI), Prentice-Hall.

Chun, J.H. y Jacewitz, C.A. (1981). Fundamentals of frequency domain migration. *Geophysics,* **46** (5), 717-733.

Claerbout, J.F. (1985). *Fundamentals of Geophysical Data Processing.* Blackwell Scientific Publications, Palo Alto (California), 274 p.

Claerbout, J.F., Green, C., y Green, I. (1996). *Imaging the Earth's Interior.* Stanford University, Stanford (California). 368 p.
E-book, http://sepwww.stanford.edu/sep/prof/index.html.

Claerbout, J.F., y Black, J.L. (2001). *Basic Earth Imaging.* Stanford University, Stanford (California). 222 p.
E-book, http://sepwww.stanford.edu/sep/prof/index.html.

Clarke, T.S. y Bentley, C.R. (1994). High-resolution radar on Ice Stream B2, Antarctica: measurements of electromagnetic wave speed in firn and strain history from buried crevasses. *Annals of Glaciology,* **20**, 153-159.

Colbeck, S.C. (1973). Theory of metamorphism of wet snow. *U.S. Army Corps of Engineers, Cold Regions Research and Engineering Laboratory,* Research Report **311**. Hannover (New Hampshire).

Colbeck, S.C. (1982). The geometry and permittivity of wet snow at high frecuencies. *Journal of Applied Physics,* **53** (6), 4495-4500.

Cole, K.S. y Cole, R.S. (1941). Dispersion and absorption in dielectrics I. Alternating current characteristics. *The Journal of Chemical Physics*, **9**, 341-351.

Copland, L. y Sharp., M. (2001). Mapping thermal and hydrological conditions beneath a polythermal glacier with radio-echo sounding. *Journal of Glaciology*, **47** (157), 232-242.

Corcuera, M.I., Martín, C., Navarro, F.J., Calvet, J. y Ximenis, L. (2002). A flowplane model of the dynamics of Johnsons Glacier (Livingston Island, South Shetland Islands, Antarctica). *New Zealand J. Geol. Geophys. Bull. Roy. Soc.* New Zealand, **35**, 381-390.

Corcuera, M.I., Navarro, F., Martín, C., Calvet J. y Ximenis, L. (2001). Finite element modelling of the steady-state dynamics of Johnsons Glacier. *Materialy Glyatsiologicheskikh Issledovaniy* [*Data of Glaciological Studies*], **90**, 156-168.

Crank, J. (1984). *Free and Moving Boundary Problems.* Clarendon Press, Oxford.

Cumming, W.A. (1952). The dielectric properties of ice and snow at 3'2 centimeters. *Journal of Applied Physics,* **23** (7), 768-773.

Dahl-Jensen, D. (1989). Steady thermomechanical flow along two-dimensional flow lines in large grounded ice sheets. *Journal of Geophysical Research*, **94** (B8), 10355-10362.

Daniels, D.J. (2004). *Ground Penetrating Radar, 2nd Ed.,* The Institution of Electrical Engineers (IEE), London, 726 p.

Davis, J.L., y Annan, A.P. (1989). Ground-penetrating radar for high-resolution mapping of soil and rock statigraphy. *Geophysical Prospecting,* **37**, 531-551.

Debye, P. (1929) *Polar Molecules*. Mineloa, New York: Dover Publications.

Dell'Isola, F. y Hutter, K. (1999). A free moving boundary problem for the till layer below large ice sheets. En Athanasopoulos, I., Makrakis, G. y Rodrigues, J.F., eds.: *Free Boundary Problems, Theory and Applications.* CRC Press. Londres.

Denoth, A. (2003). Structural phase changes of the liquid water component in Alpine snow. *Cold Regions Science and Technology,* **37** (3), 227-232.

Díaz, I. y Schiavi, E. (1999). On a degenerate system in glaciology giving rise to a free boundary. En Athanasopoulos, I., Makrakis, G. y Rodrigues, J.F., eds.: *Free Boundary Problems, Theory and Applications.* CRC Press. Londres.

Dix, C.H. (1955) Seismic velocities from surface measurements. *Geophysics,* **20** (1), 68-86.

Dobrin, M.B. (1976). *Introduction to Geophysical Prospecting*. 3ª edición. Mc Graw-Hill. New York, 630 p.

Dobrin, M.B. y Savit, C.H. (1988). *Introduction to Geophysical Prospecting*. 4ª edición. Mc Graw-Hill. New York, 867 p.

Duval, P. (1977). The role of the water content on the creep rate of polycrystalline ice. *Int. Assoc, Hydrol. Sci.*, **118**, 29-33.

Dyurgerov, M. (2002). Glacier Mass Balance and Regime: Data of Measurements and Analysis. INSTAAR Occasional Paper No. 55, ed. M. Meier y R. Armstrong. Institute of Arctic and Alpine Research, University of Colorado, Boulder.

Eraso, A. y M. Pulina. (2001). *Cuevas en Hielo y Ríos bajo los Glaciares,* 2nd ed. Madrid, McGraw-Hill.

Evans, S. (1965). Dielectric properties of ice and snow - a review. *Journal of Glaciology,* **5** (42), 773-792.

Fabregat-Santiago, F., Ferriols, N.S., García-Belmonte, G., Bisquert, J. y Morell, I. (1999), Estudio de los diferentes estados energéticos del agua del suelo en función de los fenómenos de relajación dieléctrica. En: *Estudios en la Zona No Saturada del Suelo.* Eds. R. Muñoz-Carpena, A. Ritter, C. Tascón, 39-44. ICIA: La Laguna.

Fastook, J.L. (1987). The finite element method applied to a time-dependent flowband model. En van der Veen, C.J. y Oerlemans, J., eds.: *Dynamics of the West Antarctic Ice Sheet,* 203-221. Reidel, Dordrecht.

Fastook, J.L. y Chapman, J.E. (1989). A map-plane finite-element model: three modeling experiments. *Journal of Glaciology,* **35**, 48-52.

Fisher, E., McMechan, G.A. y Annan, A.P. (1992). Acquisition and processing of wide-aperture ground-penetrating radar data. *Geophysics,* **57** (3), 495-504.

Fowler, A.C. (1977). Glacier Dynamics, Doctoral Thesis, Oxford University.

Fowler, A.C. (1987b). A theory of glacier surges. *Journal of Geophysical Research,* **92**(**B**), 9111-9120.

Fowler, A.C. (1997). *Mathematical Models in the Applied Sciences.* Cambridge University Press.

Fowler, A.C. y Johnson, C. (1995). Hydraulic runaway: a mechanism for thermally regulated surges of ice sheets. *Journal of Glaciology,* **41**, 554-561.

Fowler, A.C. y Johnson, C. (1996). Ice sheet surging and ice stream formation. *Annals of Glaciology,* **23**, 68-73.

Fowler, A.C. y Schiavi, E. (1998). A theory of ice sheet surges. *Journal of Glaciology,* **44**, 104-118.

Frolov, A.D. y Macheret, Yu.Ya. (1999). On dielectric properties of dry and wet snow. Hydrological Processes, 13, 1755-1760.

Furdada, G., Pourchet, M. y Vilaplana, J.M. (1999). Study of johnsons glacier (Livingston Island, Antarctica) by means of shallow ice cores and their tephra and by analisis of 137Cs contents. Acta Geológica Hispánica, **34**, 391-401.

Gades, A.M. (1998). *Spatial and Temporal Variations of Basal Conditions Beneath Glaciers and Ice Sheets Inferred From Radio Echo Soundings.* Tesis doctoral, Univ. de Washington.

Gades, A.M., Raymond, C.F., Conway, H. y Jacobel, R.W. (2000). Bed properties of Siple Dome and adjacent ice streams, West Antarctica, inferred from radio-echo sounding measurements. *Journal of Glaciology*, **46** (152), 88-94.

Gardner, L.W. (1947). Vertical velocities from reflection shooting. *Geophysics,* **12** (2), 221-228.

Gazdag, J. (1978). Wave equation migration with the phase-shift method. *Geophysics,* **43** (7), 1342-1351.

Gazdag, J. y Sguazzero, P. (1984). Migration of seismic data by phase-shift plus interpolation. *Geophysics,* **49** (2), 124-131.

Glazovsky, A., Kolondra, L., Moskalevsky, M. y Jania, J. (1992). Research into the Hansbreen, a tidewater glacier in Spitsbergen. *Polar Geogr. Geol.,* **16** (3), 243-252.

Glazovsky, A., Macheret, Yu.Ya., Navarro, F. y Vasilenko, E.V. (2002). Aldegondabreen: RES studies and ice volume change in last 54 years. Meeting of the Working Group on Arctic Glaciology of International Arctic Science Committee (IASC), Obergurgl, Austria (abstract).

Glen, J.W. (1955). The creep of polycrystalline ice. *Proceedings of the Royal Society of London*, Ser. A, **228**, 519-535.

Glen, J.W. (1958). The flow law of ice. A discussion of the assumptions made in glacier theory, their experimental foundations and consequences. *Int. Assoc. of Scient. Hydrology*, **47**, 171-183.

Glen, J.W. y Paren, J.G. (1975). The electrical properties of snow and ice. *Journal of Glaciology,* **15** (73), 15-38.

Gokhman, V.V. y Khodakov, V.G. (1985). Gidrologiya lednikov i lednikovykh basseynov [Hydrology of glaciers and glacier basins]. In Kotlyakov, V.M., *ed. Glyatsiologiya Shpitsbergena* [*Glaciology of Spitsbergen*], 62-80. Moscow, Nauka, 200 p. (en Ruso).

Goldsby, D.L. y Kohlstedt, D.L. (2001). Superplastic deformation of ice: Experimental observations. *Journal of Geophysical Research*, **106** (B6), 11017-11030.

Gough, S.R. (1972). A low temperature dielectric cell and the permittivity of hexagonal ice to 2 K. *Canadian Journal of Chemistry,* **50** (18), 3046-3051.

Gray, S.H. (1997). Where is the zero-velocity layer?. *Geophysics,* **62** (1), 266-269.

Green, C.H. (1938). Velocity determinations by means of reflection profiles. *Geophysics,* **3** (4), 295-305.

Gudmundsson, G.H. (1999). A three-dimensional numerical model of the confluence area of unteraargletscher, bernese alps, Switzerland. *Journal of Glaciology,* **45**, 219-230.

Hale, I.D. (1991). Stable explicit depth extrapolation of seismic wavefields. *Geophysics,* **56** (11), 1770-1777.

Hamran, S.E., Aarholt, E., Hagen, J.O. y Mo, P. (1996). Estimation of relative water content in a sub-polar glacier using surface-penetration radar. *Journal of Glaciology,* **42** (142), 533-537.

Han, B. (1998). A comparison of four depth-migration methods. *68th Annual Meeting SEG 1998 Expanded Abstracts,* 1104-1107.

Hanson, B. (1990). Thermal response of a small ice cap to climatic forcing. *Journal of Glaciology*, **36** (122), 49-56.

Hanson, B. (1995). A fully three-dimensional finite-element model applied to velocities on Storglaciëren, Norway. *Journal of Glaciology*, **41** (137), 91-102.

Hindmarsh, R.C.A. (2001). Notes on basic glaciological computational methods and algorithms. R. Greve, H. Ehrentraut, Y. Wang y B. Straughan (Eds.), *Continuum Mechanics in Geophysics and the Environment*, p. 222-249. Springer-Verlag, Berlín.

Hindmarsh, R.C.A., Navarro, F. y Martín, C. (2004). Una contribución a la datación del retroceso de la línea de anclaje del banco de hielo de Ross (Antártida). *Métodos Computacionais em Engenharia*, APMTAC, Lisboa.

Hodge, S.M. (1985). Two-dimensional, time-dependent modeling of an arbitrary shaped ice mass with the finite-element technique. *Journal of Glaciology,* **31** (109), 350-359.

Holberg, O. (1988). Towards optimum one-way wave propagation. *Geophysical Prospecting,* **36** (2), 99-114.

Hooke, R. LeB. (1981). Flow law for polycrystalline ice in glaciers: Comparison of theoretical predictions, laboratory data and field measurements. *Reviews of Geophysics and Space Physics,* **19**, 664-672.

Hooke, R. LeB. (1998). *Principles of Glacier Mechanics.* Prentice Hall, Upper Saddle River (New Jersey). 248 p.

Hubral, P. y Krey, T. (1980). *Interval Velocities from Seismic Reflection Time Measurements,* Society of Exploration Geophysicists, Tusla, 203 p.

Hughes, T.J.R. (1987). Recent progress in the development and understanding of SUPG methods with special reference to the compressible Euler and Navier-Stokes equations. *Internat. J. Numer. Methods Fluids*, **7**, 1261-1275.

Hughes, T.J.R. y Brooks, A.N. (1979). A multidimensional upwind scheme with no crosswind diffusion, en T.J.R. Hughes (Ed.), *Finite Elements Methods for Convection Dominated Flows.* 19-35, The American Society of Mechanical Engineers.

Hughes, T.J.R. y Brooks, A.N. (1982). A theoretical framework for Petrov-Galerkin methods with discontinuous weighting functions: application to the streamline-upwind procedure, en R.H. Gallagher, D.H. Norrie, J.T. Oden y O.C. Zienkiewicz (Eds.), *Finite Elements in Fluids.*, ***4***, 47-65, John Wiley & Sons.

Huisman, J.A., Hubbard, S.S., Redman, J.D. Y Annan, A.P. (2003). Measuring soil water content with ground penetrating radar: a review. *Vadose Zone Journal,* **2**, 476-491.

Hutter, K. (1983). *Theoretical Glaciology*. Reidel, Dordrecht.

Huybrechts, P., Payne, T. y EISMINT Intercomparison Group (1996). The EISMINT benchmarks for testing ice-sheet models. *Annals of Glaciology,* **23**, 1-12.

IEEE (Inst. of Electrical and Electronic Engrs.) (1998), *IEEE Standard Definitions of Terms for Radio Wave Propagation.* IEEE Std 211-1997 (Revisión del IEEE Std 211-1990), IEEE, New York, 39 p.

Jania, J., Mochnacki, D. y Gadek, B. (1996). The thermal structure of Hansbreen, a tidewater glacier in southern Spitsbergen. *Polar Research,* **15** (1), 53-66.

Jiracek, G.R. y Bentley, C.R. (1971). Velocity of electromagnetic waves in antarctic ice. *Antarctic Res. Ser.,* AGU, Washington, D.C.**16**, 199-208.

Johnson, C. (1987). *Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method*, Cambridge University Press.

Kamb, B. (2001). Basal zone of the West Antarctic ice streams and its role in lubrication of their rapid motion. En R. B. Alley y A. Bindschadler (Eds.), *The West Antarctic Ice Sheet. Behavior and Environment*, 157-200, American Geophysical Union.

Koh, G. (1992). Dielectric constant of ice at 26'5-40 GHz. *Journal of Applied Physics,* **71** (10), 5119-5122.

Koh, G. (1997). Complex dielectric constant of ice at 1'8 GHz. *Cold Regions Science and Technology,* **25** (2), 119-121.

Kovacs, A., Gow, A.J. y Morey, R.M. (1995). The in-situ dielectric constant of polar firn revisited. *Cold Regions Science and Technology,* **23** (3), 245-256.

Kulnitsky, L.M., Gofman, P.A. y Tokarev, M.Yu. (2001). Matematicheskaya obrabjtka dannykh georagiolokatsii i sistema RADEXPRO [Mathematical processing of georadar data and RADEXPRO system]. *Razvedka i okhrana nedr* [Prospecting and Protecting of the Earth], **3**, 6-11. (en Ruso).

Lehmann, F. y Green, A.G. (2000). Topographic migration of georadar data: implications for acquisition and processing. *Geophysics*, **65** (3), 836-848.

Levin, F.K. (1971). Apparent velocity from dipping interface reflections. *Geophysics,* **36** (3), 510-516.

Li, J., Jacka, T.H. y Budd, W.F. (1996). Deformation rates in combined compression and shear for ice which is initially isotropic and after the development of strong anisotropy. *Annals of Glaciology*, **24**, 247-252.

Lliboutry, L. (1971). Permeability, brine content and temperature of temperate ice. *Journal of Glaciology*, **10**, 15-29.

Lliboutry, L. (1983). Modifications to the theory of intraglacial waterways for the case of subglacial ones, *Journal of Glaciology*, **29** (102), 216-226.

Lliboutry, L. y Duval, P. (1985). Various isotropic and anisotropic ices found in glaciers and polar ice caps and their corresponding rheologies. *Annales Geophysicae*, **3**, 207-224.

Looyenga, H. (1965). Dielectric constants of heterogeneous mixtures. *Physica,* **31** (3), 401-406.

Macheret, Yu.Ya. (2000). Otsenka soderzhaniya vody v lednikakh po giperbolicheskim otrazheniyam [Estimación del contenido en agua en glaciares mediante hipérbolas de reflexión]. *Glyatsiologicheskikh Issledovaniy* [*Datos de Estudios Glaciológicos*], **89**, 3-10. (en Ruso).

Macheret, Yu.Ya. y Glazovsky, A. (2000). Estimation of absolute water content in Spitsbergen glaciers from radar sounding data. *Polar Research,* **19** (2), 205-216.

Macheret, Yu.Ya. y Zhuravlev, A.B. (1980). Radiolokatsionnoe zondirovanie lednikov Shpitsbergena s vertoleta [Radio-eco sondeo de glaciares en Spitsbergen desde helicóptero]. *Materialy Glyatsiologicheskikh Issledovaniy* [*Datos de Estudios Glaciológicos*], **37**, 109-131. (en Ruso).

Macheret, Yu.Ya., Moskalevsky, M.Y. y Vasilenko, E.V. (1993). Velocity of radio waves in glaciers as an indicator of their hydrothermal state, structure and regime. *Journal of Glaciology*, **39** (132), 373-384.

Maijala, P. (1992). Application of some seismic data processing methods to ground penetrating radar data. *Fourth International Conference on Ground Penetrating Radar*. Jun. 8-13, 1992, Rovaniemi (Finlandia). Geological Survey of Finland. Special paper 16, 103-110.

Martín, C. (2003). *Modelización Numérica de la Dinámica de los Glaciares Templados y Análisis de su Respuesta a los Cambios Climáticos.* Tesis doctoral. Univ. Politécnica de Madrid. 109 p.

Martín, C., Navarro, F., Otero, J., Cuadrado M.L. y Corcuera, M.I. (2004). Three-dimensional modelling of the dynamics of Johnsons glacier (Livingston Island, Antarctica). *Annals of Glaciology*, **39**, en prensa.

Martínez, A. y Byrnes, A.P. (2001). Modeling dielectric-constant values of geologic materials: an aid to ground-penetrating radar data collection and interpretation. *Current Research in Earth Sciences,* Bulletin **247**, part 1, Kansas Geological Survey.

http://www.kgs.ukans.edu/Current/2001/martinez/martinez1.html.

Mätzler, C. (1996). Microwave permittivity of dry snow. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing,* **34** (2), 573-581.

Mätzler, C. y Wegmüller, U. (1987). Dielectric properties of fresh-water ice at microwave frecuencies. *Journal of Physics D: Applied Physics,* **20**, 1623-1630. Erratum, **21**, 1660 (1988).

Mätzler, C., Aebischer, H. y Schanda, E. (1984). Microwave dielectric properties of surface snow. *IEEE Journal of Oceanic Engineering,* **9** (5), 366-371.

Mercer, J.H. (1978). West Antarctic ice sheet and CO_2 greenhouse effect: a threat of disaster. *Nature*, **271**, 321-325.

Mohr, P.J. y Taylor, B.N. (2002). Fundamental physical constants. En Lide, D.R., ed.: *The CRC Handbook of Chemistry and Physics* 82nd Edition on CD-ROM

Moore, J.C., Pälli, A., Ludwig, F., Blatter, H., Jania, J., Gadek, B. y Glowacki, P. (1999). High-resolution hydrotermal structure of Hansbreen, Spitsbergen, mapped by ground-penetrating radar. *Journal of Glaciology*, **45** (151), 524-532.

Morey, R.M. (1974). Continuous subsurface profiling by impulse radar. *Proceedings of Engineering Foundations Conference on Subsurface Exploration for Underground Excavations and Heavy Construction,* Henniker (New Hampshire), 213-232.

Morland, L.W. (1984). Thermomechanical balances of ice-sheet flows. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn,* **29**, 237-266.

Morton, K.W. y Mayers, D.F. (1994). *Numerical Solution of Partial Differential Equations: An Introduction.* Cambridge University Press, New York.

Muñoz, A.I. (2003). *Modelado, análisis y resolución numérica de un problema de frontera libre en glaciología.* Tesis doctoral, Universidad Rey Juan Carlos.

Muñoz, A.I., E. Schiavi, U. Kindelán (2002). Non linear phenomena in Glaciology: ice surging and streaming. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales,* **96** (3), 481-506.

Murray, T., Stuart, G.W., Fry, M., Gamble, N.H. y Crabtree, M.D. (2000). Englacial water distribution in a temperate glacier from surface and borehole radar velocity analysis. *Journal of Glaciology*, **46** (154), 389-398.

Navarro, F.J., Corcuera, M.I., Cuadrado, M.L. y Corrales, J.M. (1999). Numerical modelling of dynamics and thermal regime of glaciers with finite element methods. *Mat. Glyatsiol. Issled.,* **87**, 21-27.

Neff, H.P.Jr. (1991). *Introductory Electromagnetics.* John Wiley & Sons. Singapore. 414 p.

Neidell, N.S. y Taner, M.T. (1971). Semblance and other coherency measures for multichannel data. *Geophysics,* **36** (3), 482-497.

Nixon, W.A., Dowdeswell, J.A., Cooper, A.P.R., Drewry, D.J., Watts, L.G., Liestol, O. y Smith, R.A. (1985). Applications and limitations of finite element modeling in glaciers: a case study. *Journal of Geophysical Research,* 90, 11303-11311.

Norsk Polarinstitutt. (1982). Svalbard topographic map, scale 1:100 000, sheet B10 (Van Mijenfjorden, Spitsbergen). Oslo.

Nye, J.F. (1957). The distribution of stress and velocity in glaciers and ice-sheets. *Proceedings of the Royal Society of London, Ser. A*, **239**, 113-133.

Nye, J.F. (1965). The flow of a glacier in a channel of rectangular, elliptic or parabolic cross section. *Journal of Glaciology,* **5**, 661-690.

Nye, J.F. (1969). A calculation on the sliding of ice over a wavy surface using a Newtonian viscous approximation. *Proceedings of the Royal Society of London, Ser. A*, **311**, 445-467.

Olhoeft, G.R. (1998), *Electrical, magnetic and geometric properties that determine ground penetrating radar performance*, *Proceedings of GPR'98, Seventh International Conference on Ground Penetrating Radar*. May. 27-30, 1998, The University of Kansas, KS, USA, 177-182.

Orheim, O. y Govorukha, L.S. (1982). Present day glaciation in the South Shetland Islands. *Annals of Glaciology,* **3**, 233-238.

Page, J.E. y Camacho, C. (1985). *Ondas Planas*. Serv. Public. ETSIT, Univ. Politécnica de Madrid, Madrid. 135 p.

Pälli, A., Moore, J.C., Kolondra, L y Glowacki, P. (2003). The drainage pattern of Hansbreen and Werenskioldbreen, two polythermal glaciers in Svalbard. *Polar Research,* **22** (2), 355-371.

Paren, J.G. (1970). *Dielectric properties of ice.* Tesis Doctoral. University of Cambridge.

Paterson, W.S.B. (1994). *The Physics of Glaciers*, 3rd ed. Pergamon/Butterworth-Heinemann. 480 p.

Pattyn, F. (2003). A new three-dimensional higher-order thermomechanical ice sheet model: basic sensitivity, ice stream development and ice flow across subglacial lakes. *Journal of Geophysical Research*, **108** (B8), 2382-2396.

Pattyn, F., de Smedt, B., de Brabander, S., van Huele, W., Agatova, A., Mistrukov, A. y Decleir, H. (2003). Ice dynamics and basal properties of Sofiyskiy glacier, Altai mountains, Russia, based on DGPS and radio-echo sounding surveys. *Annals of Glaciology,* **37**, 286-292.

Pávlov, P.V. y Jojlov, A.F. (1992), *Física del Estado Sólido*. Ed. MIR-Rubiños, Moscú-Madrid. 431 p.

Peacock, K.L. y Treitel, S. (1969). Predictive deconvolution: theory and practice. *Geophysics,* **34** (2), 155-169.

Pérez, M.V. (2001). *Radar de Subsuelo: Evaluación para Aplicaciones en Arqueología y en Patrimonio Histórico-Artístico*. Tesis Doctoral. Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona. 971 p.

Pettit, E.C. y Waddington, E.W. (2003). Ice flow at low deviatoric stresses. *Journal of Glaciology*, **46** (166), 359-369.

Pettit, E.C., Jacobson, H.P. y Waddington, (2003). E.W. Effects of basal sliding on isochrones and flow near an ice divide. *Annals of Glaciology*, **37**, 370-376.

Polder, D. y van Santen, J.H. (1946). The effective permeability of mixtures of solids. *Physica,* **12** (5), 257-271.

Powers, M.H., y Olhoeft, G.R. (1995). GPRMODV2: one-dimensional full waveform forward modeling of dispersive ground penetrating radar data, version 2.0. *U.S.G.S. Open File Report 95-58*, 41 p.

Proakis, J.G., y Manolakis, D.G. (1998), *Tratamiento Digital de Señales, 3ª ed.* Prentice Hall. Madrid. 1048 p.

Pudykiewicz, J., Benoit, R. y Staniforth, (1985). A. Preliminary results from a partial LRTAP model based on an existing meteorological forecast model. *Atmos. Ocean.*, **23**, 267-303.

Pulina, M. y Postnov, I. (1989). Gypsum karst in the NW part of the Nordenskiold Land, West Spitsbergen (summary). *Kras i Speleologia*, 6 (XV), 40-57, Universytet Slaski Katowice.

Pullan, S. E. (1990). Recommended standard for seismic (/radar) files in the personal computer environment. Geophysics, **55** (9), 1260-1271.

Quarteroni, A. y Valli, A. (1994). *Numerical Approximation of Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, Berlín.

Quin, D., Zielinski, G.A., Germain, M.S., Ren, J., Wang, X. y Wang, W. (1994). Use of tephrochronology in the evaluation of accumulation rates on Nelson ice cap, South Shetland Islands, Antarctica. *Science in China,* Ser. B., **37** (10), 1272-1278.

Raithby, G.D. (1976). A critical evaluation of upstream differencing applied to problems involving fluid flow. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, **9**, 75-103.

Ramo, S., Whinnery, J.R. y Van Duzer, T. (1994). *Fields and Waves in Communications Electronics, 3rd Ed.* John Wiley and Sons. 844 p.

Raymond, C.F. y Harrison, W.D. (1975). Some observations on the behavior of liquid and gas phases in temperate glacier ice. *Journal of Glaciology*, **14** (71), 213-234.

Ristow, D. y Rühl, T. (1994). Fourier finite-difference migration. *Geophysics,* **59** (12), 1882-1893.

Robin, G. de Q. (1955). Ice movement and temperature distribution in glaciers and ice sheets. *Journal of Glaciology*, **2** (18), 523-532.

Robin, G. de Q. (1970). Stability of ice sheets as deduced from deep temperature gradients. International Symposium on Antarctic Glaciological Exploration (ISAGE), Hannover (New Hampshire) Sept. 3-7, 1968. *International Association of Hydrological Sciences,* Publication **86**, 141-151.

Robin, G. de Q., Evans, S. y Bailey, J.T. (1969). Interpretation of radio echo sounding in polar ice sheets. Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Ser. A, **265**, 437-505.

Robinson, E.A. (1998). Model-driven predictive deconvolution. *Geophysics*, **63** (2), 713-722.

Rodrigues, J .F. y Santos, L. (1996). On the glacier kinematics with the shallow-ice approximation. En Niezgódka, M. y Strzelecki, P., eds.: *Free Boundary Problems, Theory and Applications,* 254-263. Addison Wesley Longman. Essex, England.

Rodrigues, J .F. y Urbano, J.M. (1999). On the mathematical analysis of a valley glacier model. En Athanasopoulos, I., Makrakis, G. y Rodrigues, J.F., eds.: *Free Boundary Problems, Theory and Applications.* CRC Press. Londres.

Røsten, T. y Haugen. G.U. (2001). Mixed-phase inverse filtering of seismic data. *Proceedings of the Norwegian Signal Processing Symposium*. Oct. 18-20, 2001. Trondheim (Noruega).

Sandmeier Software. (2003). *ReflexW vers. 3.0.7.*

Sandmeier, K.J. (2003). *ReflexW 3.0.* 345 p.

Scales, J.A. (1994). *Theory of Seismic Imaging*. Samizdat Press, Golden (Colorado). 207 p.
E-book, http://samizadat.mines.edu/imaging/imaging.pdf

Schiavi, E. (1997). *Sobre Algunas Ecuaciones en Derivadas Parciales Cuasilineales que aparecen en Glaciología*, Tesis Doctoral, Universidad Complutense de Madrid.

Schøtt-Hvidberg, C. (1996). Steady-state thermo-mechanical modelling of ice flow near the centre of large ice sheets with the finite element technique. *Annals of Glaciology*, **23**, 116-123.

Seligman, G. (1936). *Snow Structures and Ski Fields.* Macmillan, London

Sena, A.R., Stoffa, P.L. y Sen, M.K. (2003). Split step Fourier migration of ground penetrating radar data. *73th Annual Meeting SEG 2003 Expanded Abstracts,* 1023-1026.

Sihvola, A.H., Nyfors, E.G. y Tiuri, M.E. (1985). Mixing formulae and experimental results for the dielectric constant of snow. *Journal of Glaciology,* **31** (108), 163-170.

Sikonia, W.G. (1982). *Finite Element Glacier Dynamics Model Applied to Columbia Glacier, Alaska.* USGS Professional Paper 1258-B (74 p.), U.S. Gov. Print. Office.

Smith, B.M.E. y Evans, S. (1972). Radio-echo sounding: absorption and scattering by water inclusions and ice lenses. *Journal of Glaciology,* **11** (61), 133-146.

Smith, G.D. (1985). *Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods,* 3rd ed. Clarendon Press, Oxford.

Staniforth, A. y Côté, J. (1991). Semi-Lagrangian integration schemes for atmospheric models-A review. *Mon. Weather Rev.*, **119**, 2206-2223.

Stern, W. (1929). Versuch einer elektrodynamischen Dickenmessung von Gletschereis. *Ger. Beitr. zur Geophysik,* **23**, 292-333.

Stern, W. (1930). Uber Grundlagen,Methodik und bisherige Ergebnisse elektrodynamischer Dickenmessung von Gletschereis. *Z. Gletscherkunde,* **15**, 24-42.

Stiles, W.H. y Ulaby, F.T. (1981). Dielectric properties of snow. *The University of Kansas Center for Research, Inc. Remote Sensing Laboratory. Technical Report,* 527-1.

Stoffa, P.L., Fokkema, J.T., de Luna Freire, R.M. y Kessinger, W.P. (1990). Split-step Fourier migration. *Geophysics,* **55** (4), 410-421.

Stolt, R.H. (1978). Migration by Fourier transform. *Geophysics,* **43** (1), 23-48.

Taner, M.T. (1999). *A short narrative on the scope of work involved in data conditioning and seismic reservoir characterization,* Rock Solid Images. Houston (Texas), 5 p.

Taner, M.T. y Koehler, F. (1969). Velocity spectra - Digital computer derivation and applications of velocity functions. *Geophysics,* **34** (6), 859-881.

Taylor, C. y Hood, P. (1973). A numerical solution of the Navier-Stokes equations using the finite element technique. *Computers and Fluids*, **1**, 73-100.

Thomas, J.W. (1995). *Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Methods.* Springer-Verlag, Berlín.

Tiuri, M.E., Sihvola, A.H., Nyfors, E.G. y Hallikaiken, M.T. (1984). The complex dielectric constant of snow at microwave frecuencies. *IEEE Journal of Oceanic Engineering,* **9** (5), 377-382.

Treitel, S. y Lines, L. (2001). Past, present and future of geophysical inversion - A new millennium analysis. *Geophysics,* **66** (1), 21-24.

Troitsky, L.S., Guskov, A.S., Zinger, E.M. y Mikhalev, V.I. (1985). Balans massy lednikov (analiz fakticheskikh dannykh) [Glacier mass balance (interpretation of actual data)]. In Kotlyakov, V.M., *ed. Glyatsiologiya Shpitsbergena* [*Glaciology of Spitsbergen*], 47-53. Moscow, Nauka, 200 p. (en Ruso).

Turner, G. (1994). Subsurface radar propagation deconvolution. *Geophysics*, **59** (2), 215-223.

Turner, G. y Siggins, A.F. (1994). Constant *Q* attenuation of subsurface radar pulses. *Geophysics*, **59** (8), 1192-1200.

van der Veen, C.J. (1996). Tidewater calving. *Journal of Glaciology*, **42** (141), 375-385.

van der Veen, C.J. (1999). *Fundamentals of Glacier Dynamics*. Balkema, Rotterdam, 462 p.

Vasilenko, E.V., Glazovsky, A.F., Macheret, Yu.Ya., Navarro, F.J., Sokolov, V.G. y Shiraiwa, T. (2003). Georadar VIRL dlya isslidovaniya lednikov [Georradar VIRL para estudios glaciares]. *Materialy Glyatsiologicheskikh Issledovaniy* [*Datos de Estudios Glaciológicos*], **94**, 225-234. (en Ruso).

Vasilenko, E.V., Glazovsky, A.F., Macheret, Yu.Ya., Navarro, F.J., Tokarev, M.Yu., Kalashnikov, A. Yu., Miroshnichenko, D.E. y Reznikov, D.S. (2001). Radiophizicheskie issledovaniya lednika Aldegonda na Shpitsbergene v 1999 g. [Estudios radiofísicos del glaciar Aldegonda en Spitsbergen en 1999]. *Materialy Glyatsiologicheskikh Issledovaniy* [*Datos de Estudios Glaciológicos*], **90**, 86-99. (en Ruso).

Vasilenko, E.V., Sokolov, V.G., Macheret, Yu.Ya., Glazovsky, A.F., Cuadrado, M.L. y Navarro, F.J. (2002). A digital recording system for radioglaciological studies. Royal Society of New Zealand Bulletin, 35, 611-617.

Vialov, S.S. (1958). Regularities of glacial shields movement and the theory of viscous flow. *Int. Assoc. Hydr. Sci. Publ.* **47**, 266-275.

Vieli, A., Funk, M. y Blatter, H. (2000). Tidewater glaciers: frontal flow acceleration and basal sliding. *Annals of Glaciology*, **31** (159), 217-221.

Vieli, A., Funk, M. y Blatter, H. (2001). Flow dynamics of tidewater glaciers: a numerical modelling approach. *Journal of Glaciology*, **47** (159), 595-606.

Vieli, A., Jania, J. y Kolondra, L. (2002). The retreat of a tidewater glacier: observations and model calculations on Hansbreen, Spitsbergen. *Journal of Glaciology*, **48** (163), 592-600.

Waldner, P.A., Huebner, C., Schneebeli, M., Brandelik, A. y Rau, F. (2001) Continuous measurements of liquid water content and density in snow using TDR. *Proceedings of the Second International Symposium and Workshop on Time Domain Reflectometry for Innovative Geotechnical Applications,* Evanston (IL.), 446-456.

Waldner, P.A., Schneebeli, M., Schultze-Zimmermann, U. y Flühler, H. (2004) Effect of snow structure on water flow and solute transport. *Hydrological Processes, **18***, 1271-1290.

Watts, R.D. y England, A.W. (1976). Radio-echo sounding of temperate glaciers: ice properties and sounder design criteria. *Journal of Glaciology,* **17** (75), 39-48.

Weertman, J. (1973). Creep of Ice. En E. Whalley, S.J. Jones y L.W. Gold (eds.), *Physics and Chemistry of ice*, Royal Society of Canada, Ottawa, 320-337.

Weertman, J. (1983). Creep deformation of ice. *Annual Reviews of Earth and Planetary Science*, **11**, 215-240.

Wiggins, J.W. (1984). Kirchoff integral extrapolation and migration of nonplanar data. *Geophysics,* **49** (8), 1239-1248.

Wood, W.T. (1999). Simultaneous deconvolution and wavelet inversion as global optimization. *Geophysics*, **64** (4), 1108-1115.

Xia, J., Franseen, E.K., Miller, R.D., Weis, T.V. y Byrnes, A.P. (2003). Improving ground-penetrating radar data in sedimentary rocks using deterministic deconvolution. *Journal of Applied Geophysics,* **64**, 15-33.

Ximenis, L. (2001). Dinámica de la Glacera Johnsons (Livingston, Shetland del Sud, Antártida). Tesis doctoral, Universidad de Barcelona.

Yilmaz, Ö. (1987). *Seismic Data Processing*. Tulsa (Okla.): Society of Exploration Geophysicists. 526 p.

Yilmaz, Ö. (2001). *Seismic Data Analysis: Processing, Inversion, and Interpretation of Seismic Data*. Tulsa (Okla.): Society of Exploration Geophysicists. 2027 p.

Zienkiewicz, O.C. y Taylor, R.L. (1993-1994). *El Método de los Elementos Finitos,* 2 vol. CIMNE, Barcelona.

Apéndice A

Comparativa entre fórmulas de la permitividad

En el Capítulo 4 (§4.2.1 y §4.2.2) se han discutido las diferentes expresiones que relacionan la permitividad del medio glaciar con su densidad y contenido en agua. En este Apéndice se incluyen las gráficas relativas a tales expresiones, lo que establece su comparación.

A.1 Medio glaciar seco

Para facilitar su localización, se renombran localmente las expresiones que se procede a representar. Con el mismo motivo se establece la relación con la numeración establecida en el Capítulo 4, como indica la Tabla 16.

Expresión	Número	Localizador
$\varepsilon_d = \left(1 + 0'5148\,\rho_d\right)^3$	(4.33)	(A.1)
$\varepsilon_d = \left(1 + 0'5114\,\rho_d\right)^3$	(4.34)	(A.2)
$\varepsilon_d = \left(1 + 0'508\,\rho_d\right)^3$	(4.35)	(A.3)
$\varepsilon_d = \left(1 + 0'469\,\rho_d\right)^3$	(4.36)	(A.4)
$\varepsilon_d = \left(1 + 0'857\,\rho_d\right)^2$	(4.37)	(A.5)
$\varepsilon_d = \left(1 + 0'854\,\rho_d\right)^2$	(4.38)	(A.6)
$\varepsilon_d = \left(1 + 0'851\,\rho_d\right)^2$	(4.39)	(A.7)
$\varepsilon_d = \left(1 + 0'845\,\rho_d\right)^2$	(4.40)	(A.8)
$\varepsilon_d = 1 + 1'7\rho_d + 0'7\rho_d^2$	(4.41)	(A.9)
$\varepsilon_d = 1 + 2'36\rho_d$	(4.42)	(A.10)
$\varepsilon_d = 1 + 2'2\rho_d$	(4.43)	(A.11)
$\varepsilon_d = 1 + 2\rho_d$	(4.44)	(A.12)

Tabla 16 Expresiones de cálculo de la permitividad en medio seco. Se relaciona el número de expresión utilizado en el Capítulo 4 con su localizador en este Apéndice.

Para mayor claridad en las figuras, no se representa la ecuación (A.2), dado que describe una curva que discurre entre las de (A.1) y (A.3). De igual manera, no se representan (A.6) y (A.7), por tomar valores intermedios entre (A.5) y (A.8), cuyas curvas son muy próximas.

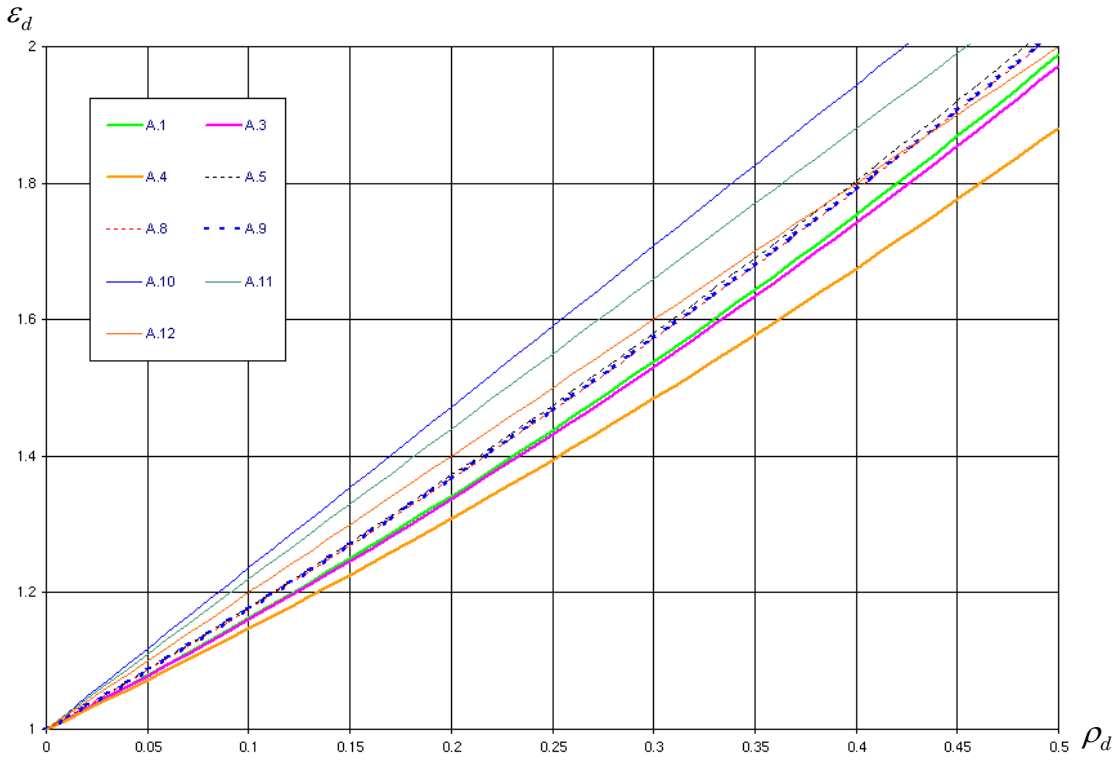

Figura A 1 Valores de permitividad para densidad inferior a 0'5 Mg m^{-3}.

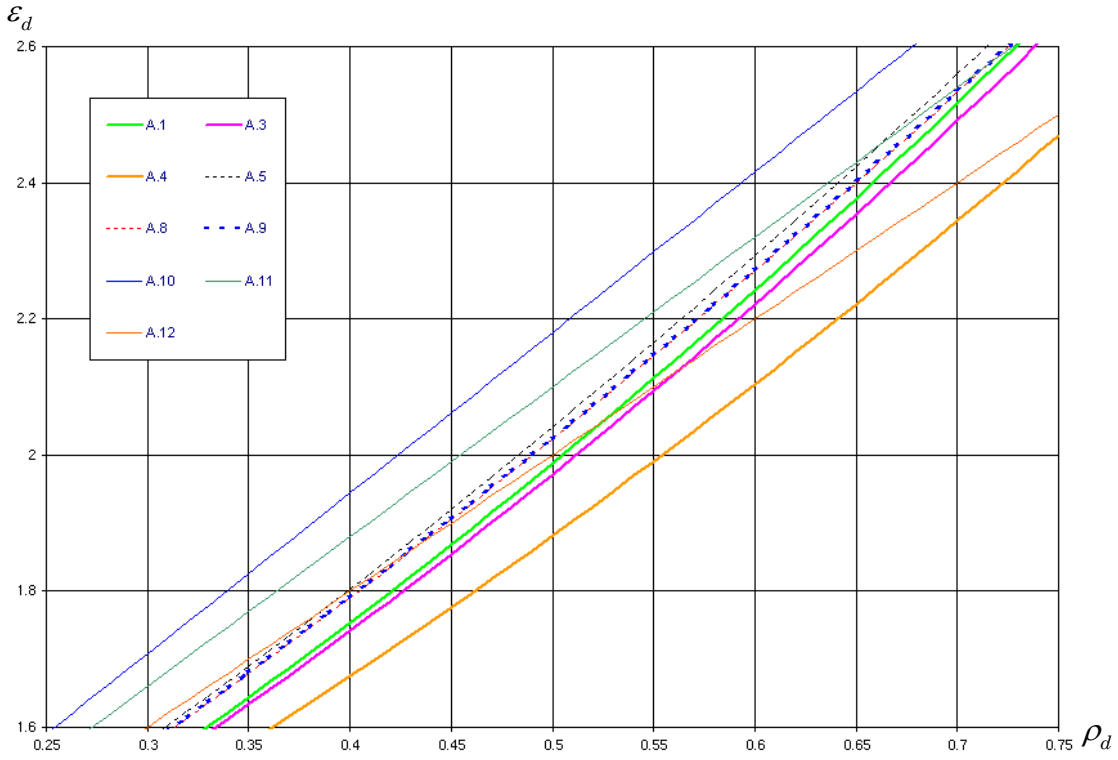

Figura A 2 Valores de permitividad con densidades intermedias.

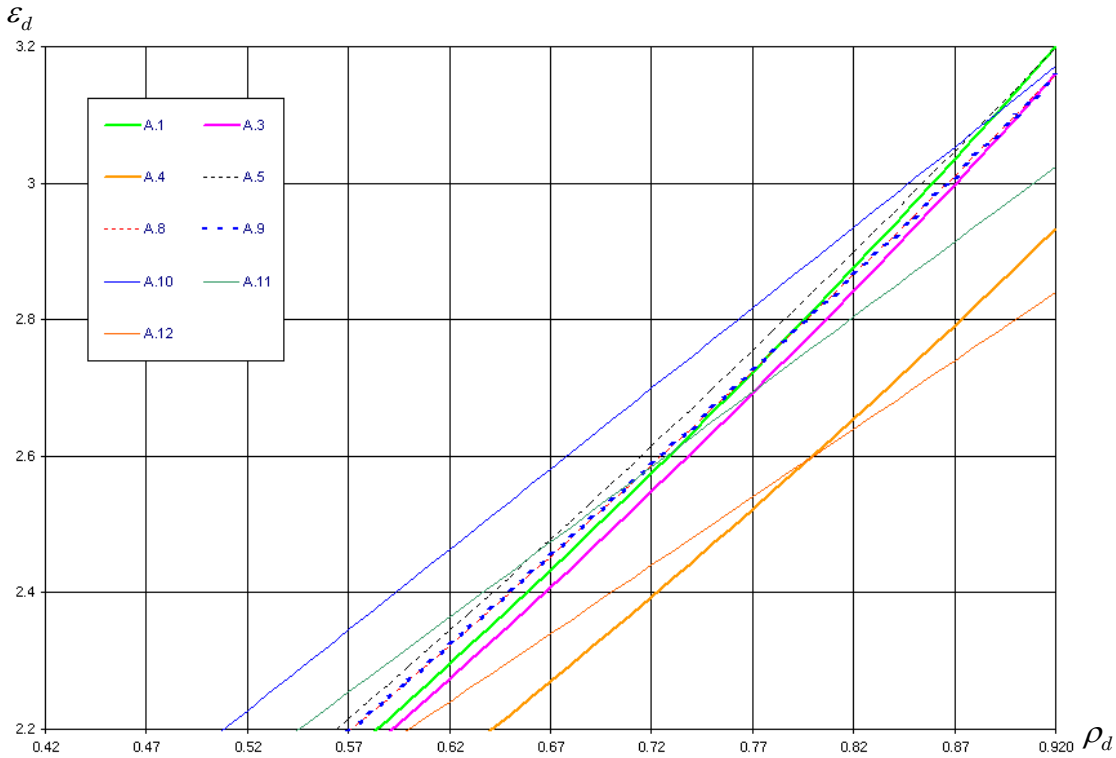

Figura A 3 Valores de permitividad con densidades elevadas.

Puede apreciarse en estas figuras la proximidad de los valores que toman las expresiones (A.1) y (A.3), derivadas del modelo de Looyenga, entre las que discurriría (A.2). Sin embargo, aunque (A.4) responde también a este modelo, ofrece valores de permitividad muy bajos, debido a los valores que utiliza para la permitividad y la densidad en el hielo puro ($\varepsilon_i = 3'17$; $\rho_i = 1\,\mathrm{Mg\,m^{-3}}$), como ya se ha valorado en §4.2.1.

Destacan por su mutua cercanía las curvas con expresión cuadrática, (A.5) a (A.8) [(A.6) y (A.7) no se han representado, pero se sitúan entre aquéllas], que ofrecen relaciones lineales entre la RWV y la densidad del medio. La expresión (A.9), de Tiuri *et al.* (1984) discurre junto a este grupo de curvas.

En las figuras anteriores se observan claramente las limitaciones de las relaciones lineales entre ε_d y ρ_d [(A.10) a (A.12)], ya explicadas en §4.2.1.

A.2 Medio glaciar húmedo

A continuación se presentan las gráficas del incremento de la permitividad ($\Delta\varepsilon = \varepsilon_s - \varepsilon_d$) en función del contenido en agua en el medio, calculado a partir de diferentes expresiones presentadas en §4.2.2. No se utilizan en esta representación aquéllas en las que la permitividad del medio seco se sustituye por la del hielo puro, dado que pierden su relación con la densidad.

En la Tabla 17 se relaciona la expresión utilizada del incremento de la permitividad, con la expresión correspondiente en el Capítulo 4.

Expresión	$\Delta\varepsilon = \varepsilon_s - \varepsilon_d$
$\varepsilon_s^{1/3} = \varepsilon_d^{1/3} + W(\varepsilon_w^{1/3} - \varepsilon_d^{1/3})$, (4.53)	$\Delta\varepsilon = \left(\varepsilon_d^{1/3} + W(\varepsilon_w^{1/3} - \varepsilon_d^{1/3})\right)^3 - \varepsilon_d$, (A.13)
$\varepsilon_s^{1/3} = \varepsilon_d^{1/3} + W(\varepsilon_w^{1/3} - 1)$, (4.56)	$\Delta\varepsilon = \left(\varepsilon_d^{1/3} + W(\varepsilon_w^{1/3} - 1)\right)^3 - \varepsilon_d$, (A.14)
$W = 3(\varepsilon_s - \varepsilon_d)/\varepsilon_w$, (4.60)	$\Delta\varepsilon = W\varepsilon_w/3$, (A.15)
$\varepsilon_s = \varepsilon_d + 16'7W + 42'5W^2$, (4.65)	$\Delta\varepsilon = 16'7W + 42'5W^2$, (A.16)
$\varepsilon_s = 1 + 2'2\rho_d + 23'5W$, (4.67)	$\Delta\varepsilon = 1 + 2'2\rho_d + 23'5W - \varepsilon_d$, (A.17)
$\varepsilon_s = \varepsilon_d + \varepsilon_w\left(0'1W + 0'8W^2\right)$, (4.68)	$\Delta\varepsilon = \varepsilon_w\left(0'1W + 0'8W^2\right)$, (A.18)

Tabla 17 Expresiones del incremento de la permitividad en función de W y su relación con aquéllas de las cuales se han obtenido.

Para realizar los cálculos se toman los valores: $\rho_i = 0'917\,\mathrm{Mg\,m^{-3}}$, $\varepsilon_i = 3'19$ y $\varepsilon_w = 86$. El cálculo de ε_d, se realiza a partir de ρ_d, mediante la expresión de Looyenga aplicada al medio seco $\varepsilon_d^{1/3} = 1 + (\varepsilon_i^{1/3} - 1)\rho_d/\rho_i$ [expresión (4.32)]. Las gráficas se representan para cuatro valores diferentes de densidad en el medio seco, en sucesión creciente de nieve a hielo (Tabla 4): $\rho_d = 0'2\,\mathrm{Mg\,m^{-3}}$ (Figura A 4), $\rho_d = 0'5\,\mathrm{Mg\,m^{-3}}$ (Figura A 5), $\rho_d = 0'7\,\mathrm{Mg\,m^{-3}}$ (Figura A 6) y $\rho_d = 0'9\,\mathrm{Mg\,m^{-3}}$ (Figura A 7).

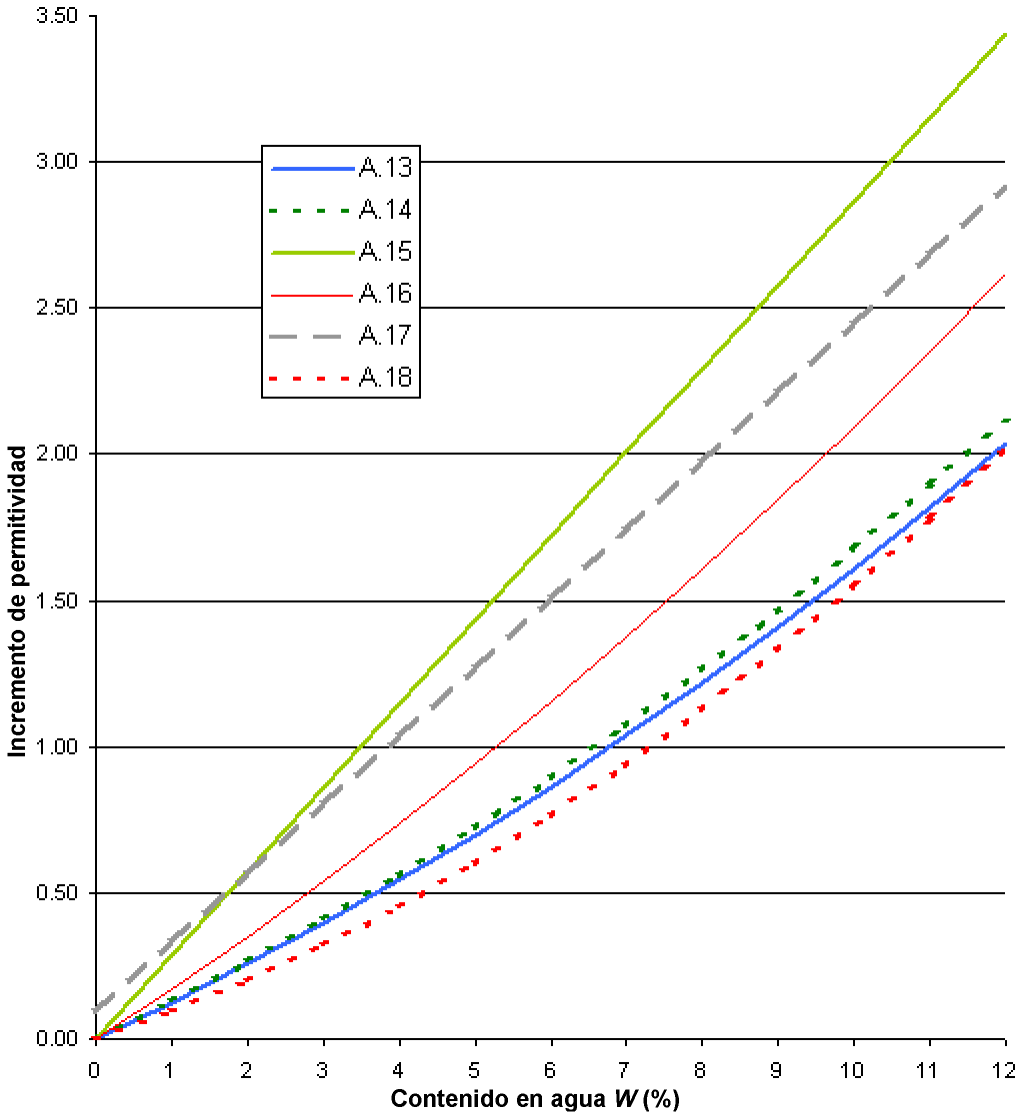

Figura A 4 Diferencia entre la permitividad del medio húmedo y su correspondiente medio seco, en función del contenido en agua, según se obtiene a partir de las diferentes expresiones de la Tabla 17, siendo la densidad del medio seco $\rho_d = 0'2\,\mathrm{Mg\,m^{-3}}$.

La expresión debida a Paren, (A.15), proporciona incrementos de permitividad muy elevados, lo que es consistente con los bajos valores de *W* que se obtienen a partir de ella al calcular el contenido en agua a partir de la permitividad del medio (o su RWV).

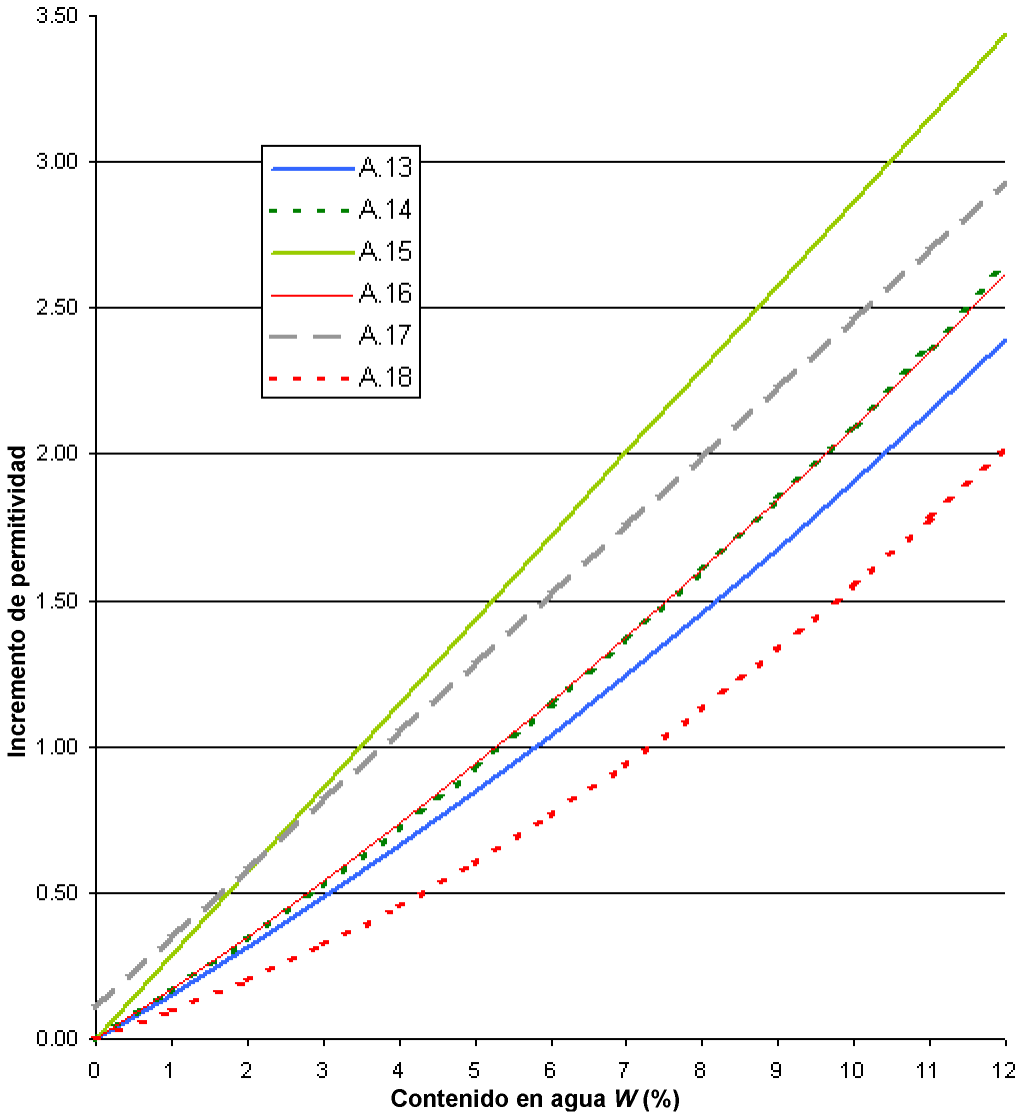

Figura A 5 Diferencia entre la permitividad del medio húmedo y su correspondiente medio seco, en función del contenido en agua, según se obtiene a partir de las diferentes expresiones de la Tabla 17, siendo la densidad del medio seco $\rho_d = 0'5\,\mathrm{Mg\,m^{-3}}$.

Las expresiones (A.15), (A.16) y (A.18) no dependen del valor de ρ_d utilizado. Por su parte, la expresión (A.14), que Frolov y Macheret (1999) proponen, modificando el modelo de Looyenga, sólo se aproxima a la que los mismos autores obtienen experimentalmente, (A.16), si $\rho_d = 0'5\,\mathrm{Mg\,m^{-3}}$.

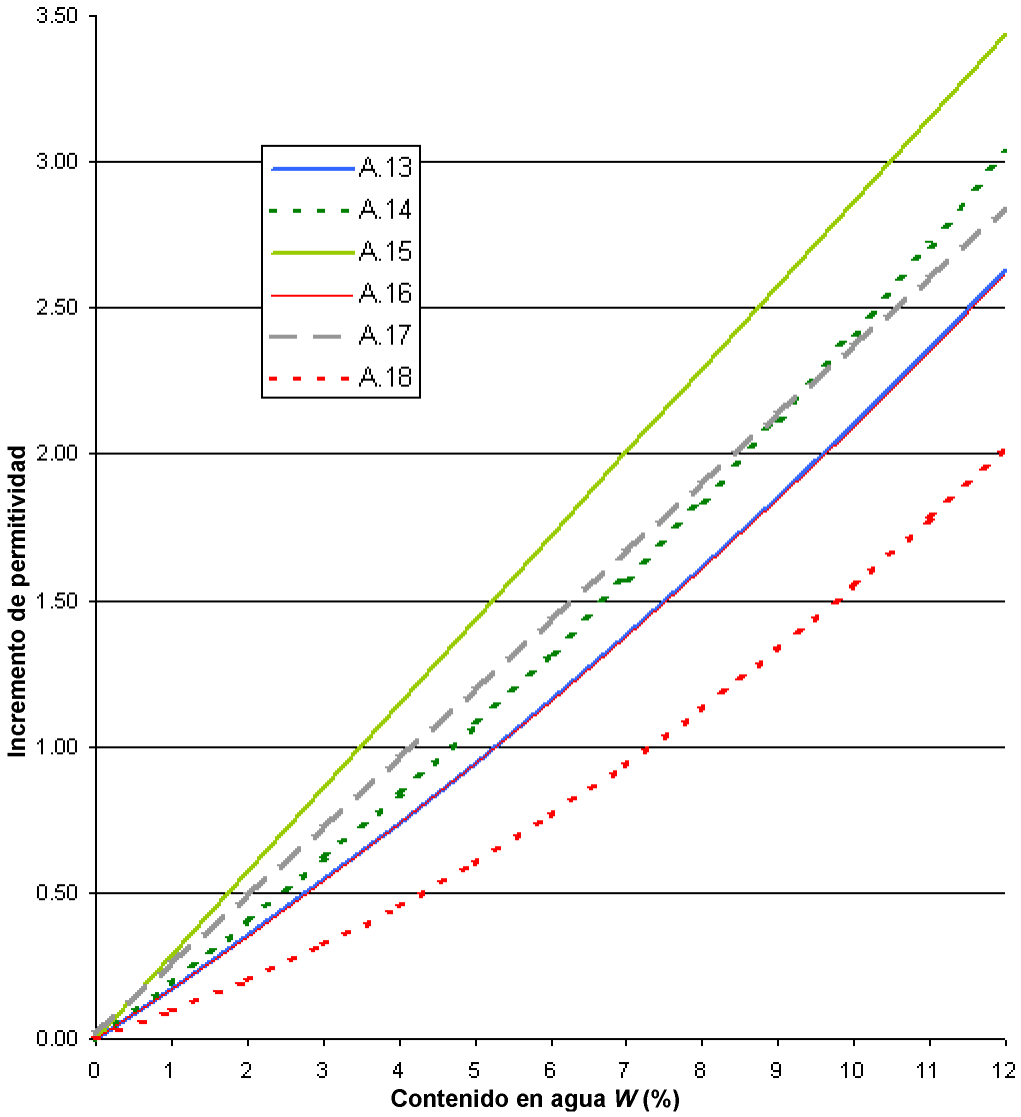

Figura A 6 Diferencia entre la permitividad del medio húmedo y su correspondiente medio seco, en función del contenido en agua, según se obtiene a partir de las diferentes expresiones de la Tabla 17, siendo la densidad del medio seco $\rho_d = 0'7\,\mathrm{Mg\,m^{-3}}$.

Puede observarse cómo en todos los casos, al igual que ha sucedido al estudiar el medio seco, las expresiones que siguen el modelo de Looyenga obtienen los valores más centrados.

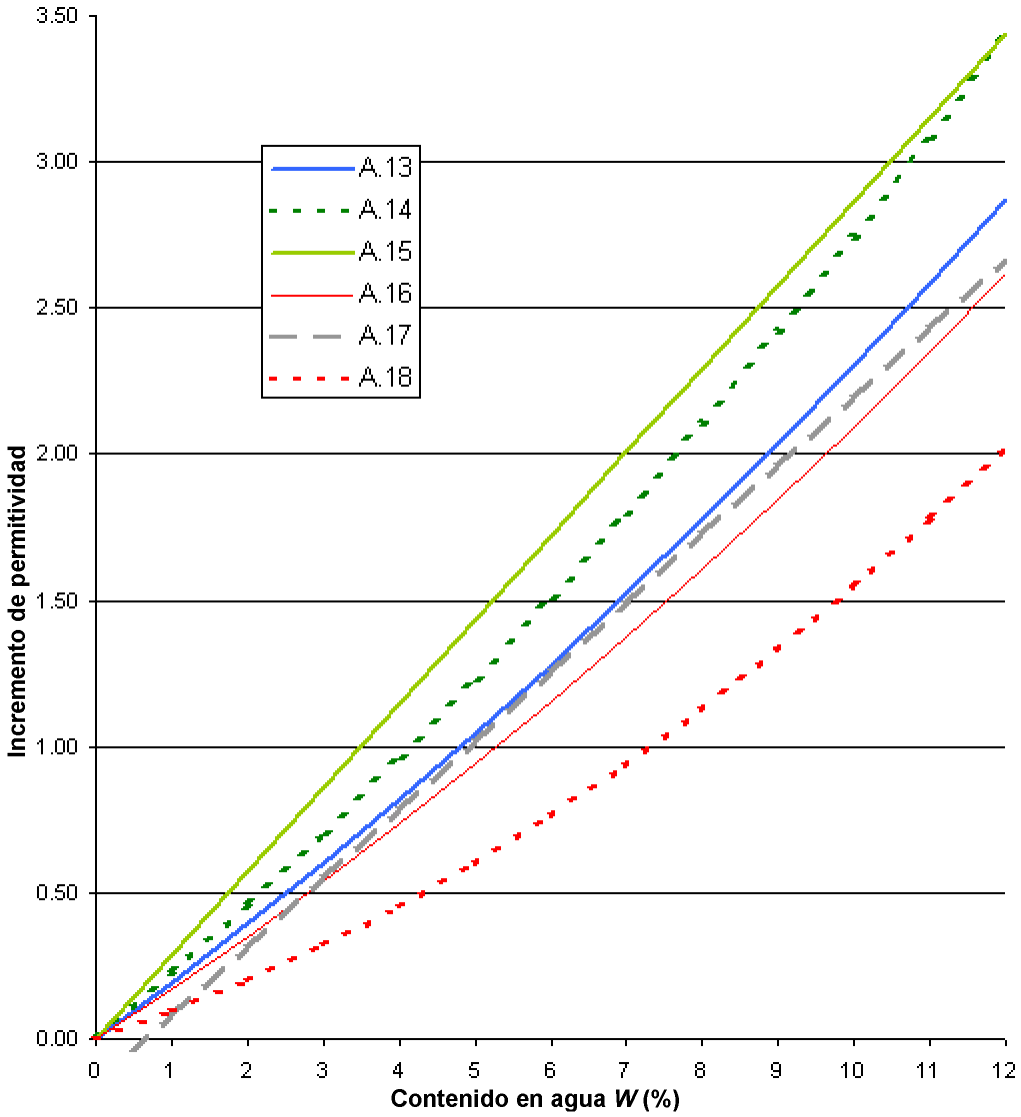

Figura A 7 Diferencia entre la permitividad del medio húmedo y su correspondiente medio seco, en función del contenido en agua, según se obtiene a partir de las diferentes expresiones de la Tabla 17, siendo la densidad del medio seco $\rho_d = 0'9\,\mathrm{Mg\,m^{-3}}$.

Apéndice B

Radargramas finales del radioecosondeo del glaciar Hurd

Se incluyen a continuación las imágenes de los radargramas obtenidos tras el procesado de los datos obtenidos en el glaciar Hurd (Isla Livingston, Antártida) durante las campañas antárticas 2000-2001 y 2001-2002.

En la Figura 5-10 (§5.2.2.2) se pueden identificar los puntos extremos de los perfiles, de los que obtienen su nombre, como se indica al pie de cada figura.

Cada radargrama va acompañado de un recuadro que resume los pasos de procesado en él realizados.

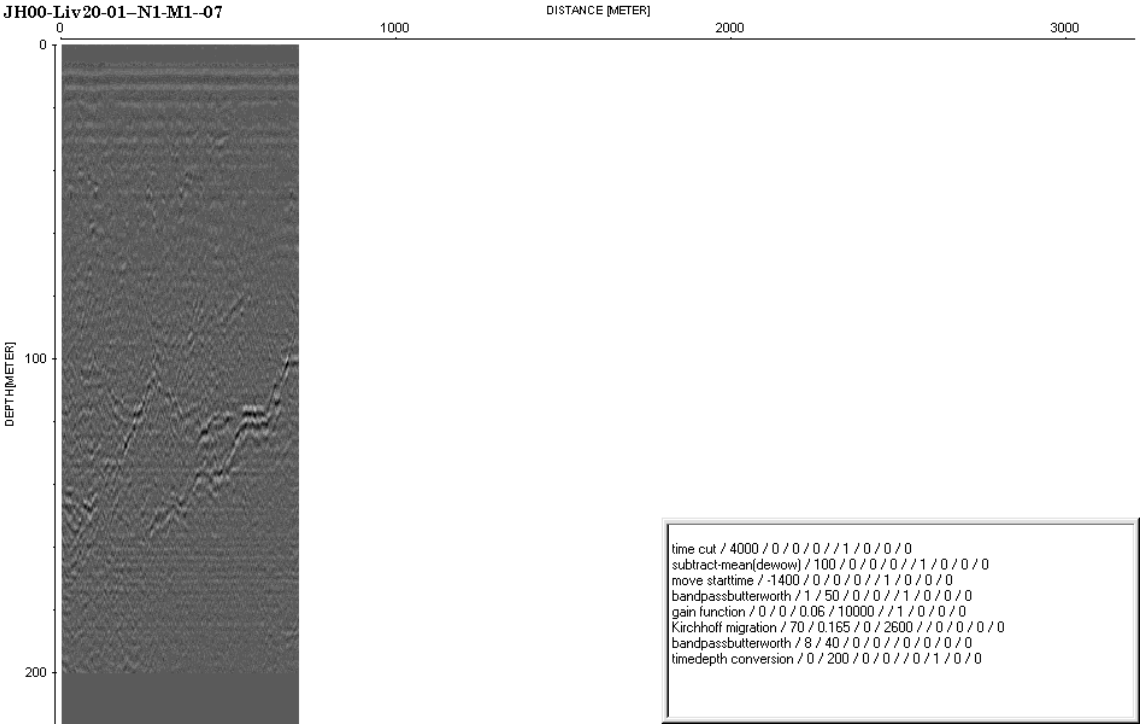

Figura B 1 Perfil N1–M1.

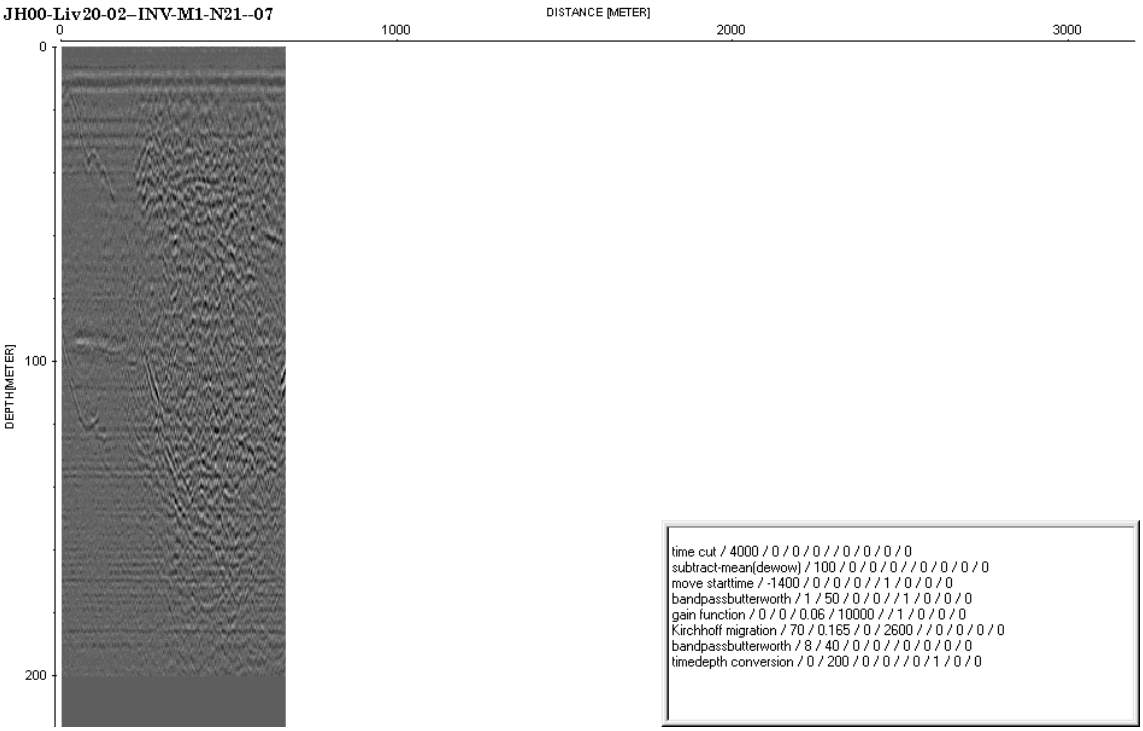

Figura B 2 Perfil N21–M1.

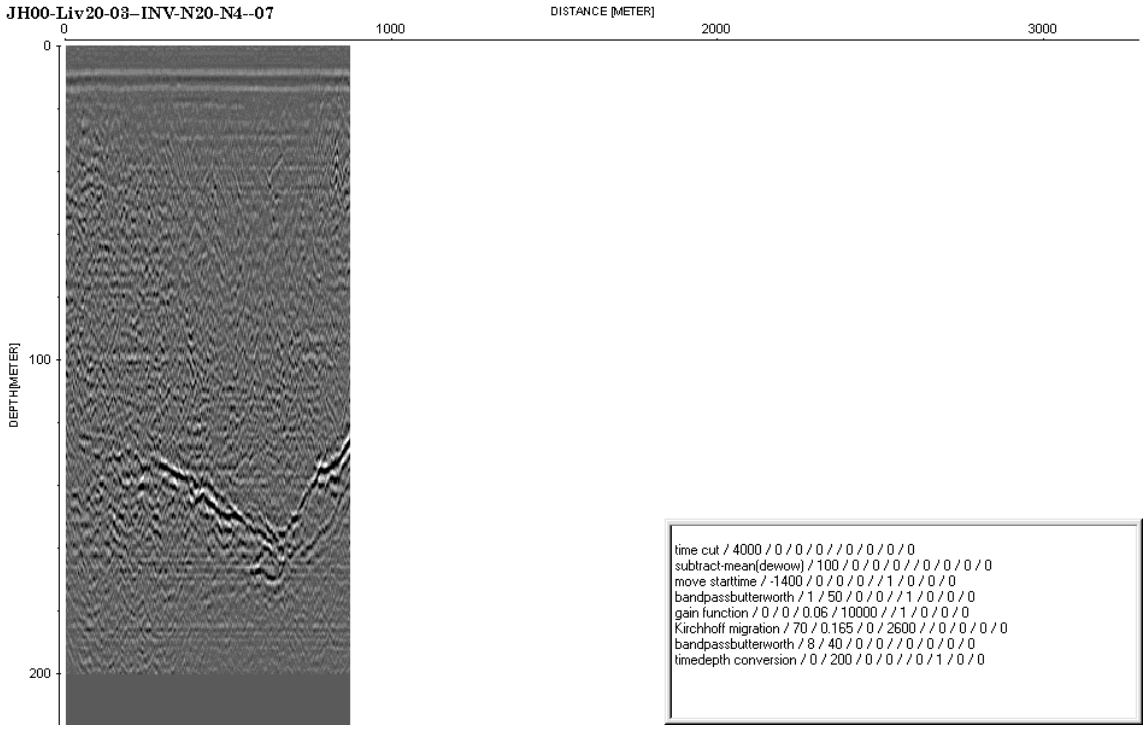

Figura B 3 Perfil N4–N20.

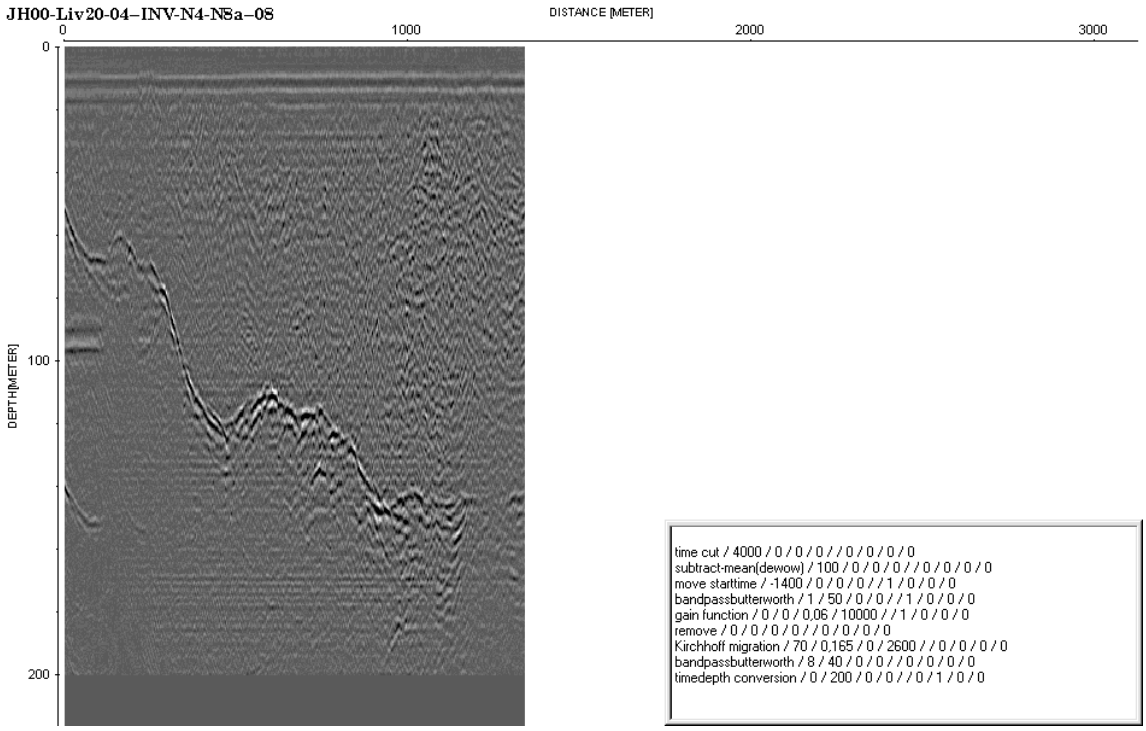

Figura B 4 Perfil N8a–N4.

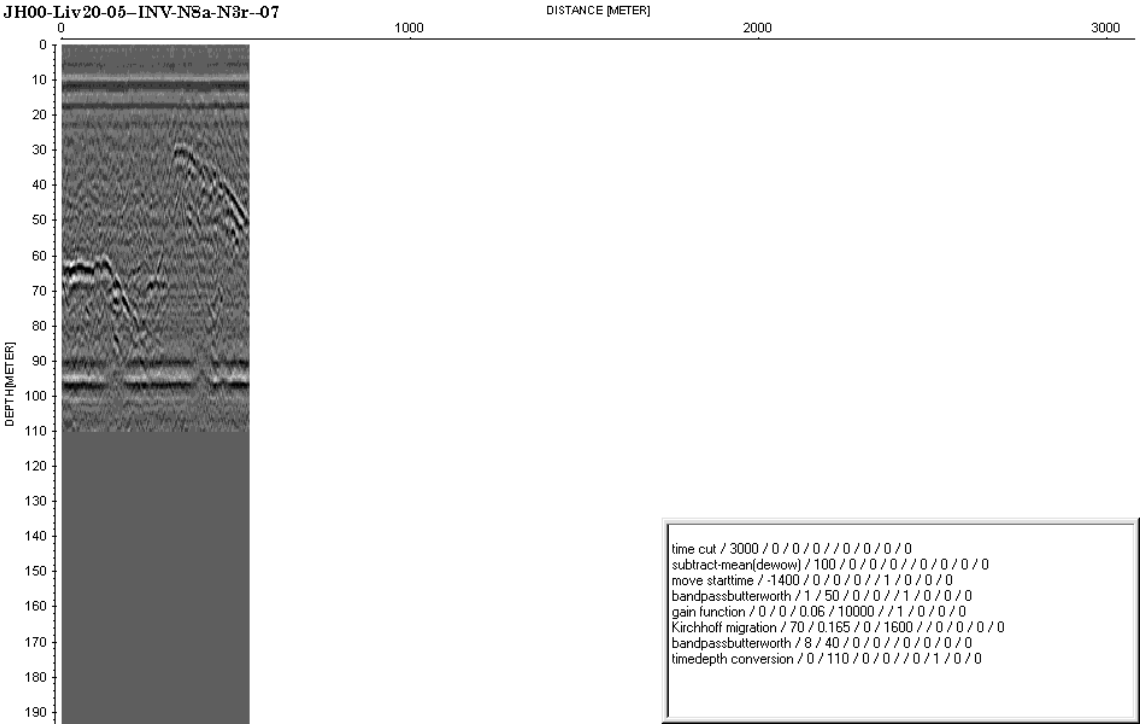

Figura B 5 Perfil N3r–N8a.

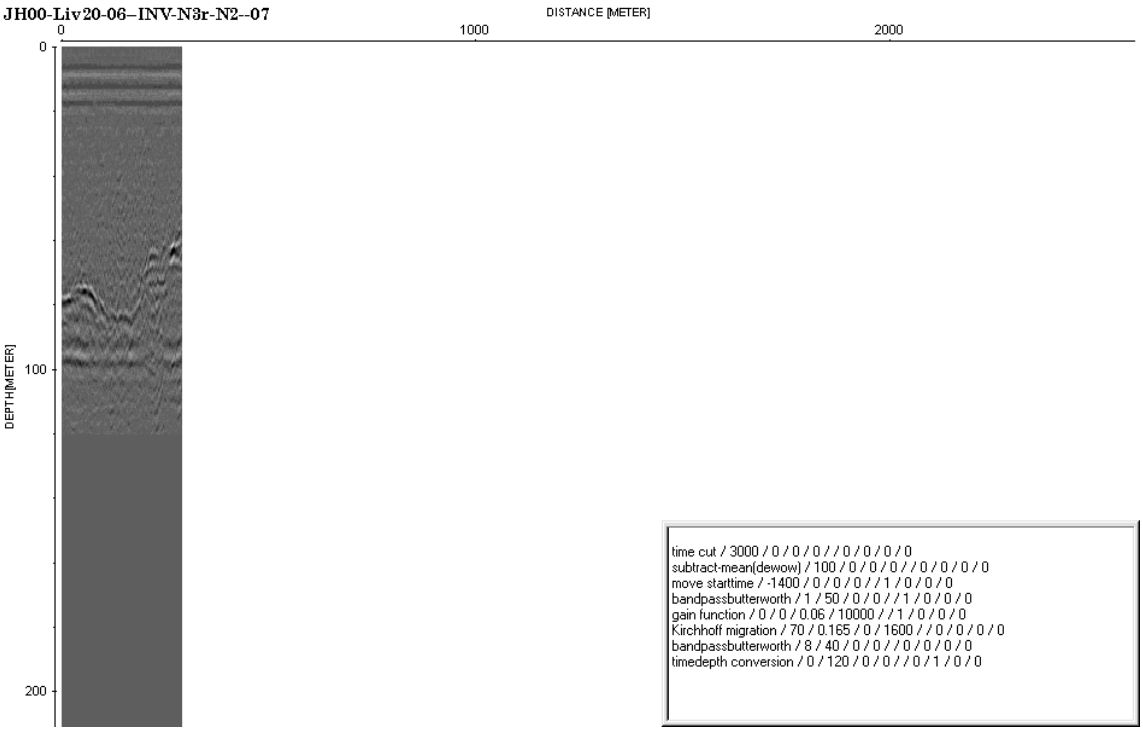

Figura B 6 Perfil N2–N3r.

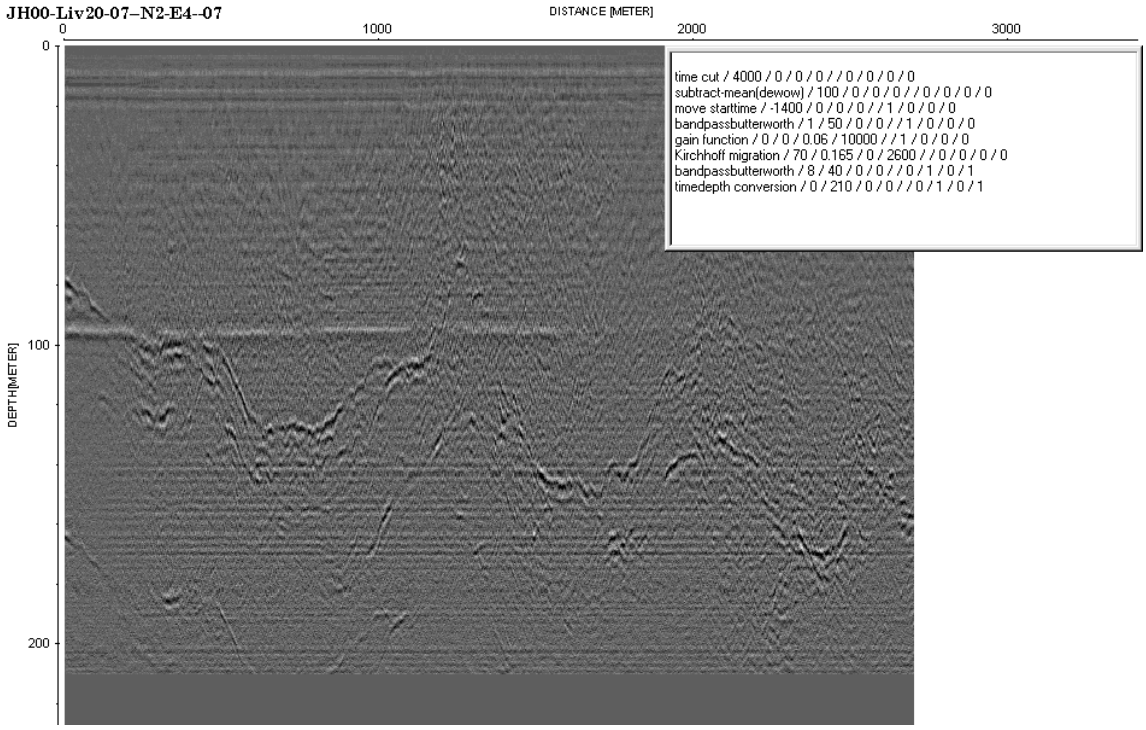

Figura B 7 Perfil N2–E4.

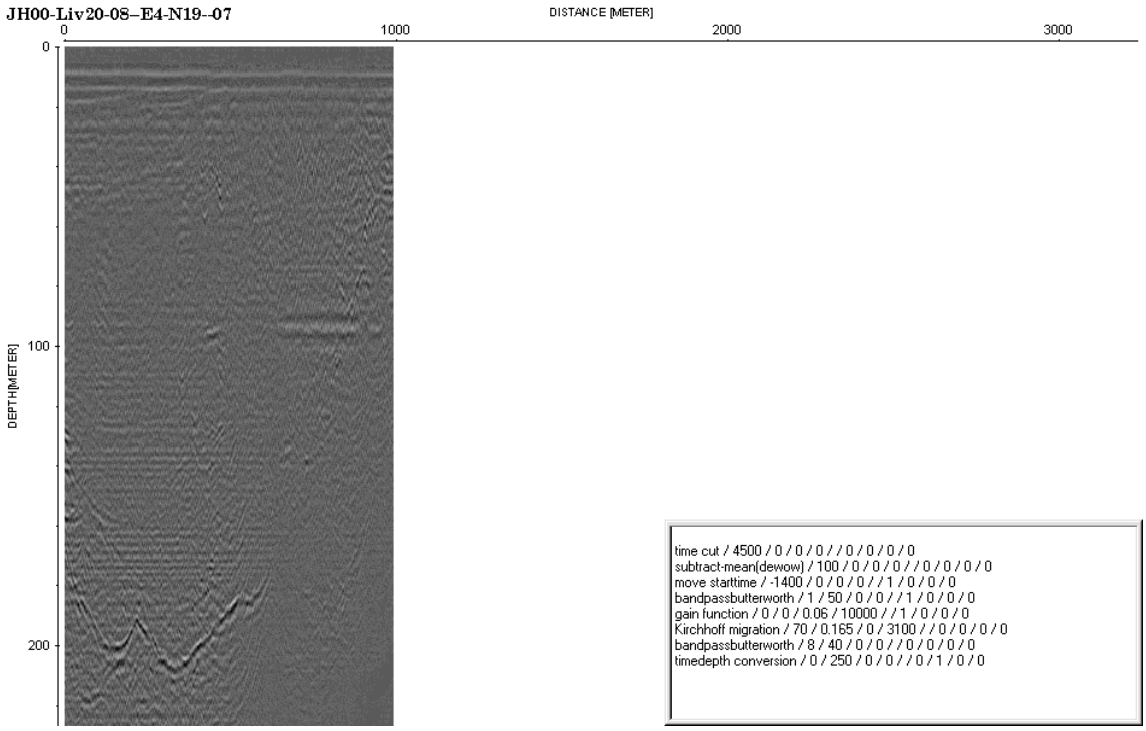

Figura B 8 Perfil E4–N19.

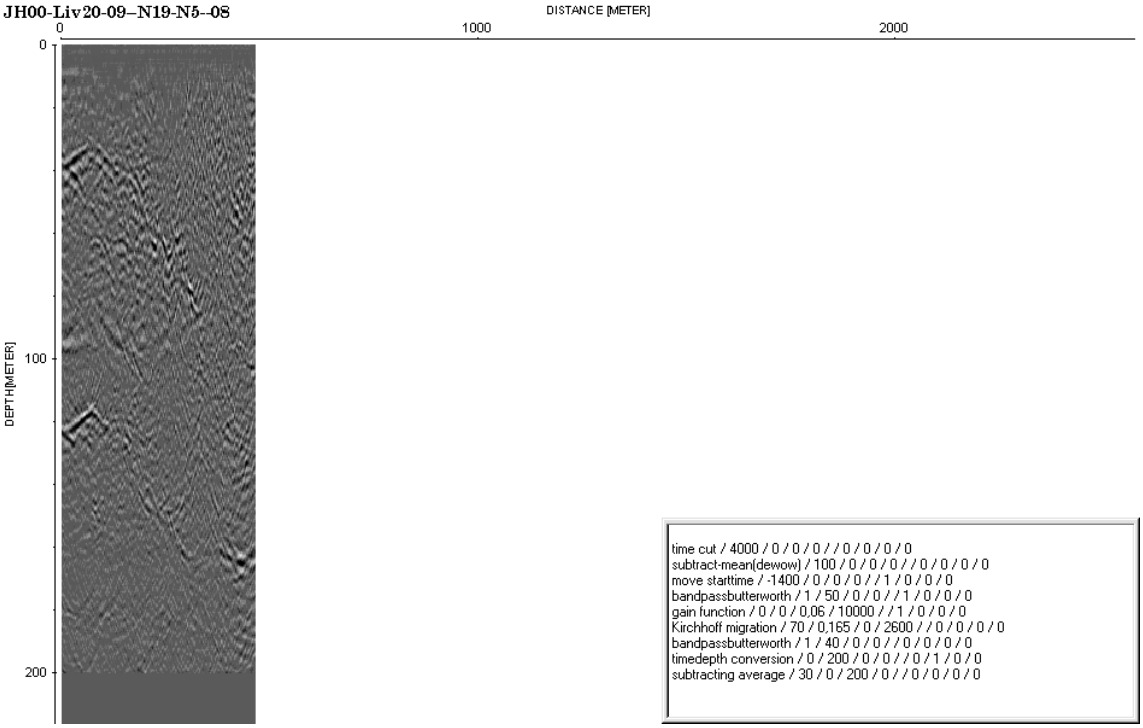

Figura B 9 Perfil N19–N5.

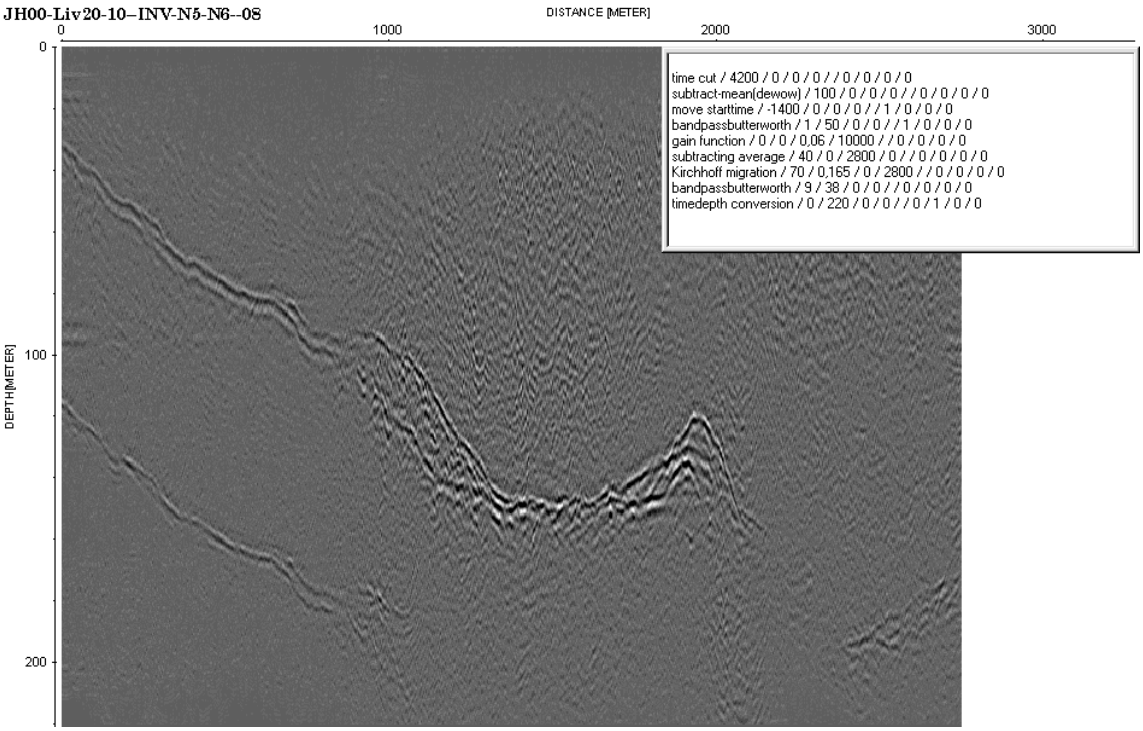

Figura B 10 Perfil N6–N5.

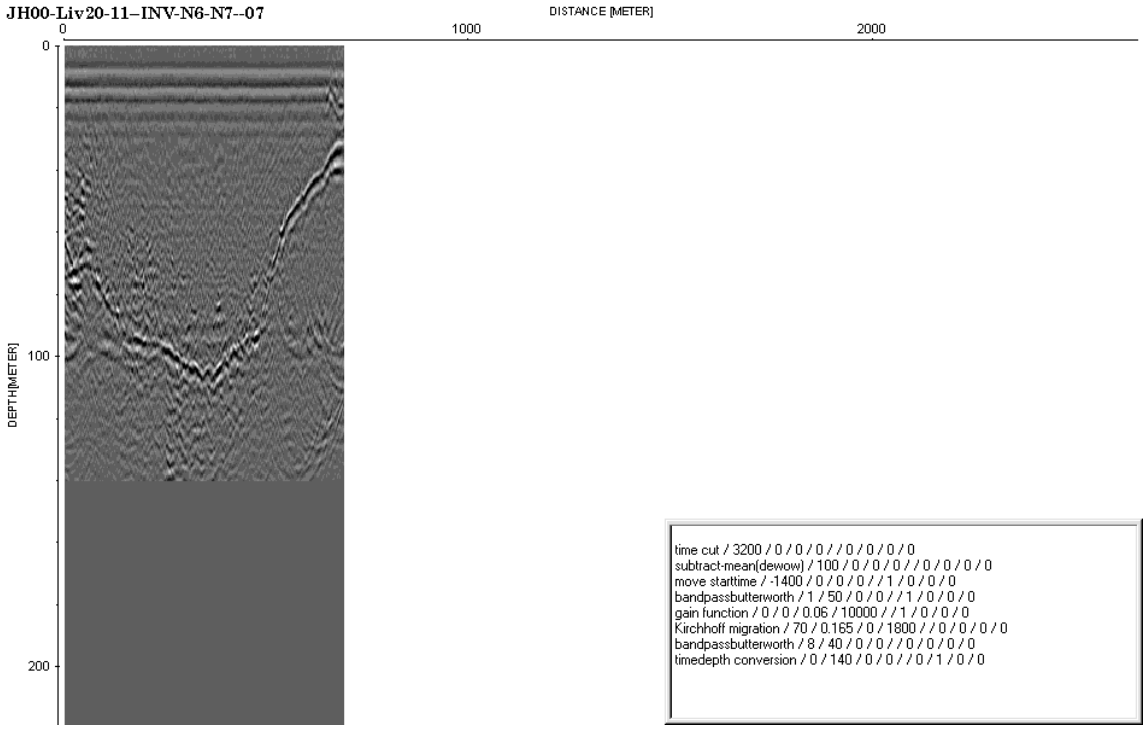

Figura B 11 Perfil N7–N6.

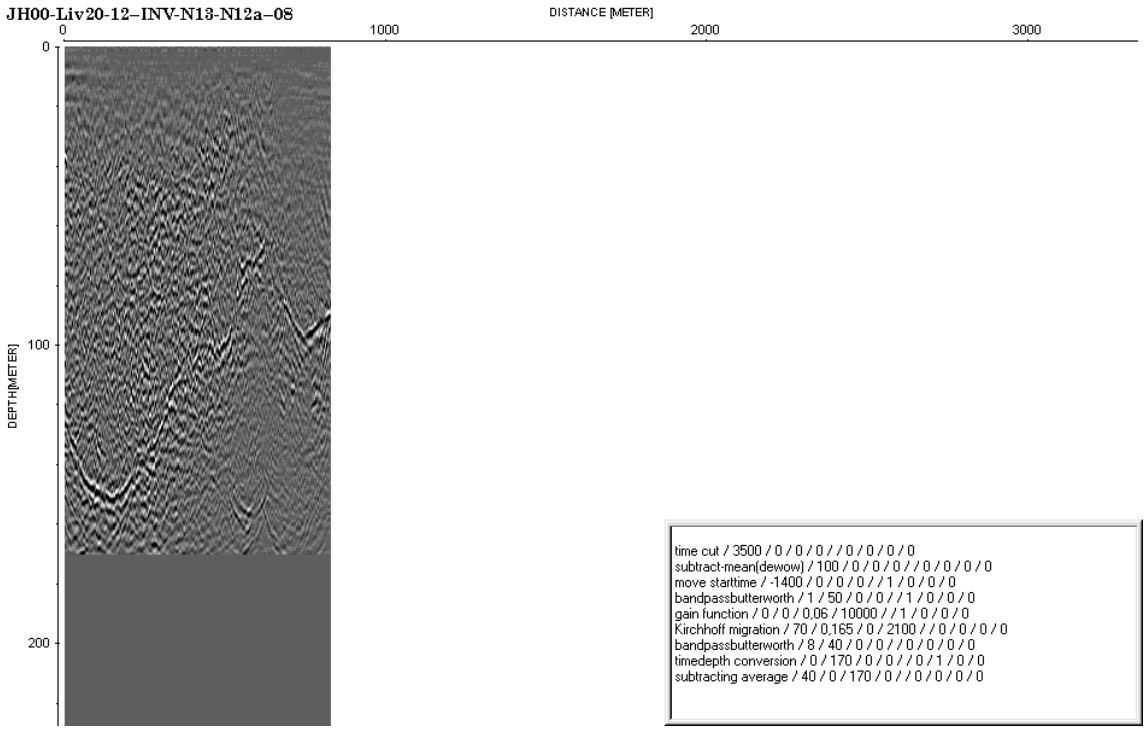

Figura B 12 Perfil N12a–N13.

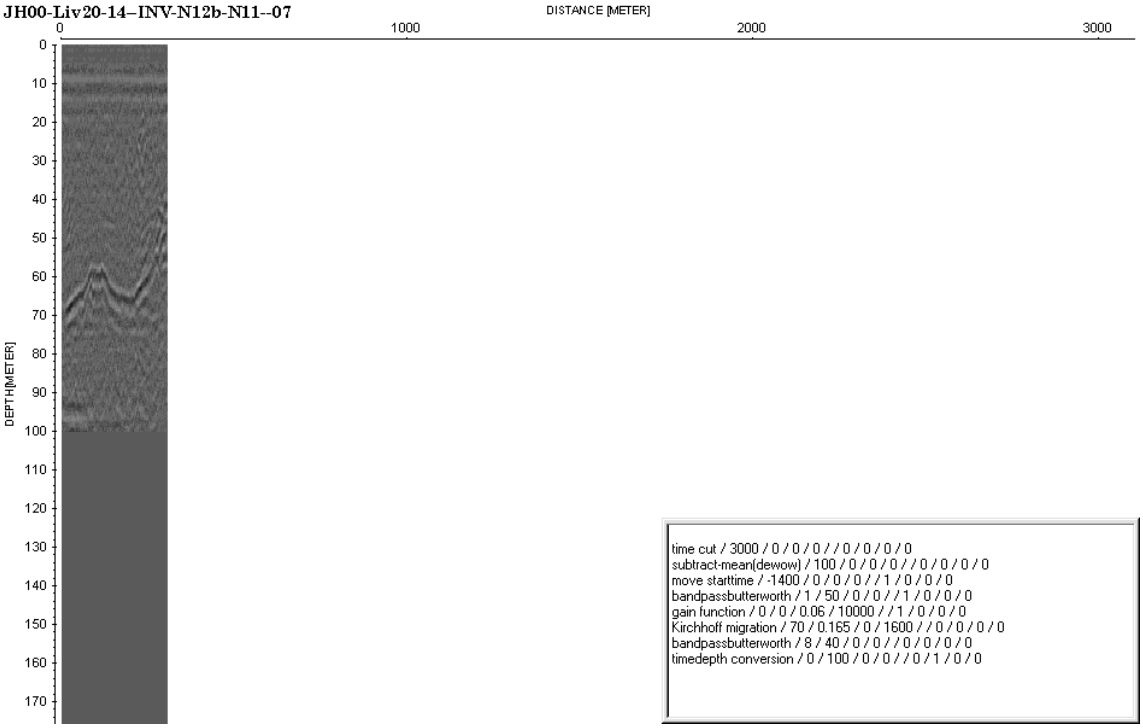

Figura B 13 Perfil N11–N12b.

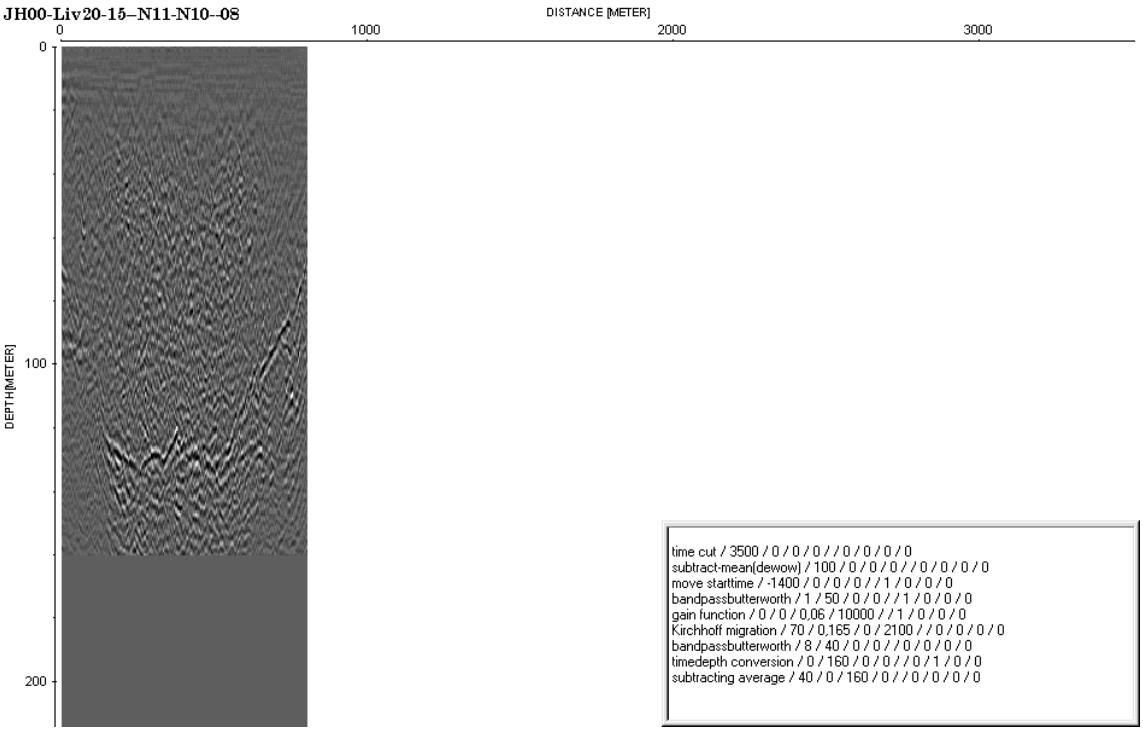

Figura B 14 Perfil N11–N10.

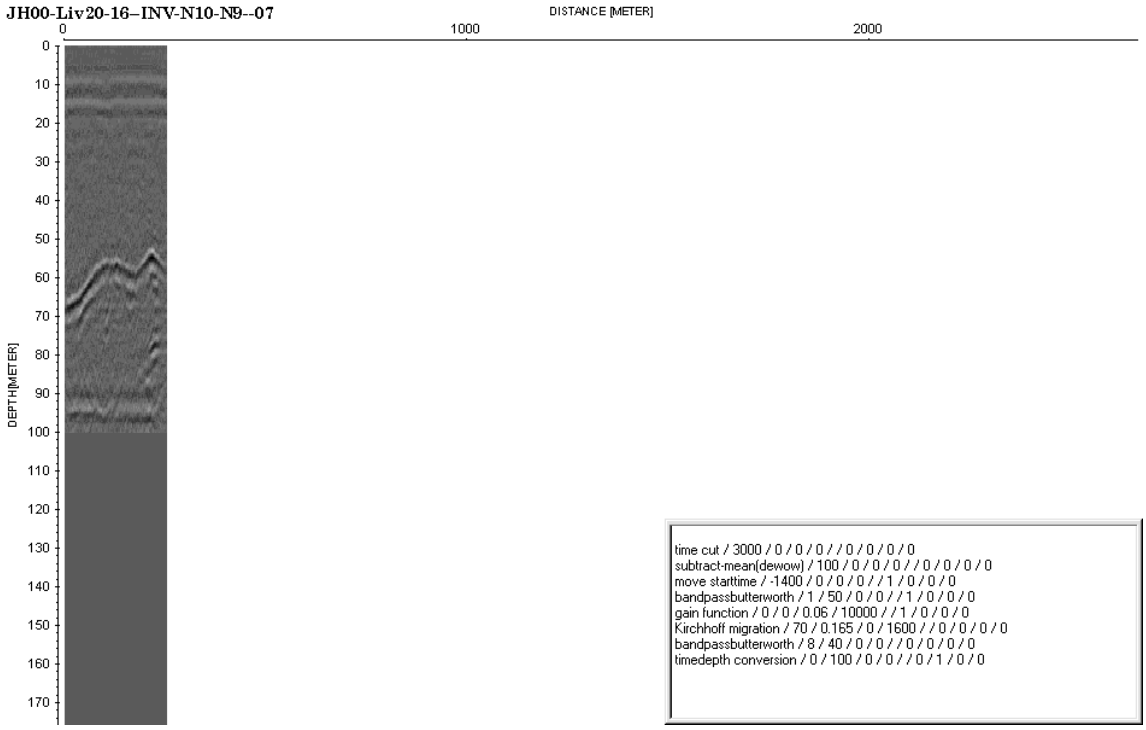

Figura B 15 Perfil N9–N10.

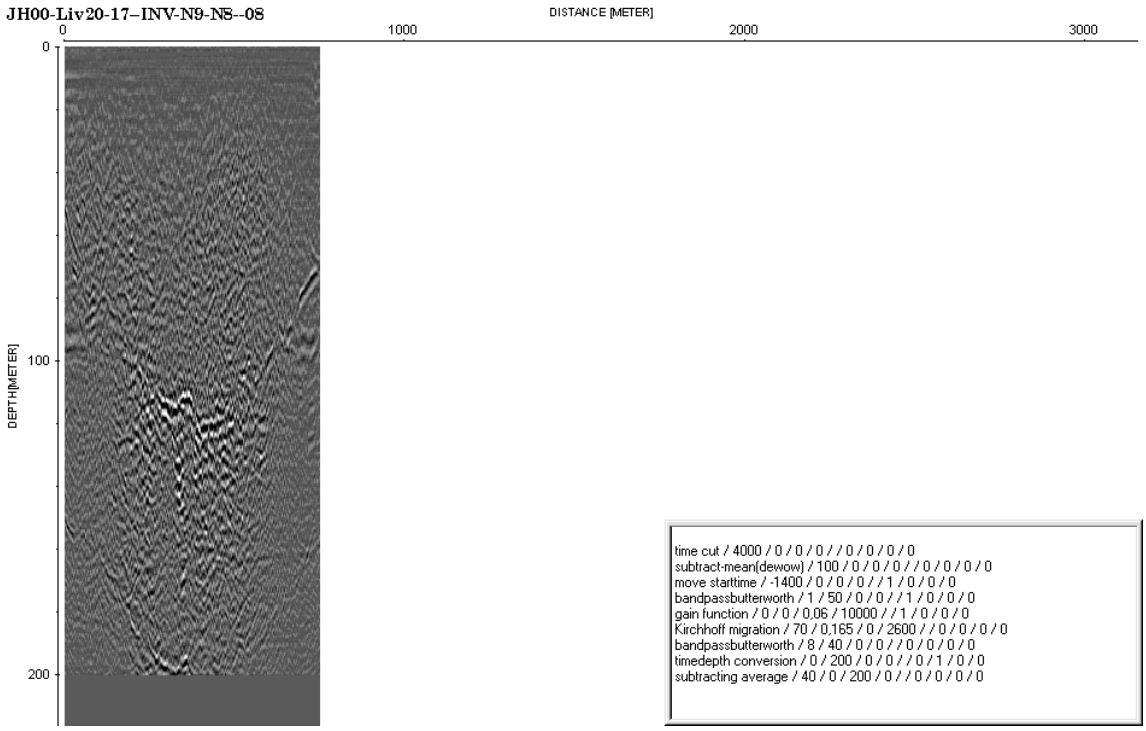

Figura B 16 Perfil N8–N9.

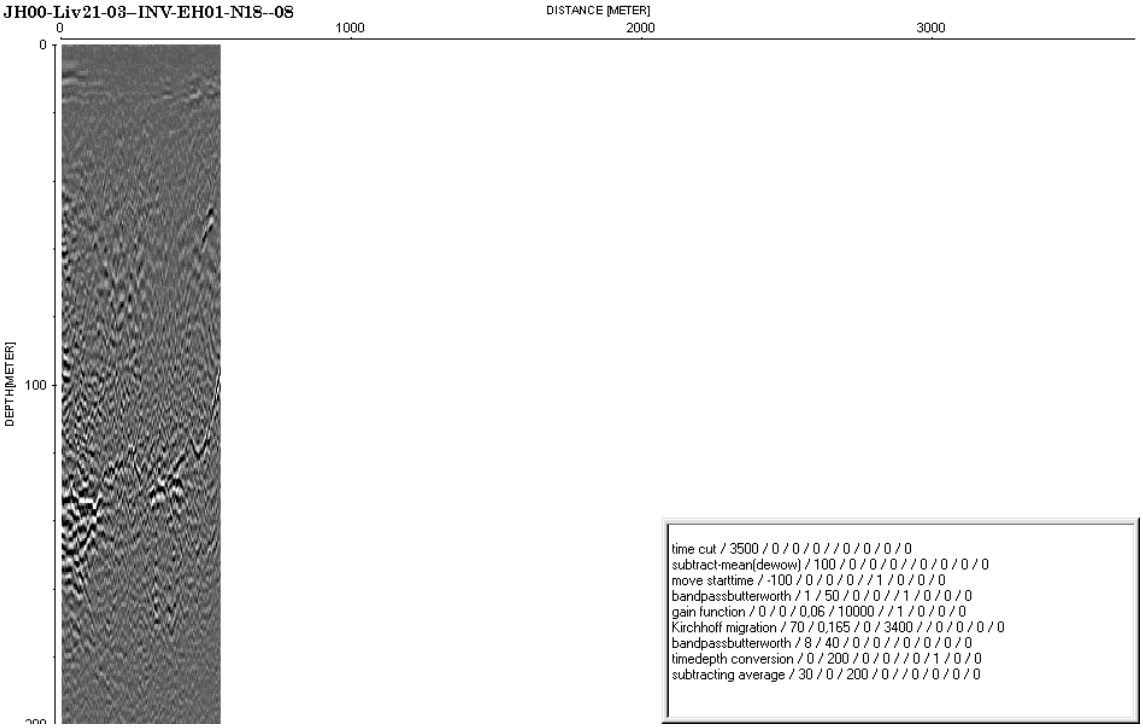

Figura B 17 Perfil N18–EH01.

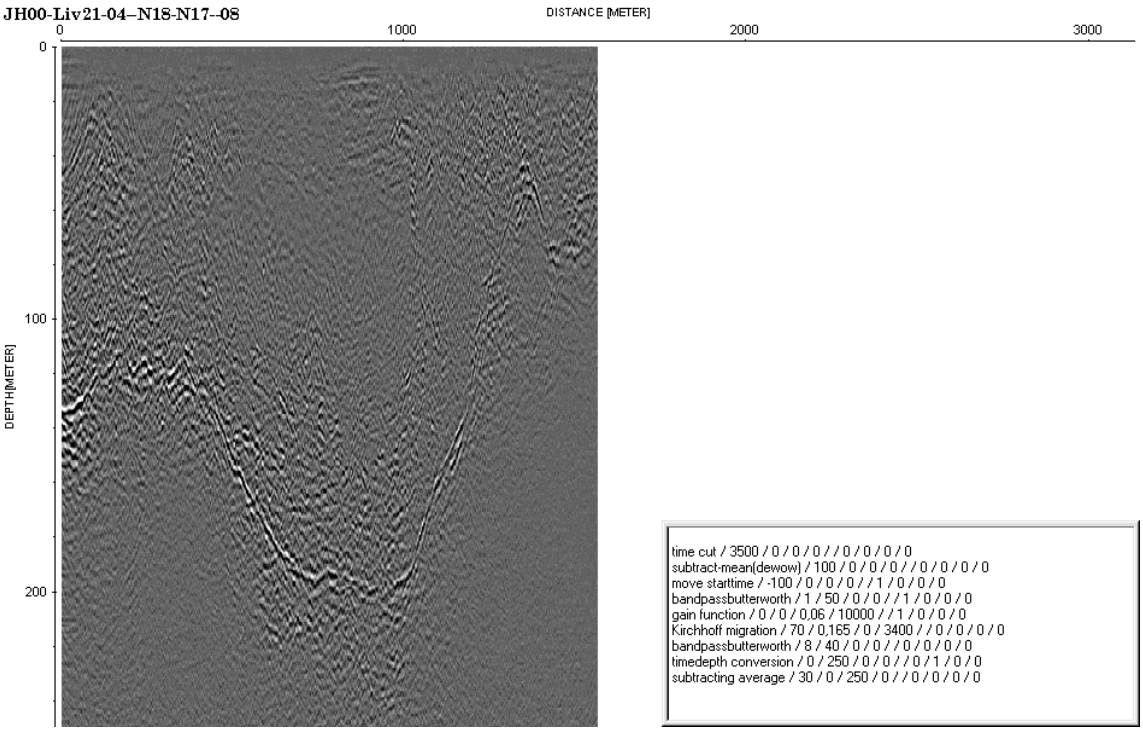

Figura B 18 Perfil N18–N17.

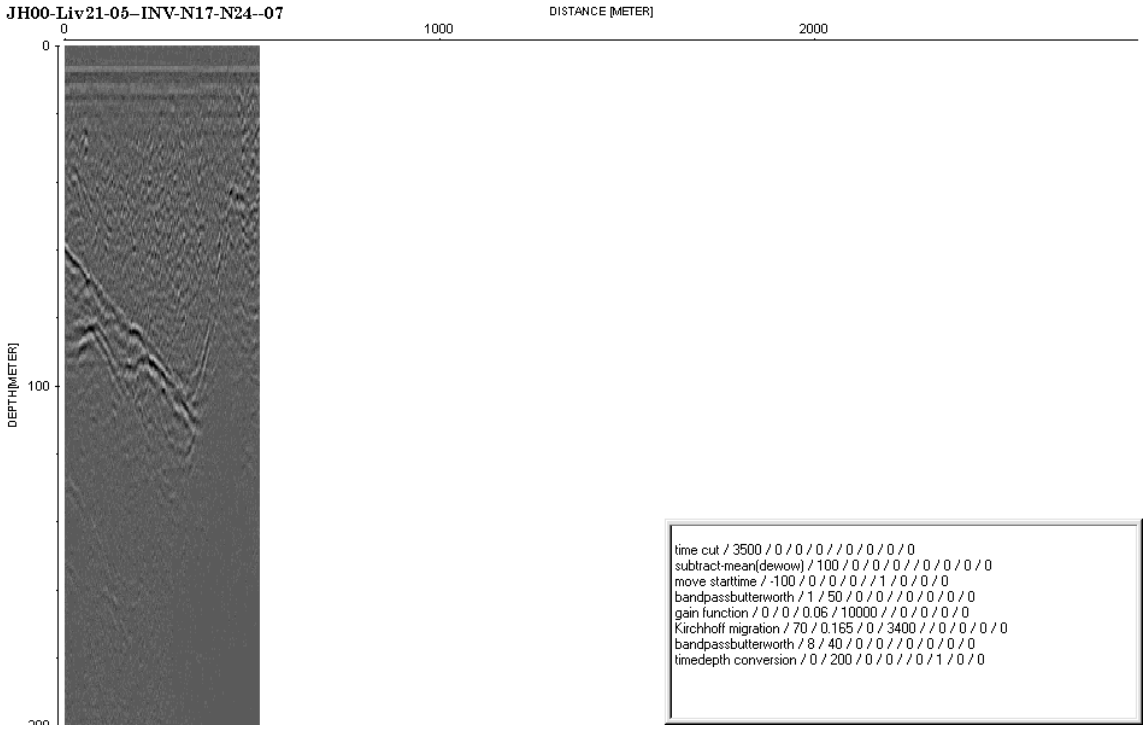

Figura B 19 Perfil N24–N17.

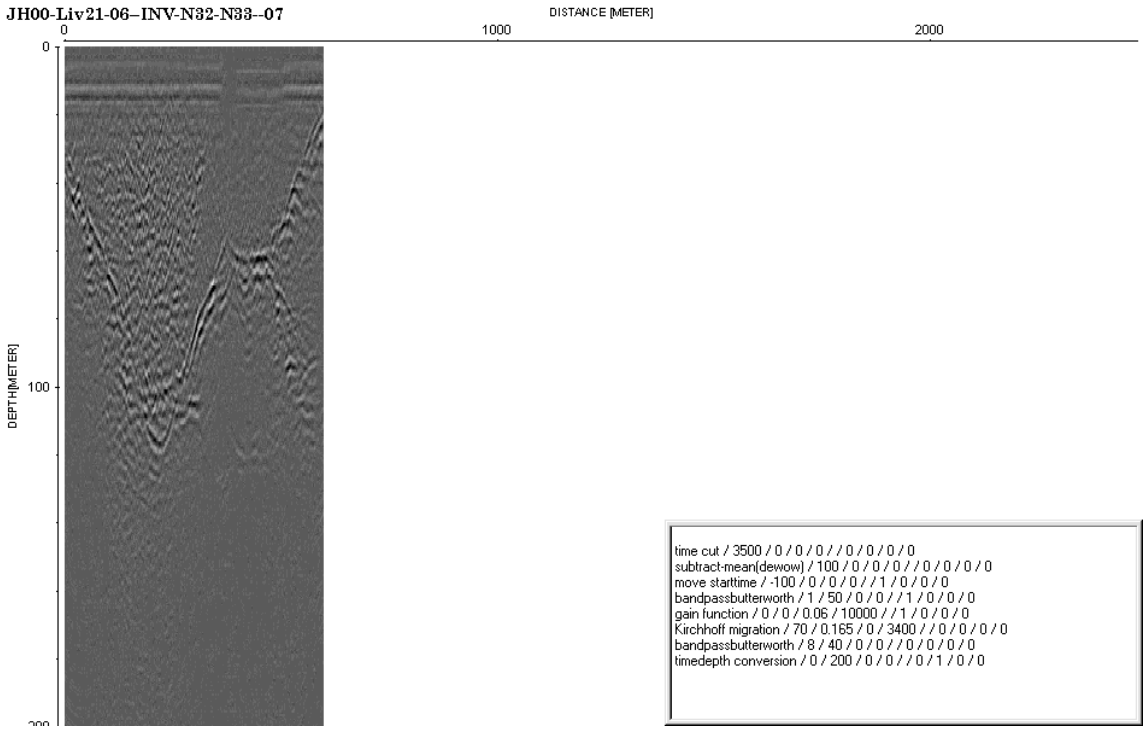

Figura B 20 Perfil N33–N32.

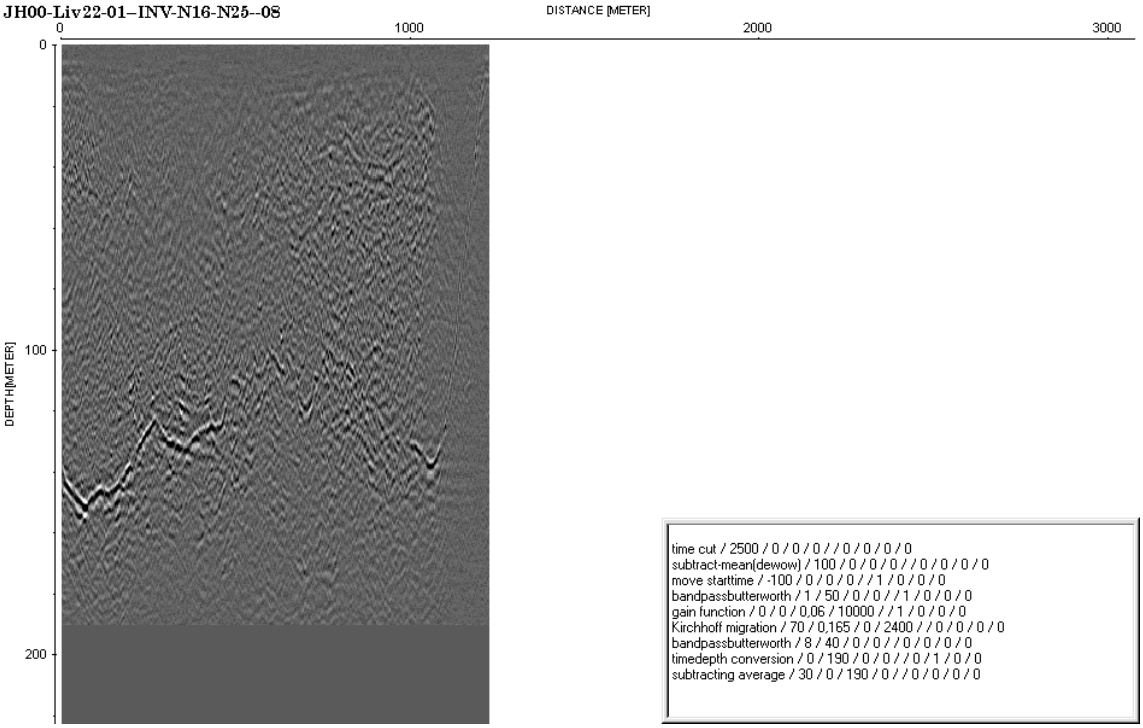

Figura B 21 Perfil N25–N16.

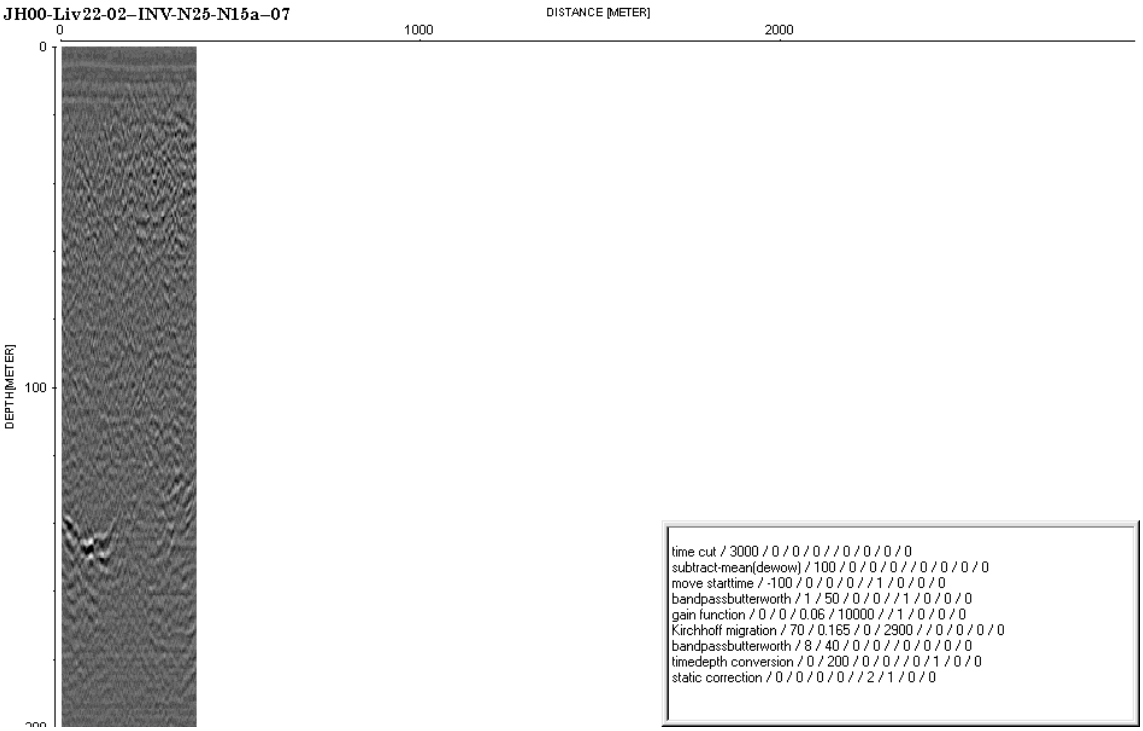

Figura B 22 Perfil N15a–N25.

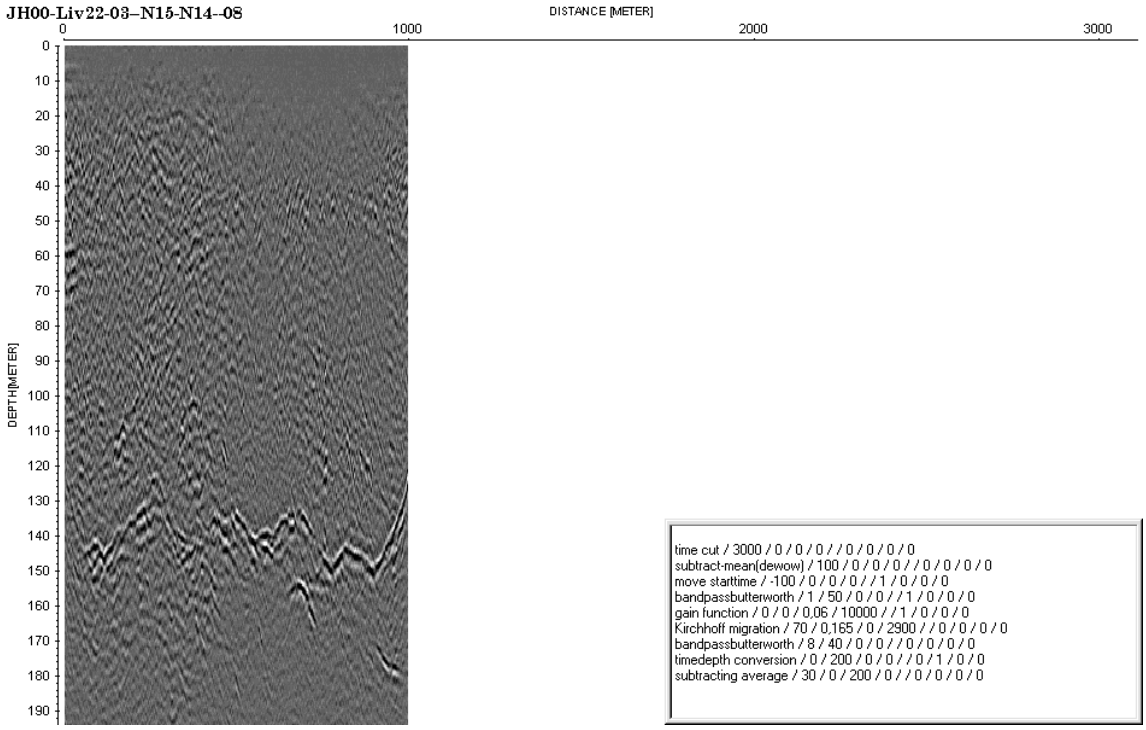

Figura B 23 Perfil N15–N14.

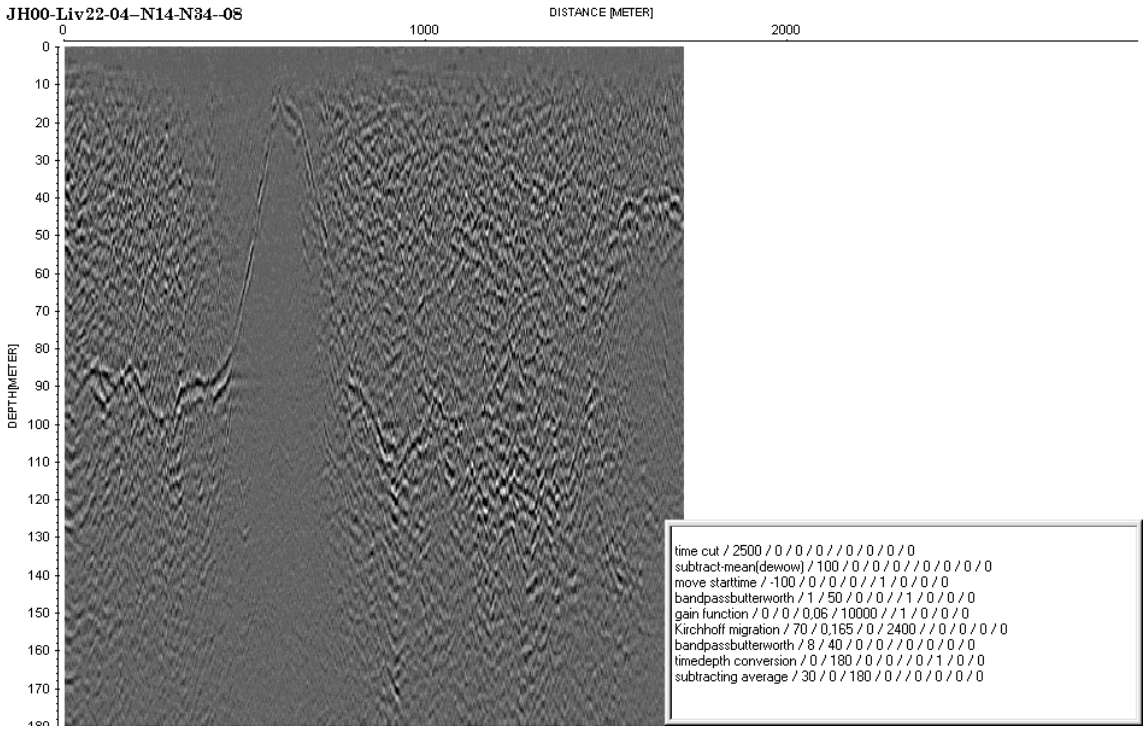

Figura B 24 Perfil N14–N34.

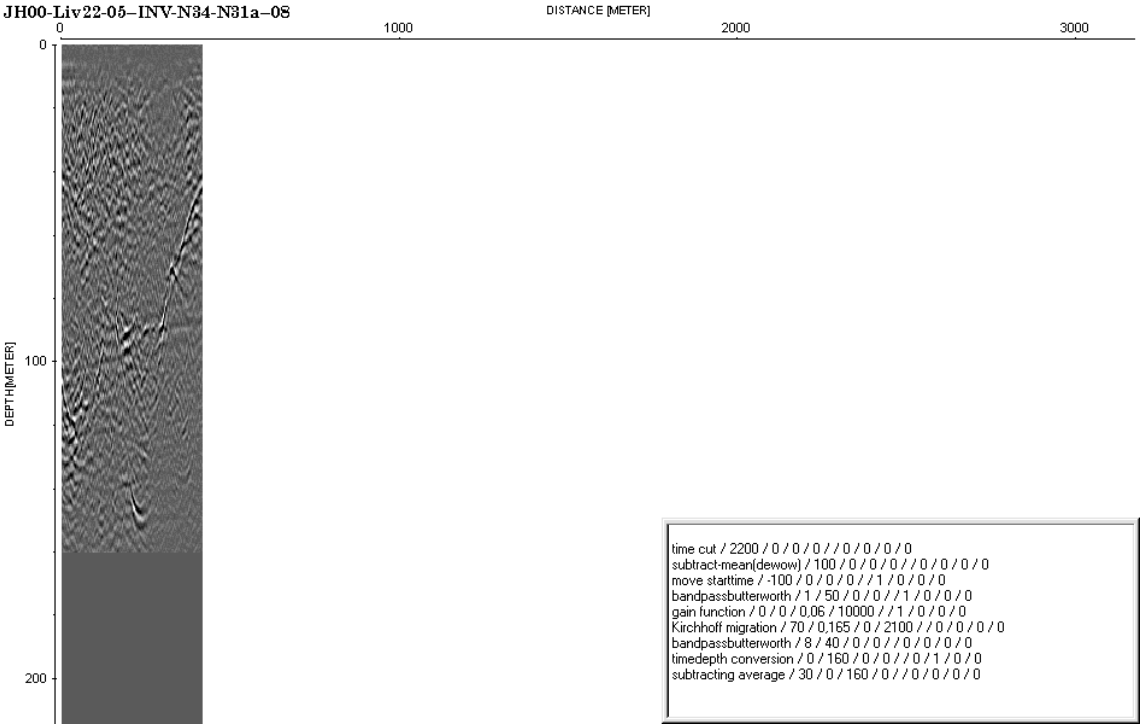

Figura B 25 Perfil N31a–N34.

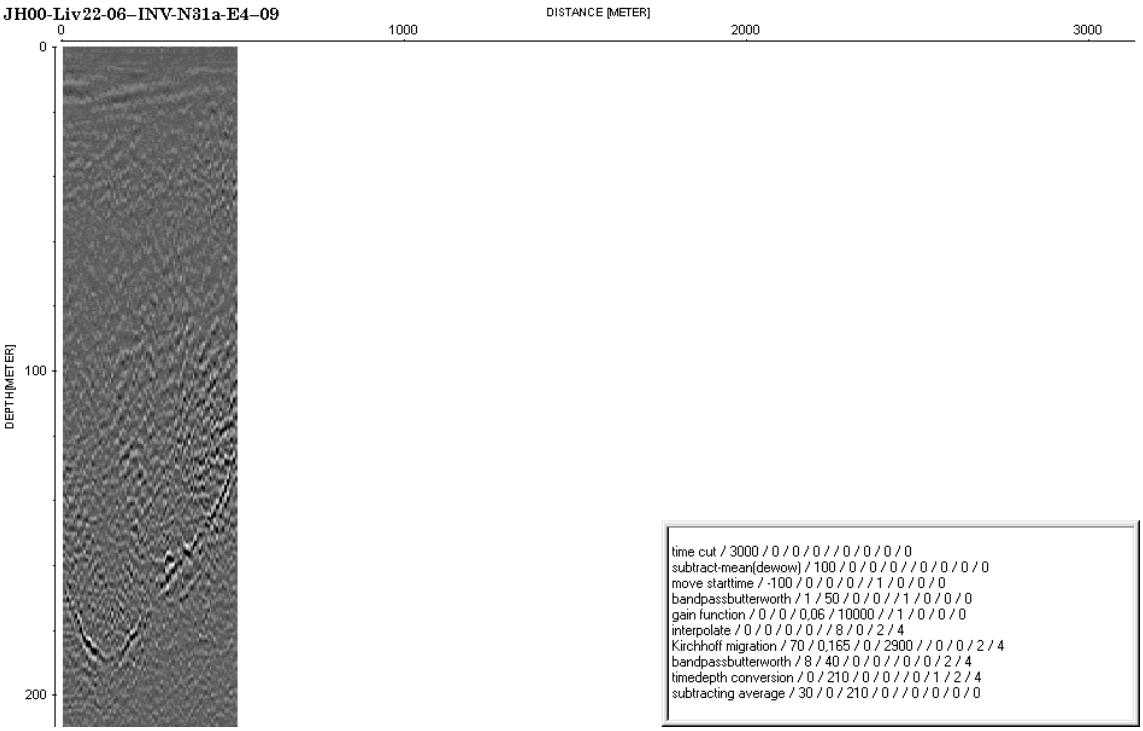

Figura B 26 Perfil E4–N31a.

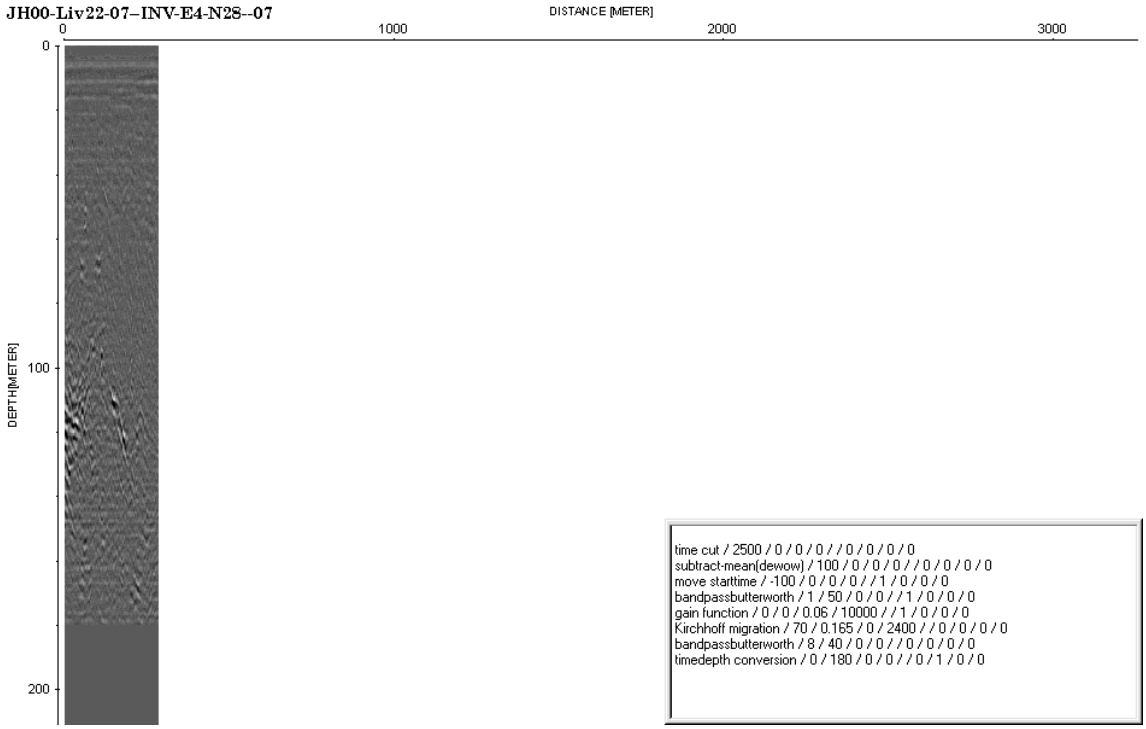

Figura B 27 Perfil N28–E4.

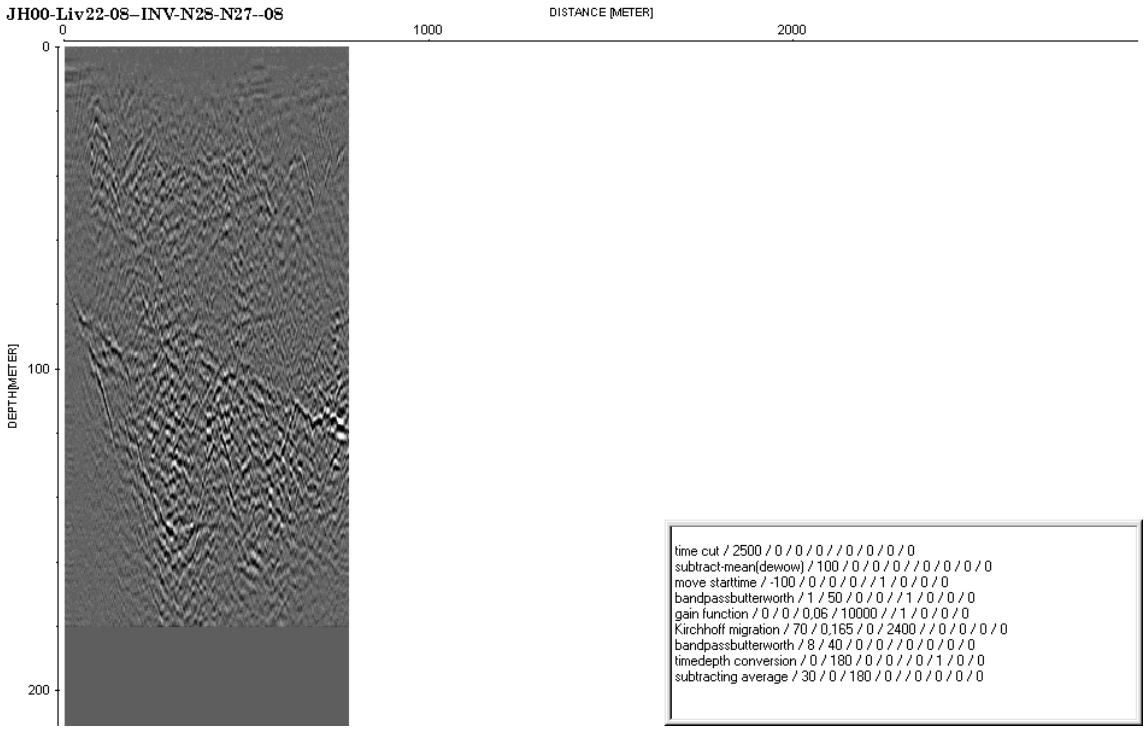

Figura B 28 Perfil N27–N28.

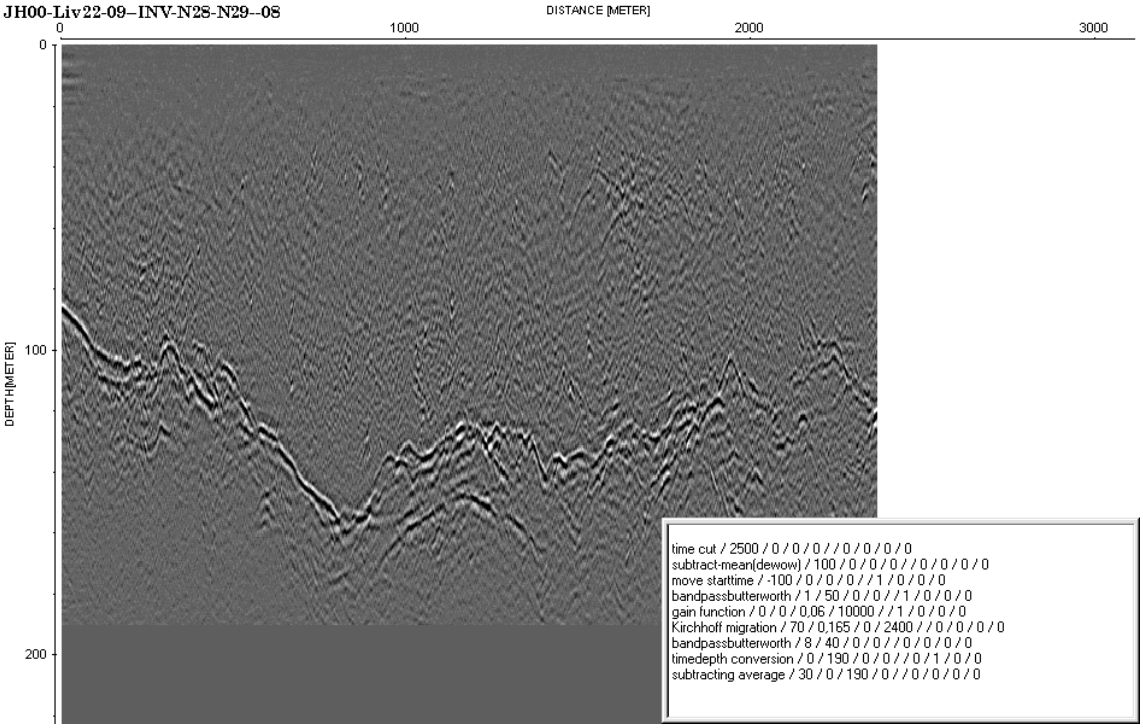

Figura B 29 Perfil N29–N28.

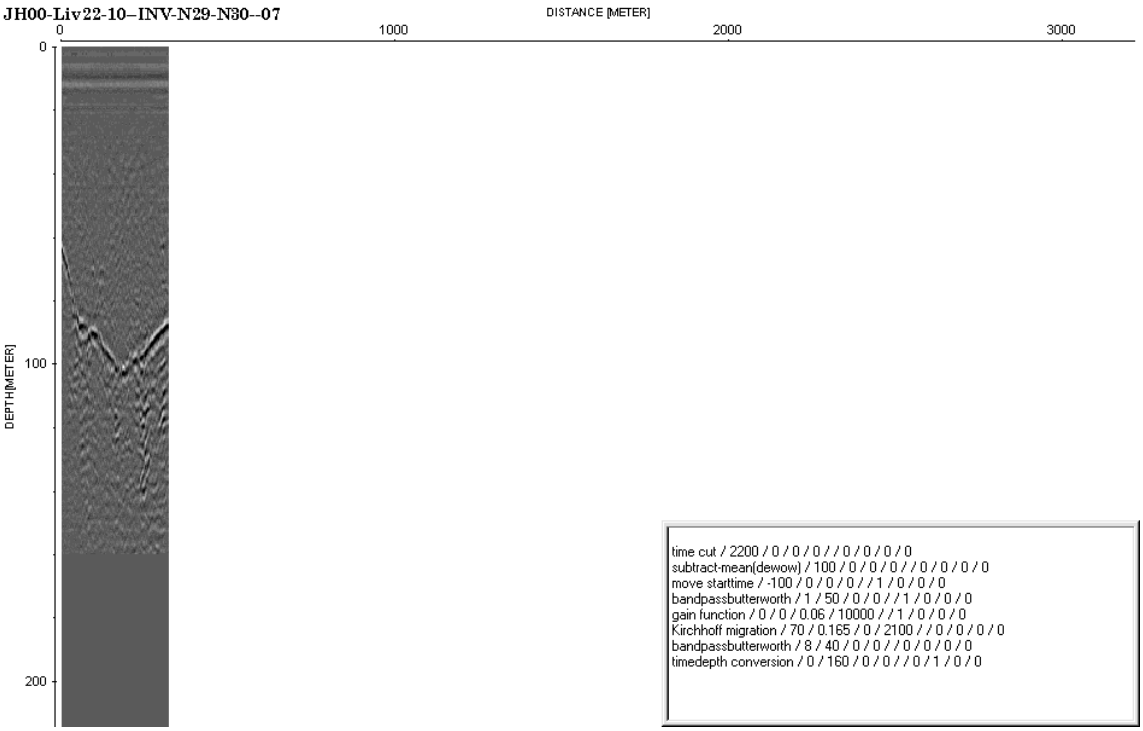

Figura B 30 Perfil N30–N29.

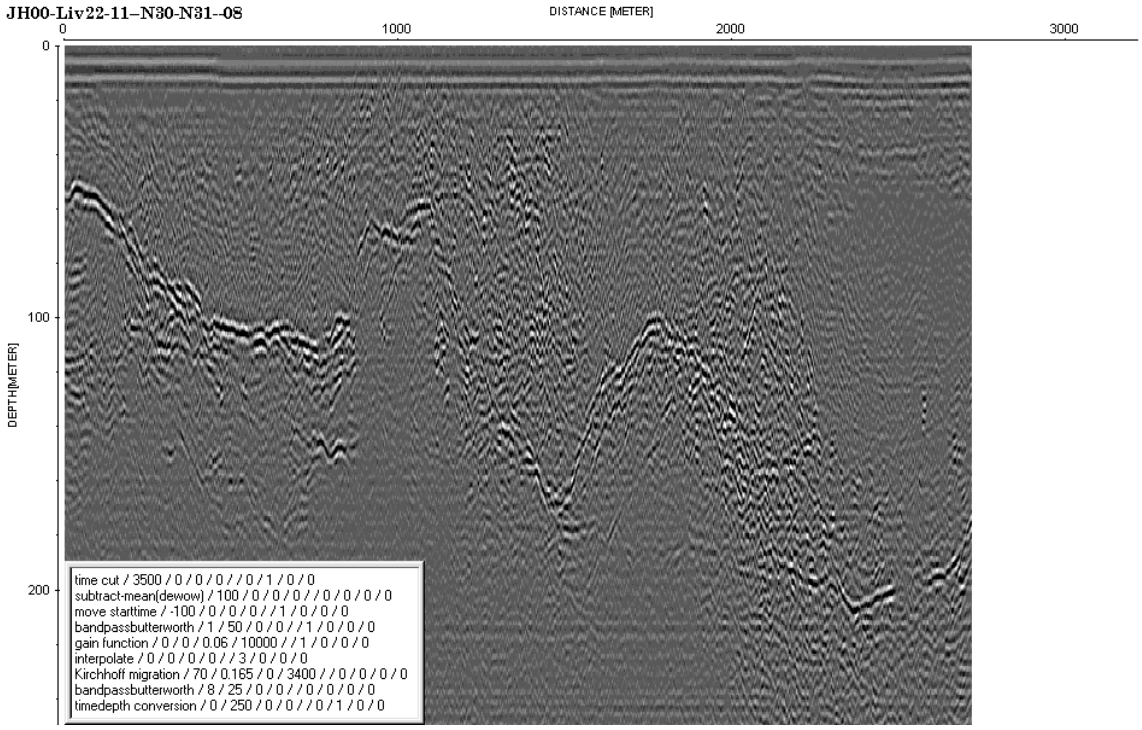

Figura B 31 Perfil N30–N31.

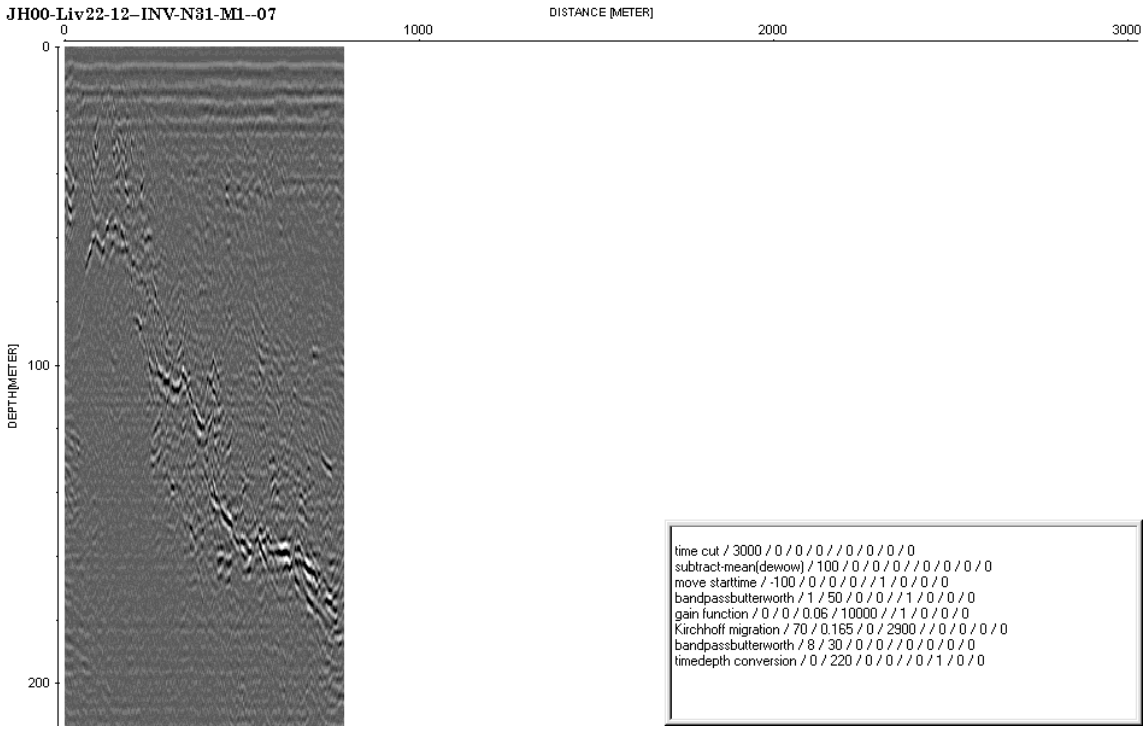

Figura B 32 Perfil M1–N31.

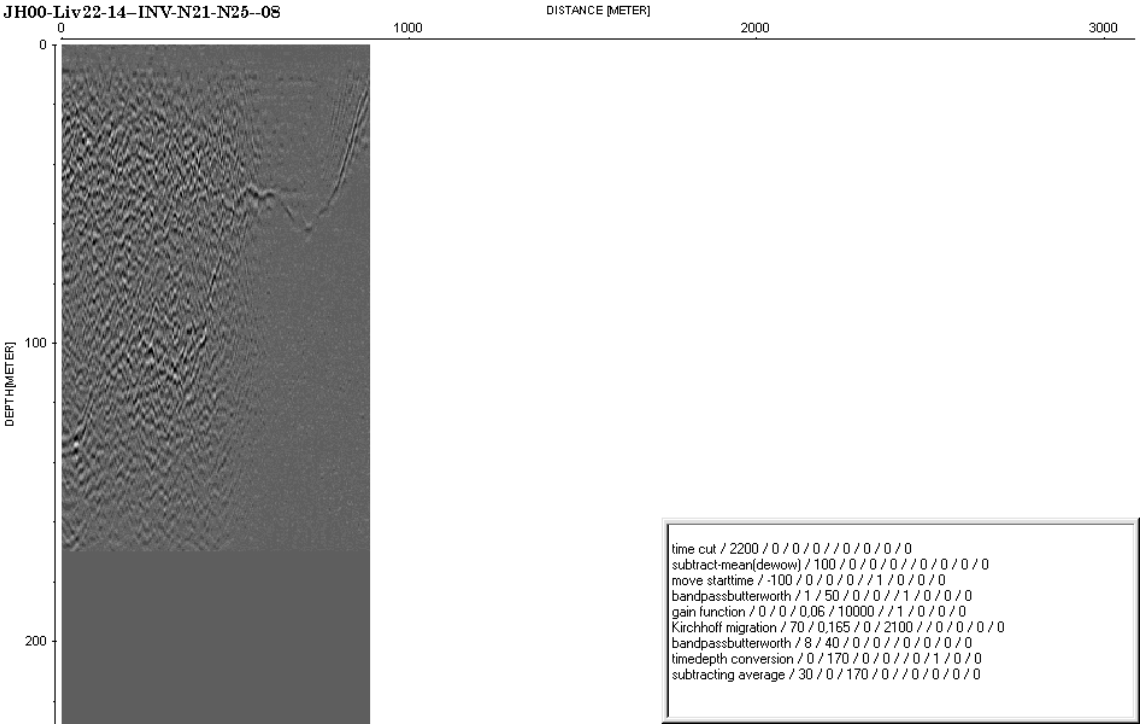

Figura B 33 Perfil N25–N21.

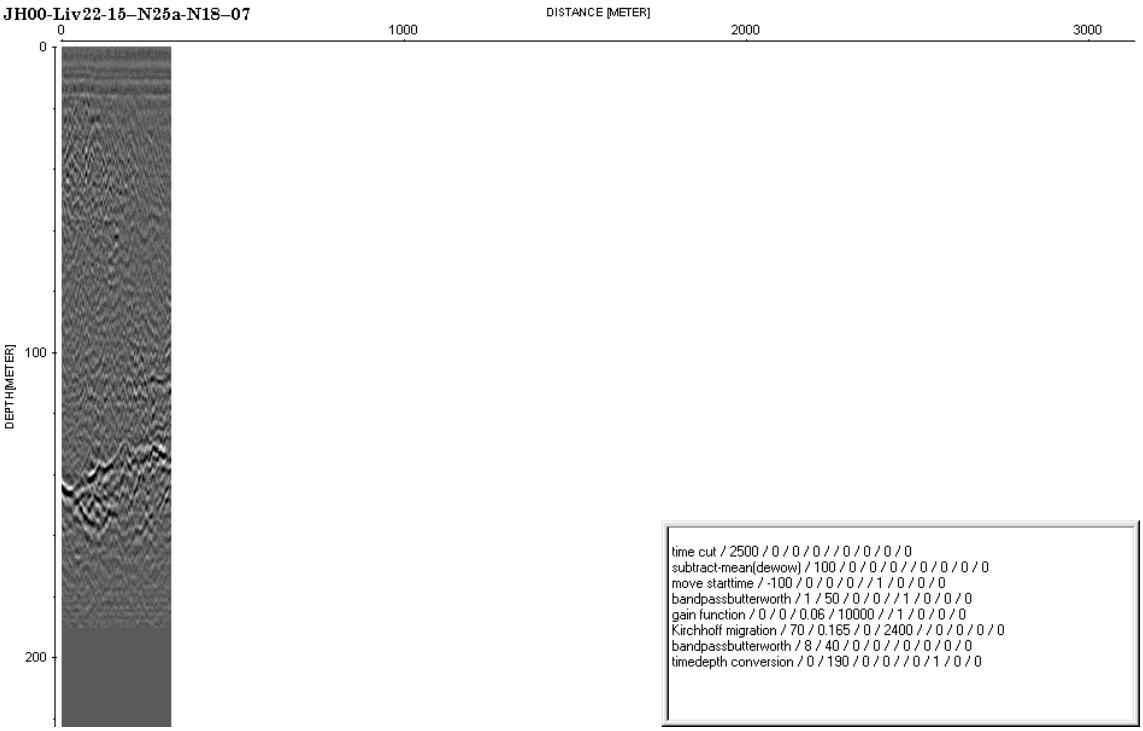

Figura B 34 Perfil N25a–N18.

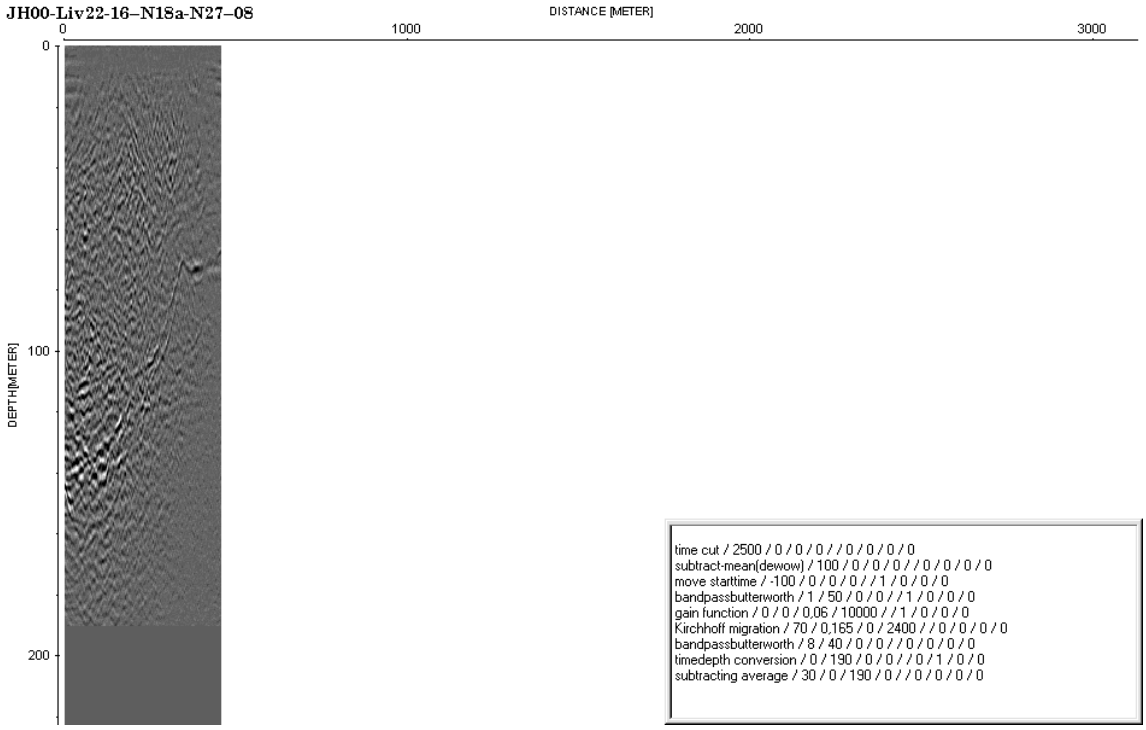

Figura B 35 Perfil N18a–N17.

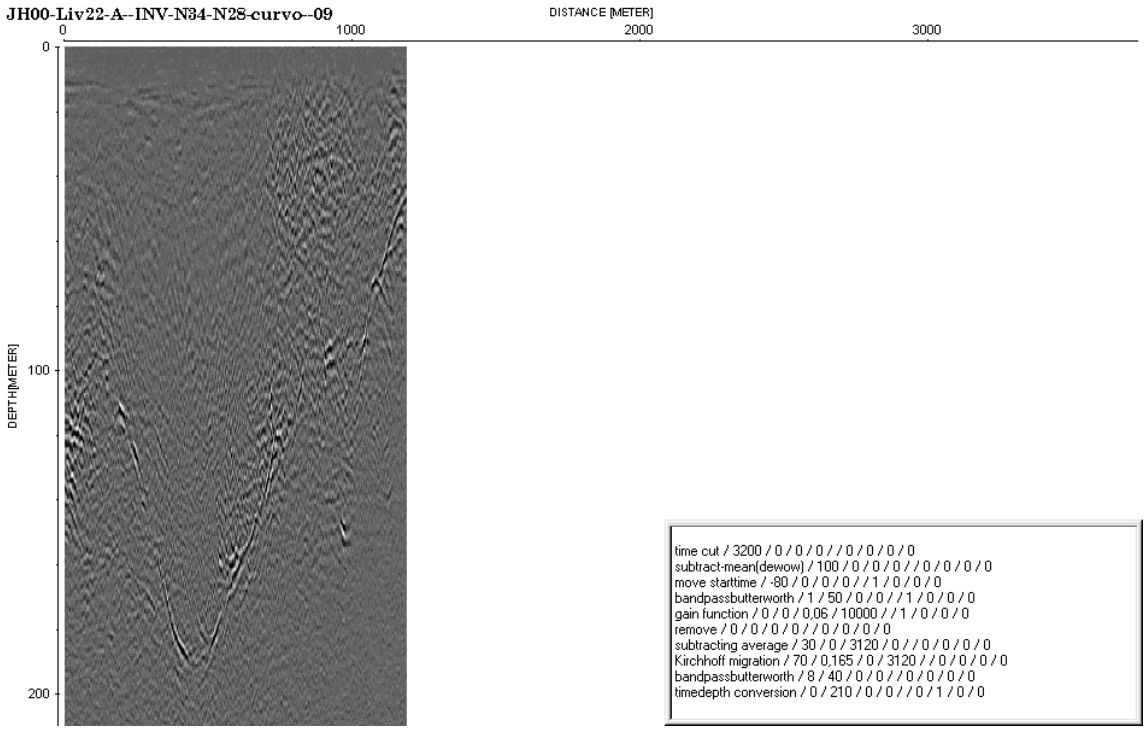

Figura B 36 Perfil N28–N34.
A mitad de este perfil hay una corrección del rumbo de 25º .

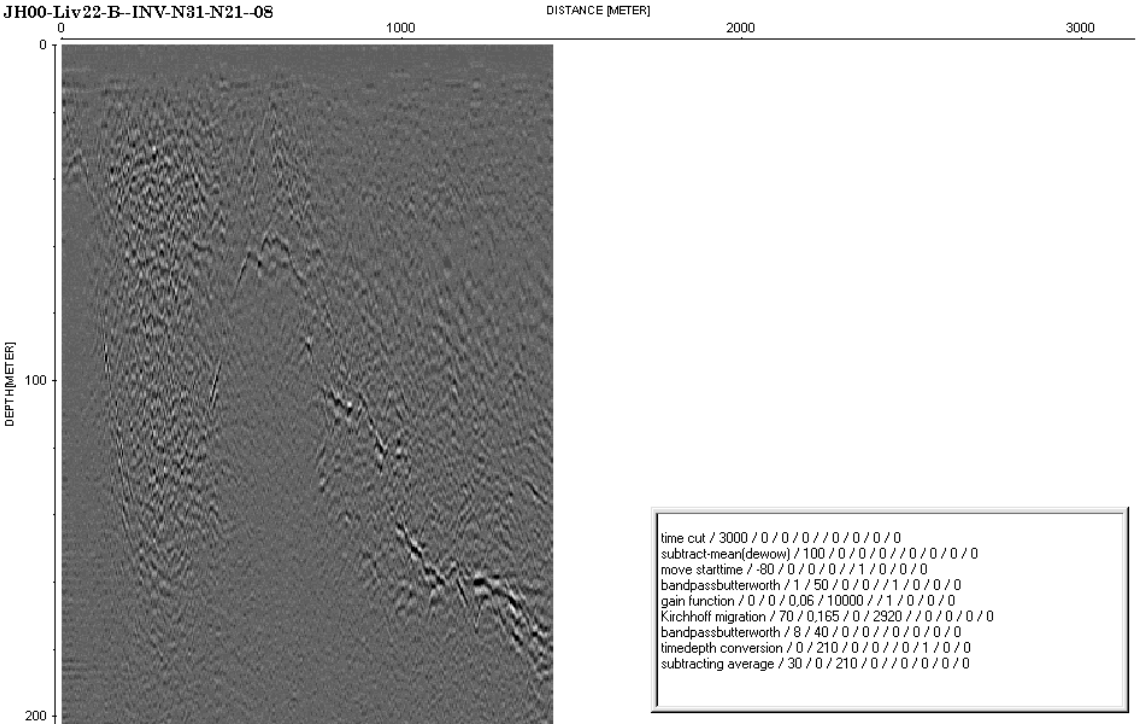

Figura B 37 Perfil N21–N31.

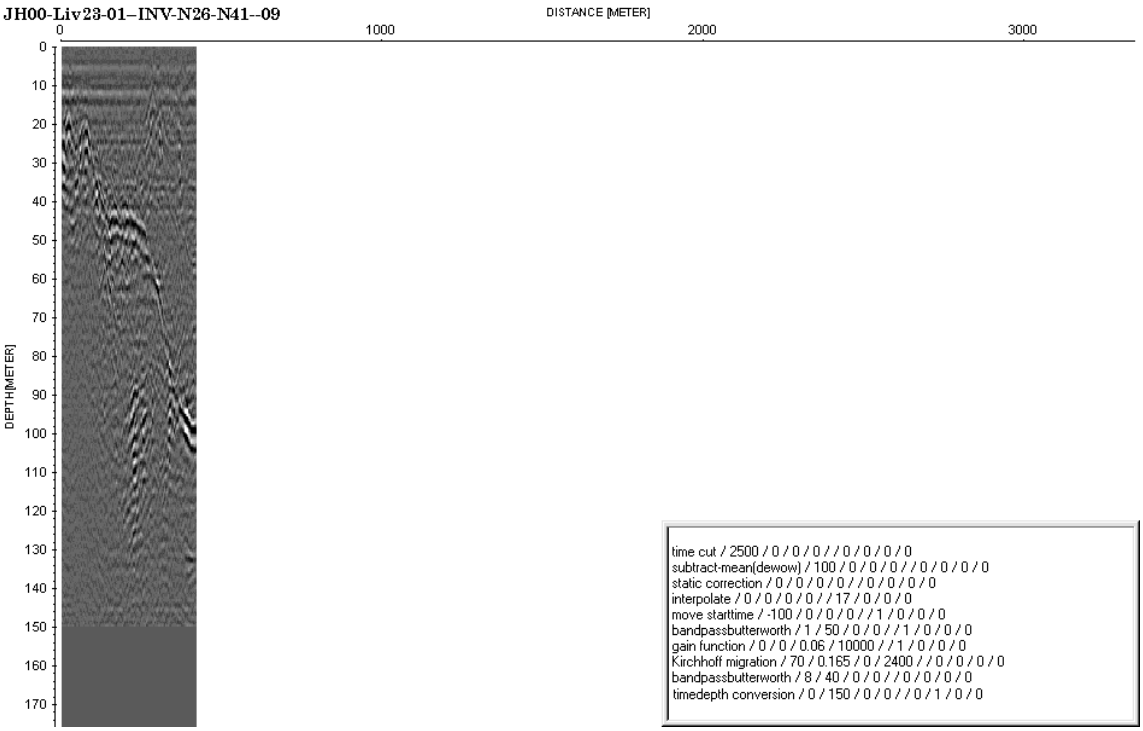

Figura B 38 Perfil N41–N26.

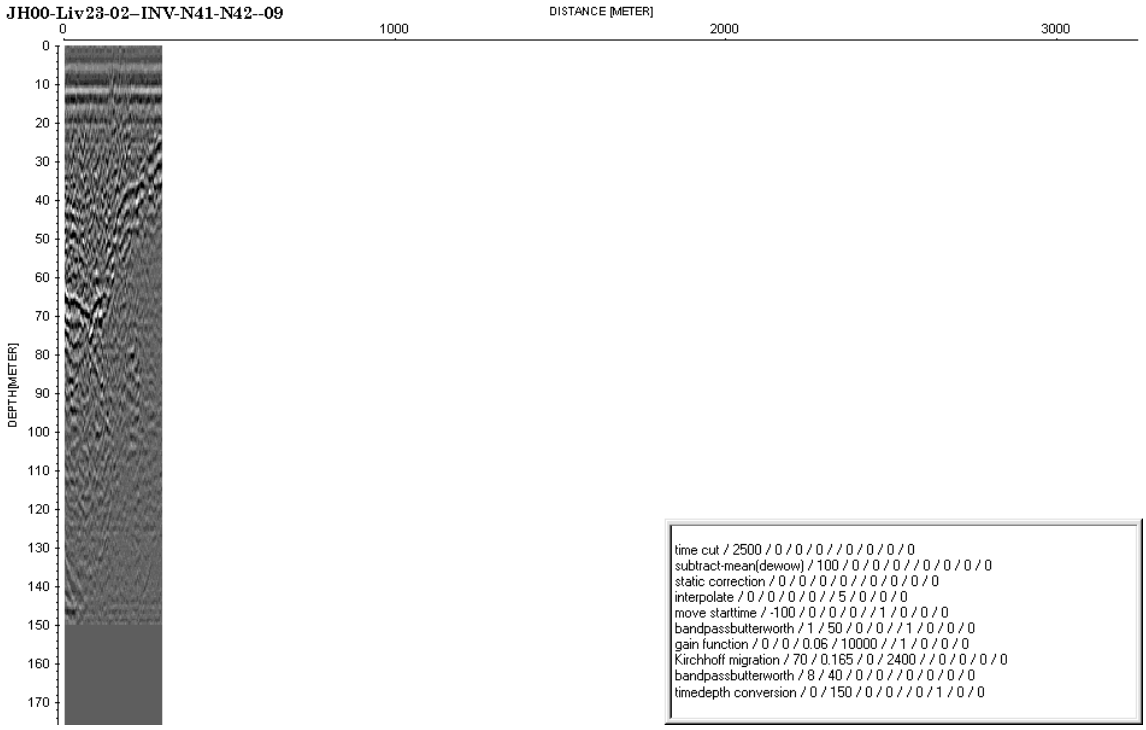

Figura B 39 Perfil N42–N41.

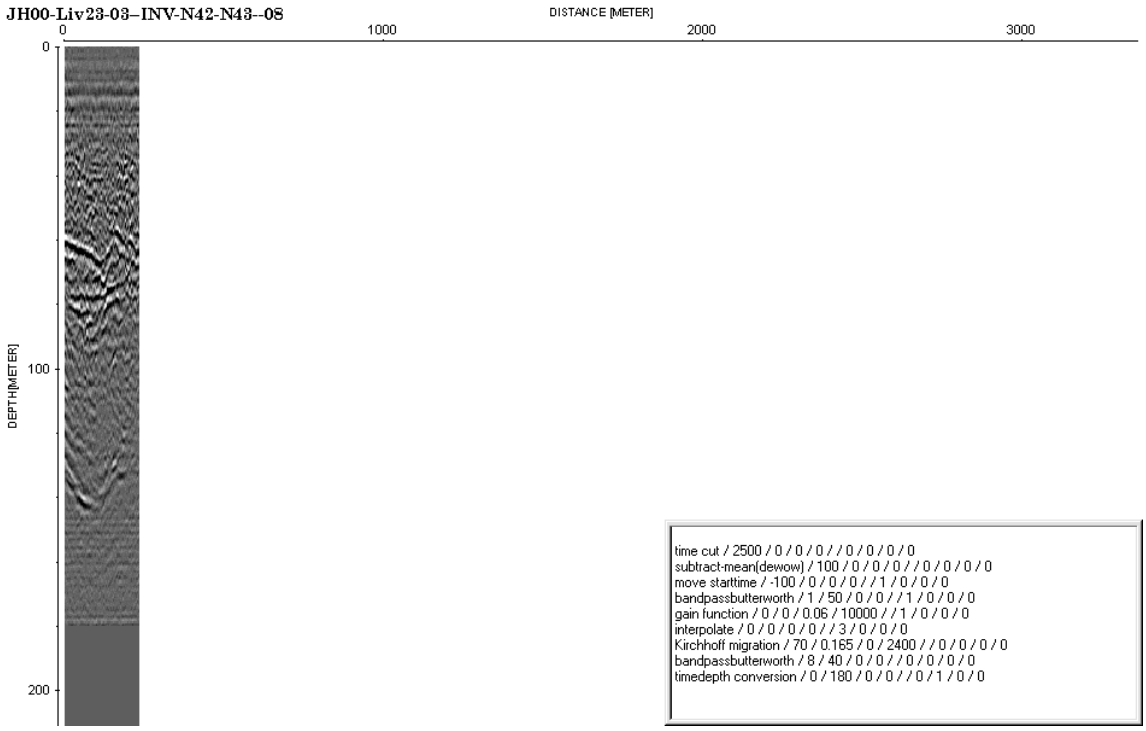

Figura B 40 Perfil N43–N42.

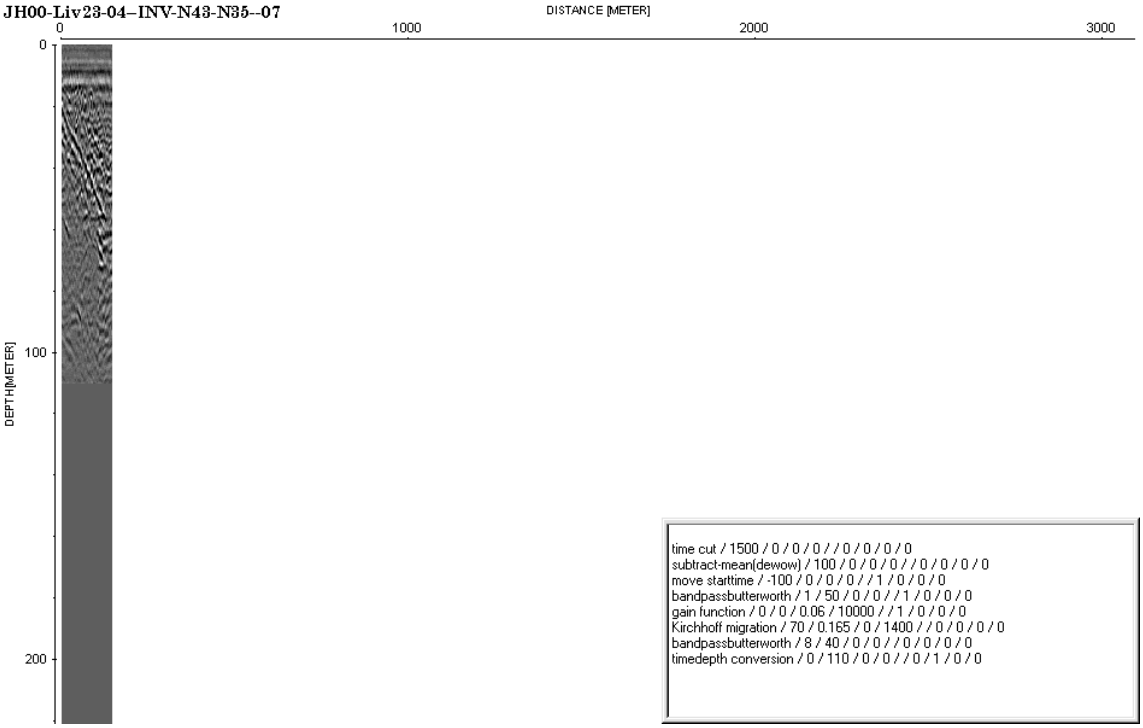

Figura B 41 Perfil N35–N43.

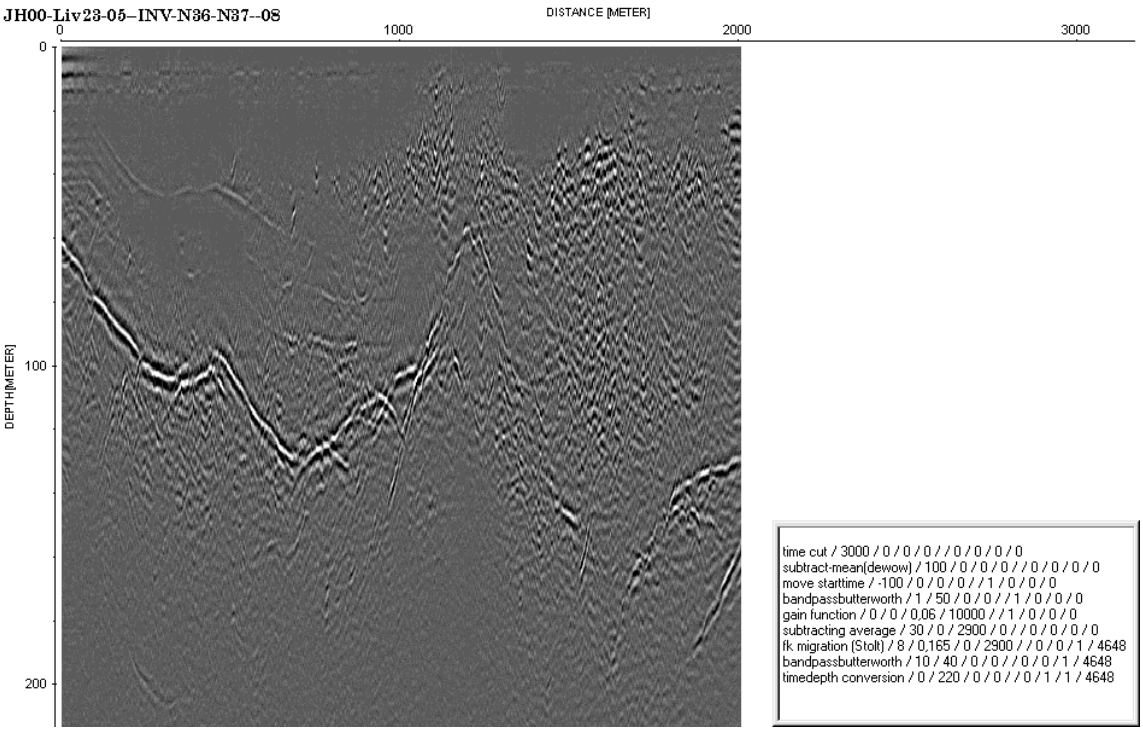

Figura B 42 Perfil N37–N36.

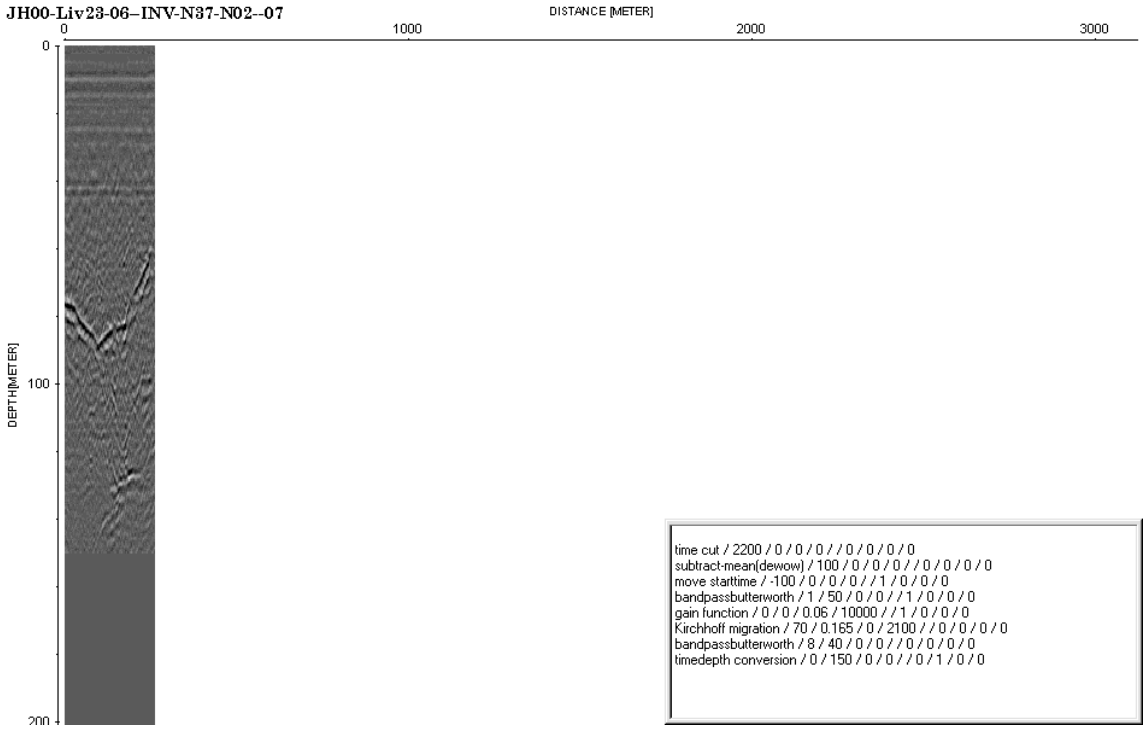

Figura B 43 Perfil N02–N37.

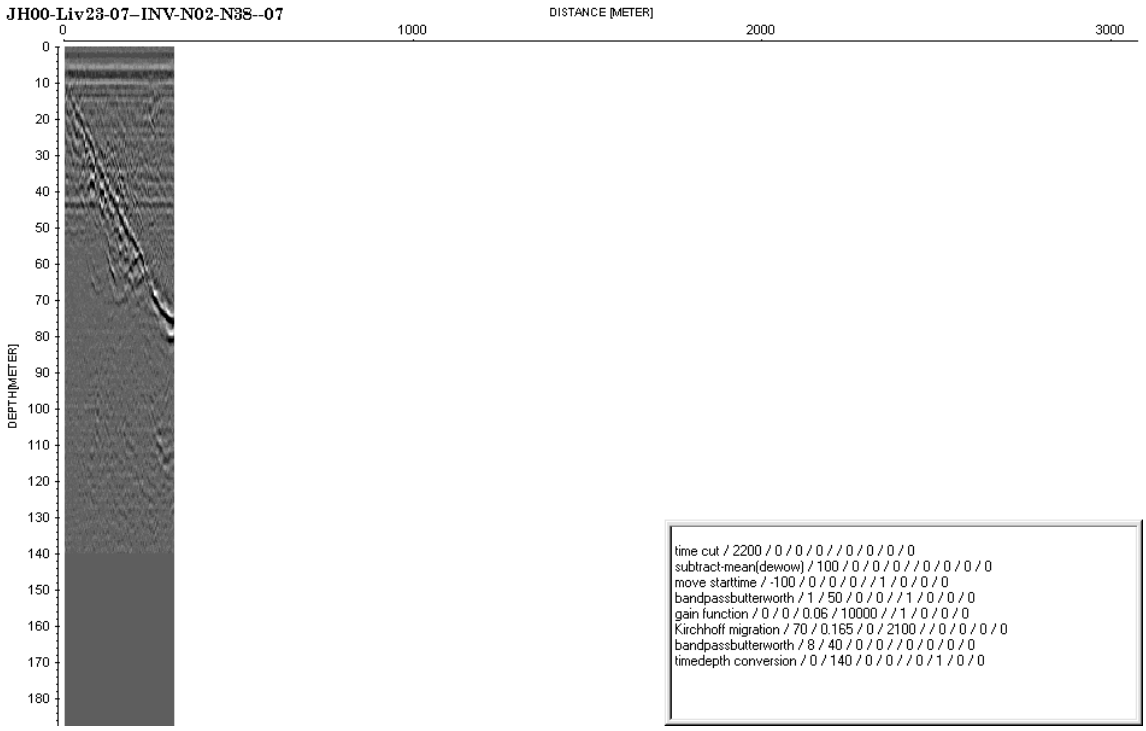

Figura B 44 Perfil N38–N02.

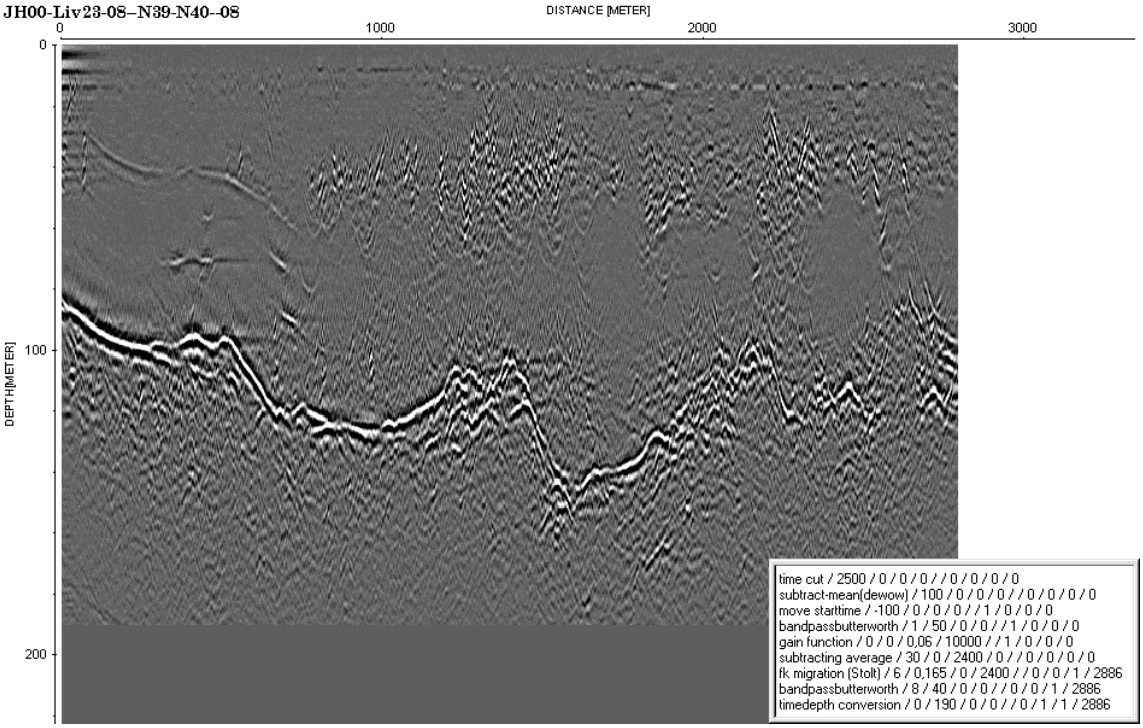

Figura B 45 Perfil N39–N40.

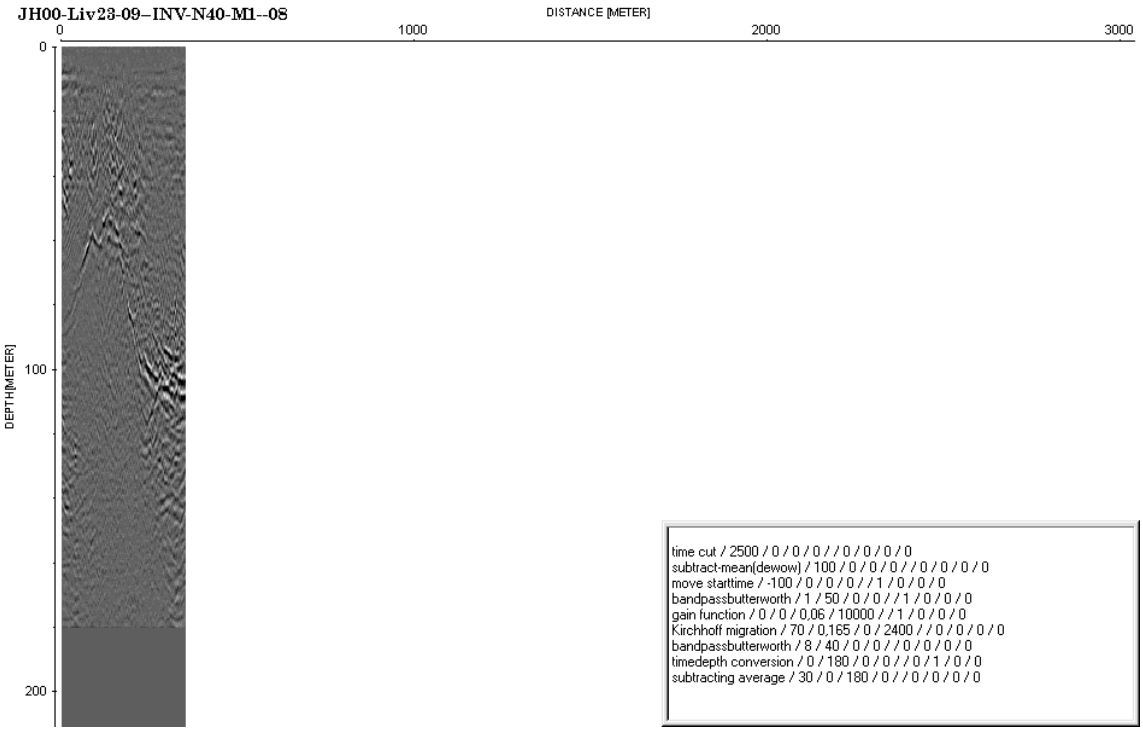

Figura B 46 Perfil M1–N40.

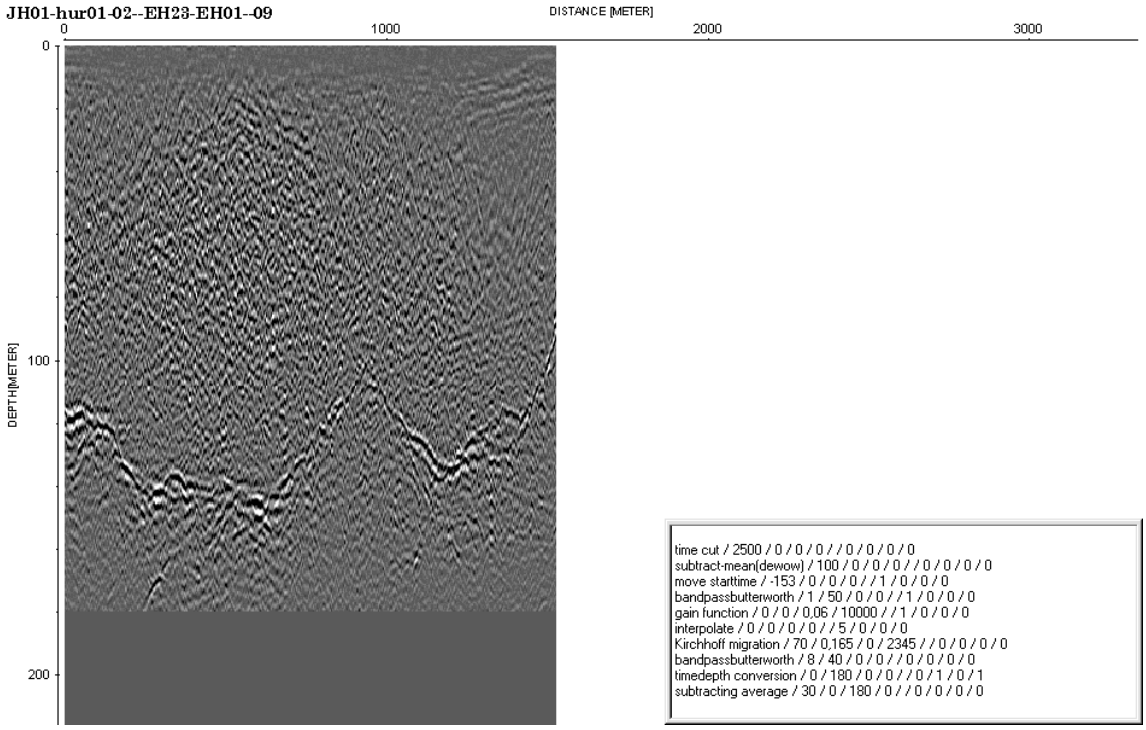

Figura B 47 Perfil EH23–EH01.

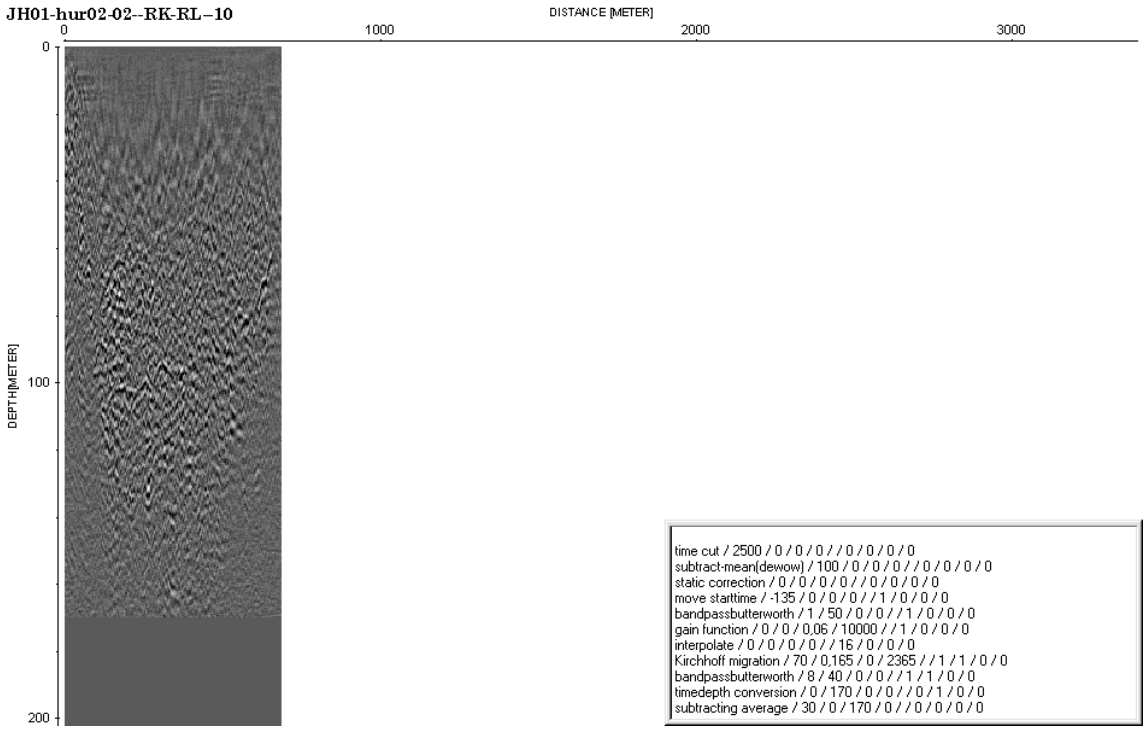

Figura B 48 Perfil RK–RL.

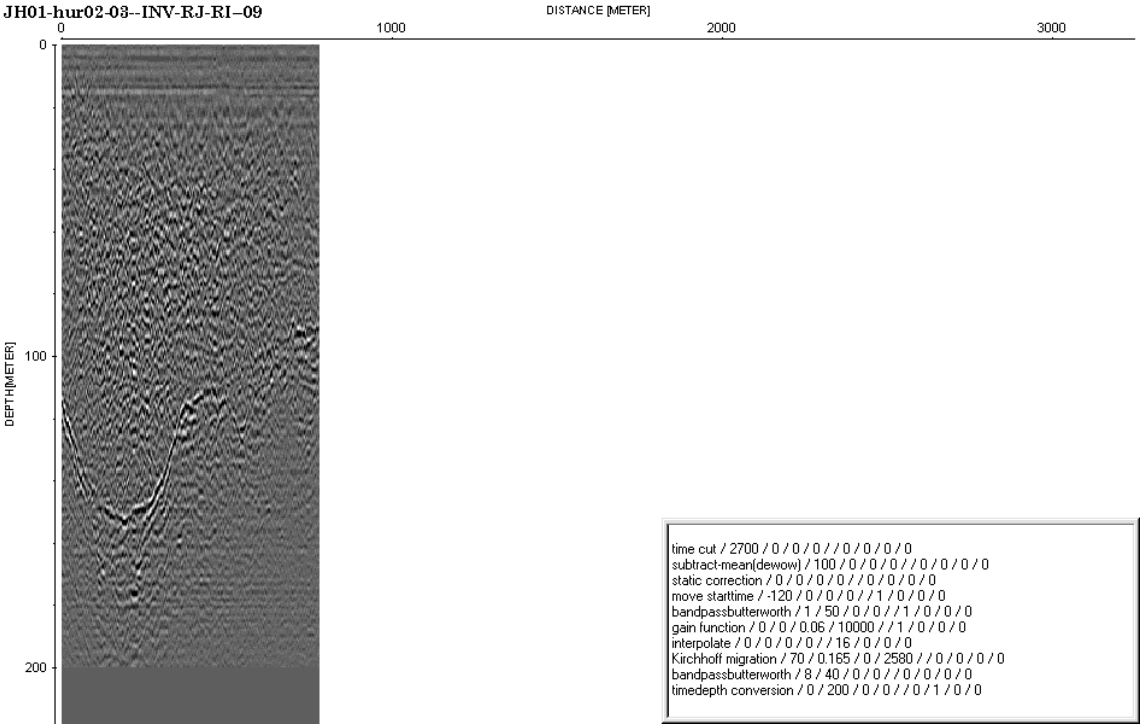

Figura B 49 Perfil RI–RJ.

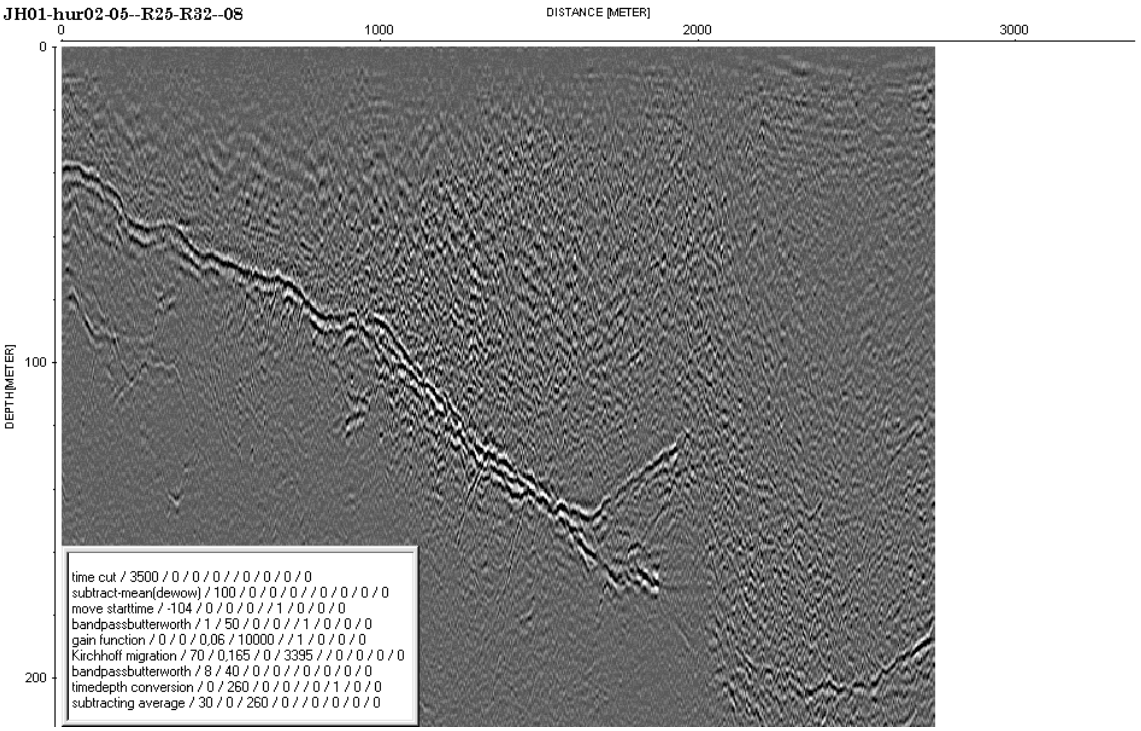

Figura B 50 Perfil R25–R32.

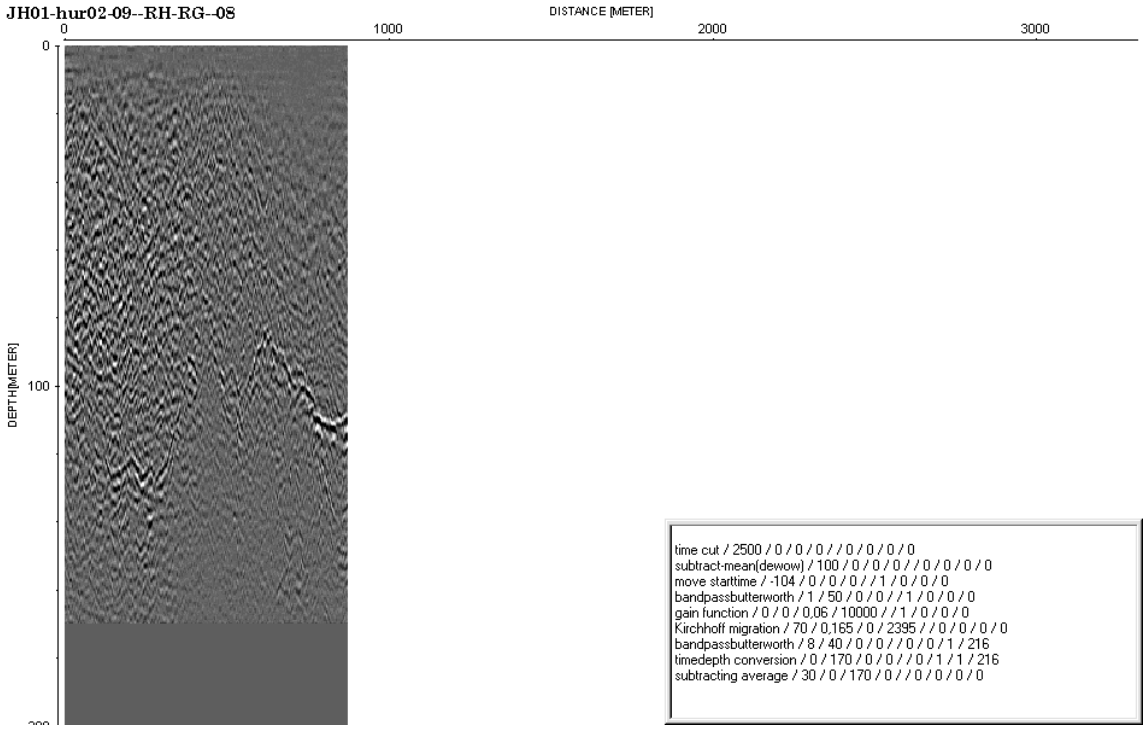

Figura B 51 Perfil RH–RG.

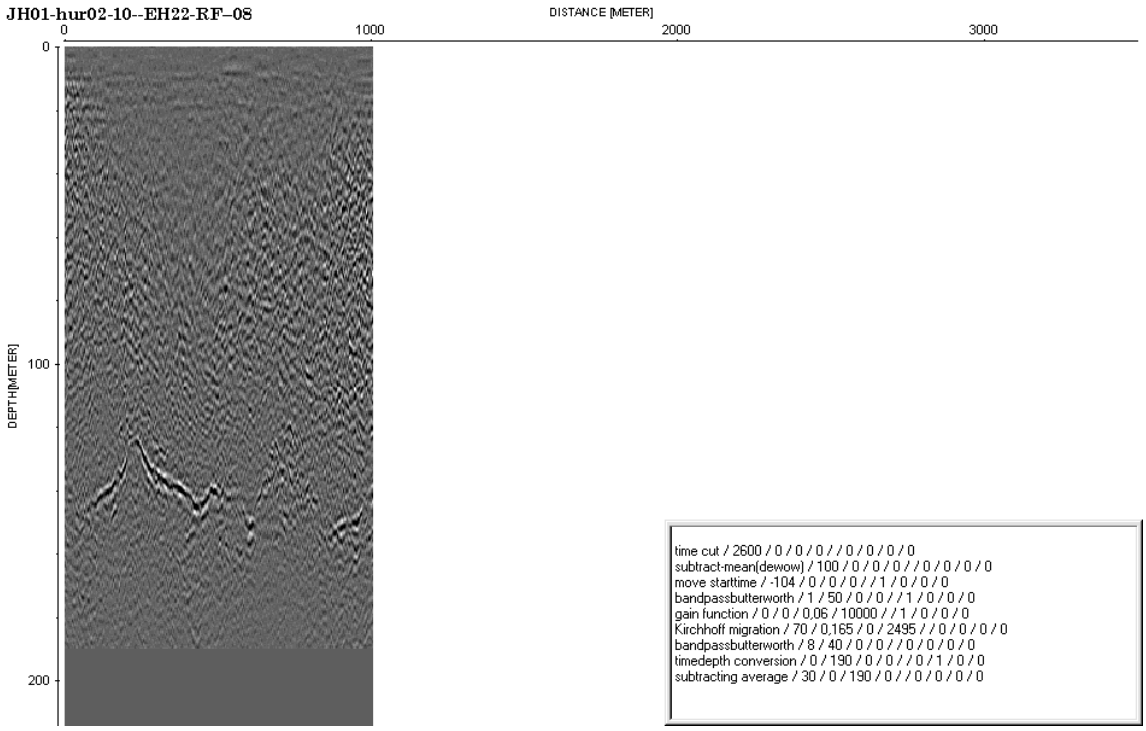

Figura B 52 Perfil EH22–RF.

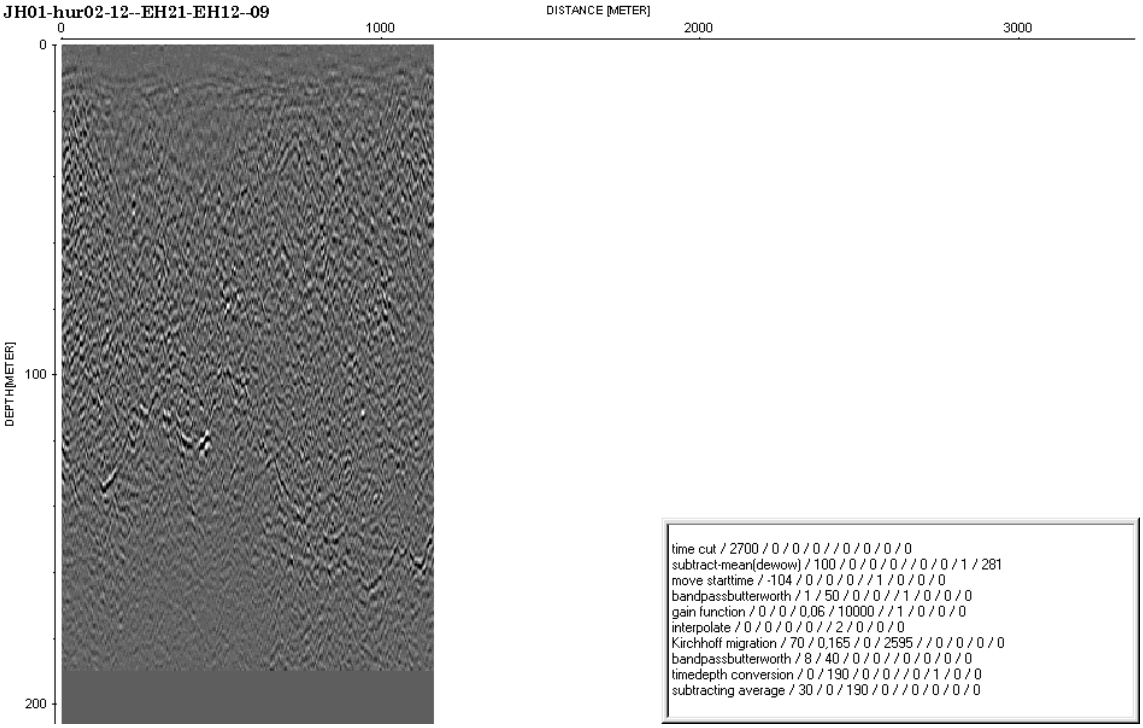

Figura B 53 Perfil EH21–EH12.

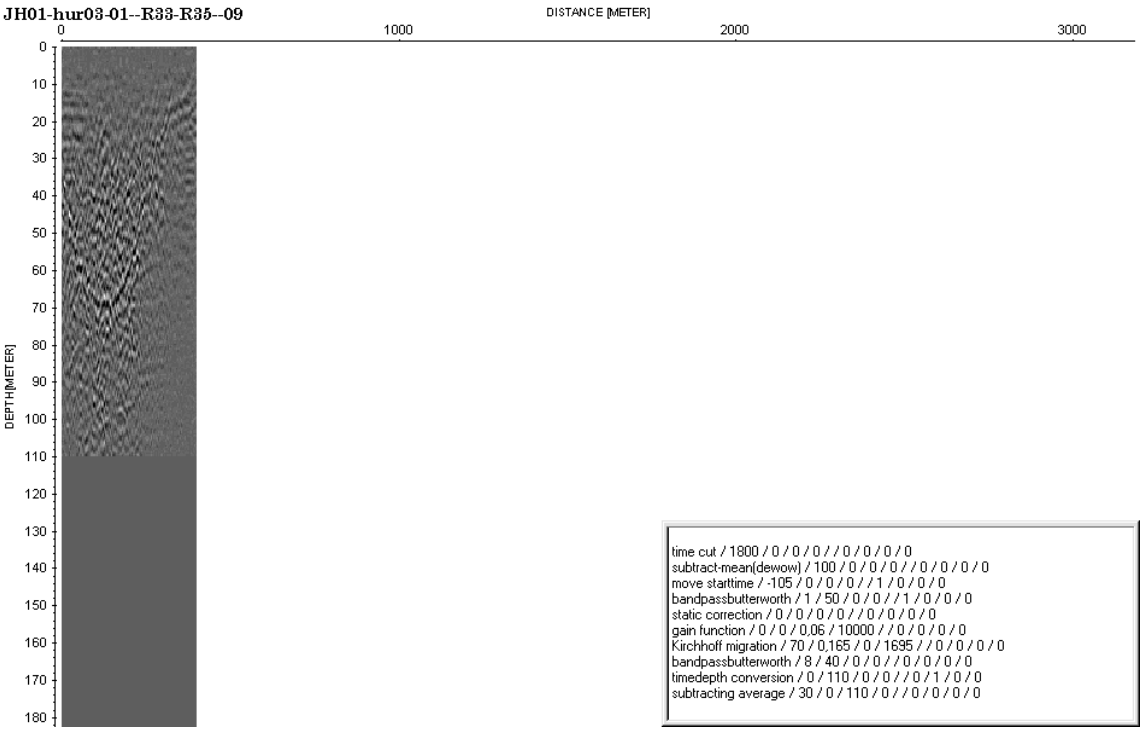

Figura B 54 Perfil R33–R35.

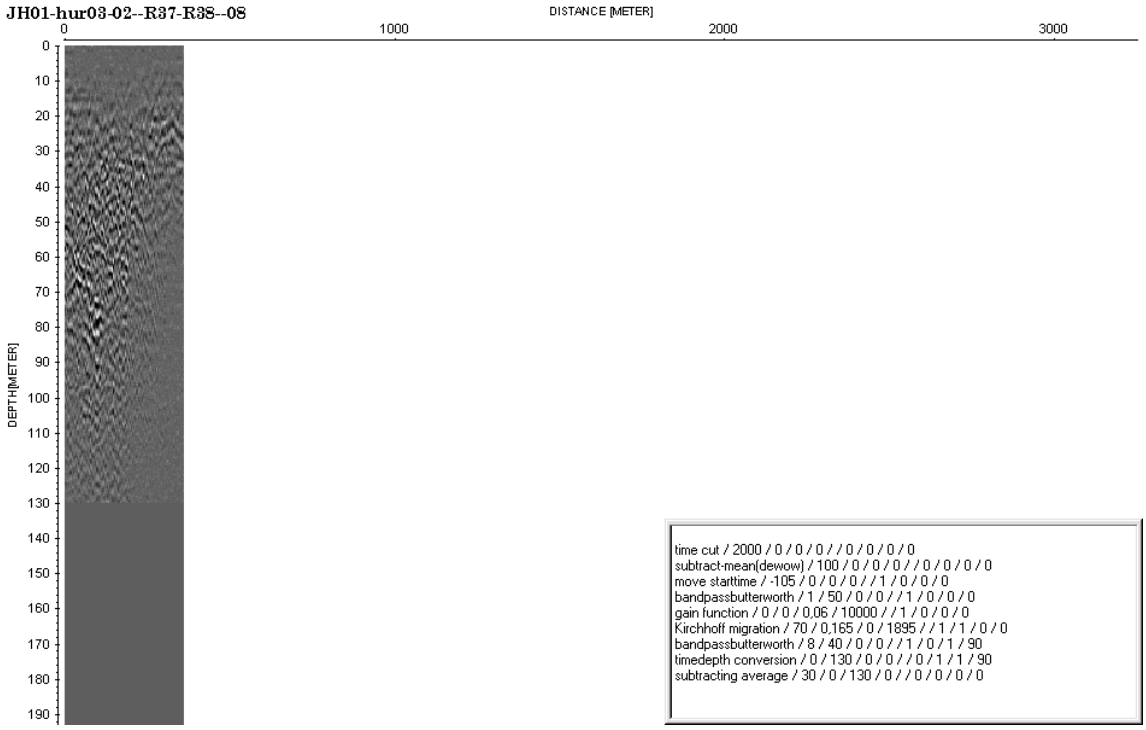

Figura B 55 Perfil R37–R38.

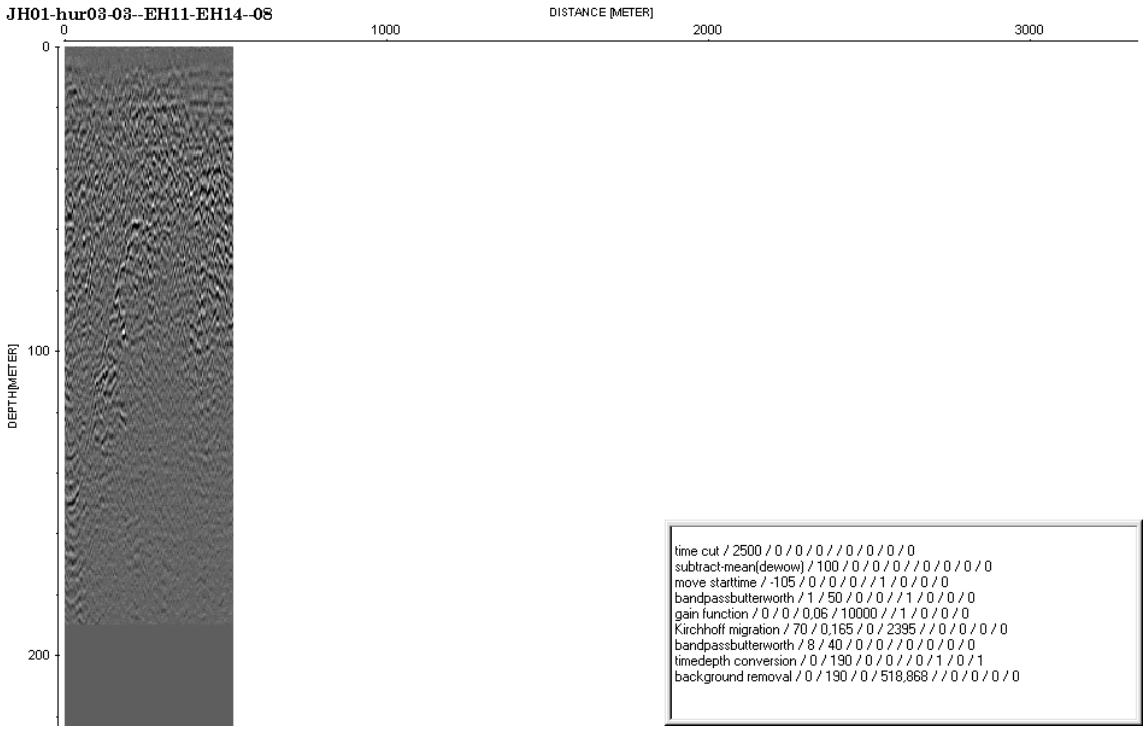

Figura B 56 Perfil EH11–EH14.

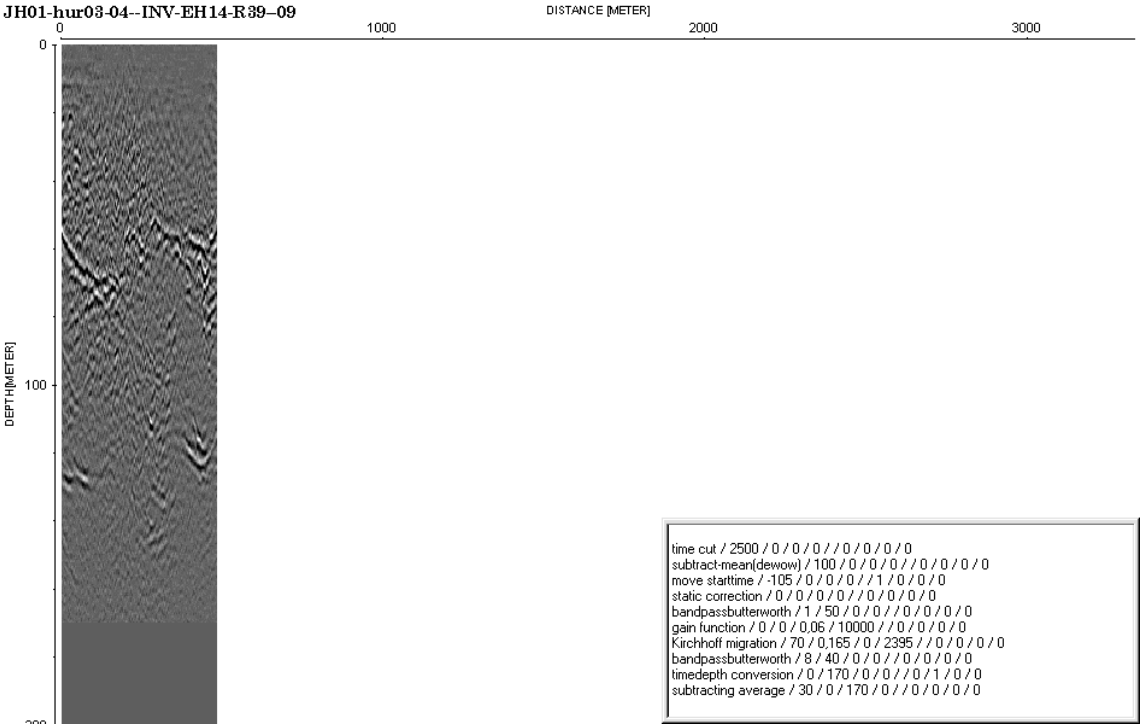

Figura B 57 Perfil R39–EH14.

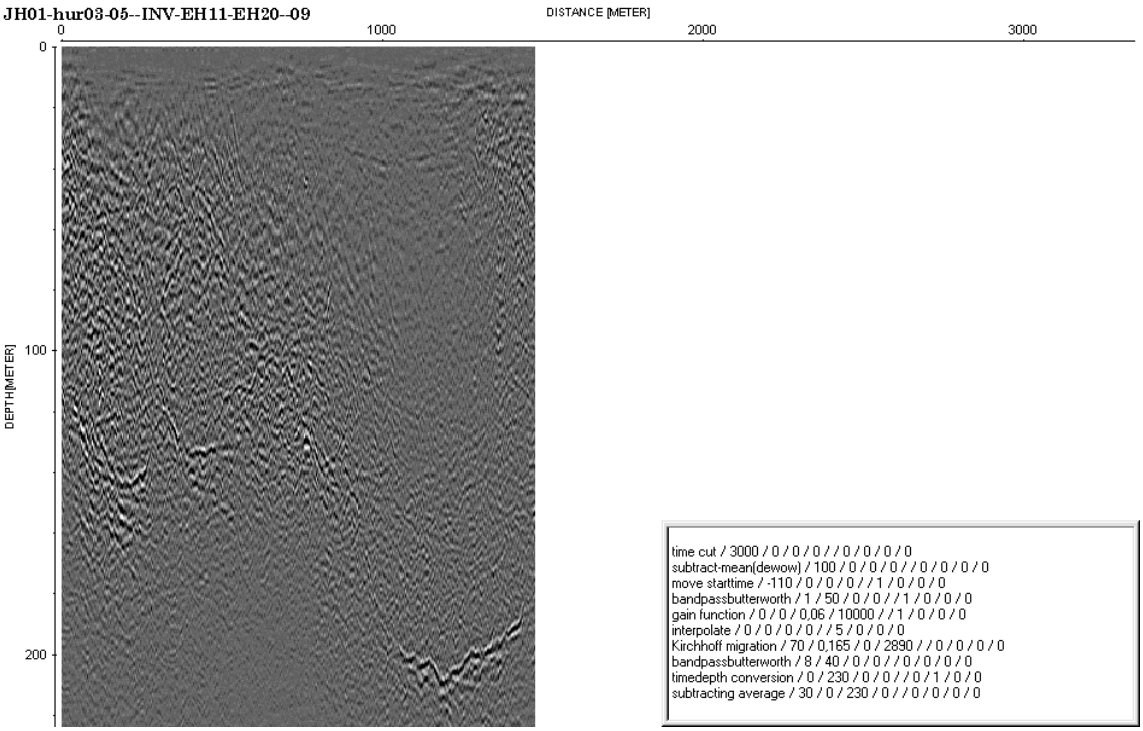

Figura B 58 Perfil EH20–EH11.

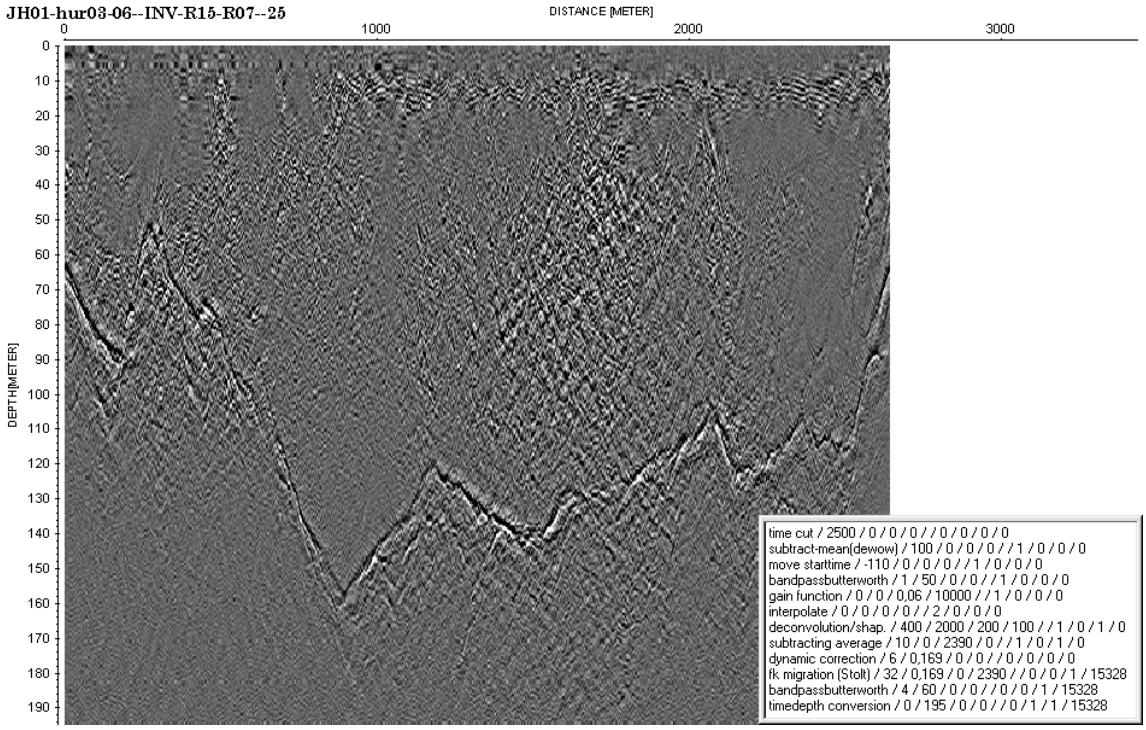

Figura B 59 Perfil R07–R15.

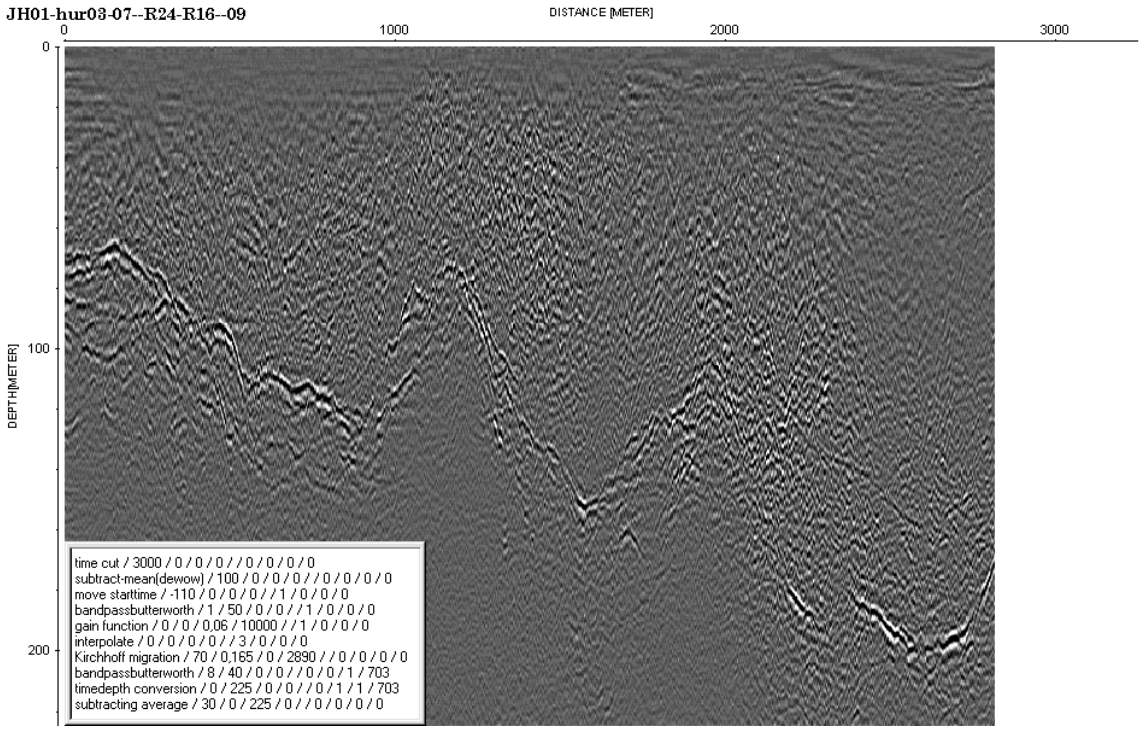

Figura B 60 Perfil R24–R16.

A modo de ejemplo, se incluye la imagen de los dos últimos perfiles con la corrección estática que introduce la topografía superficial del glaciar.

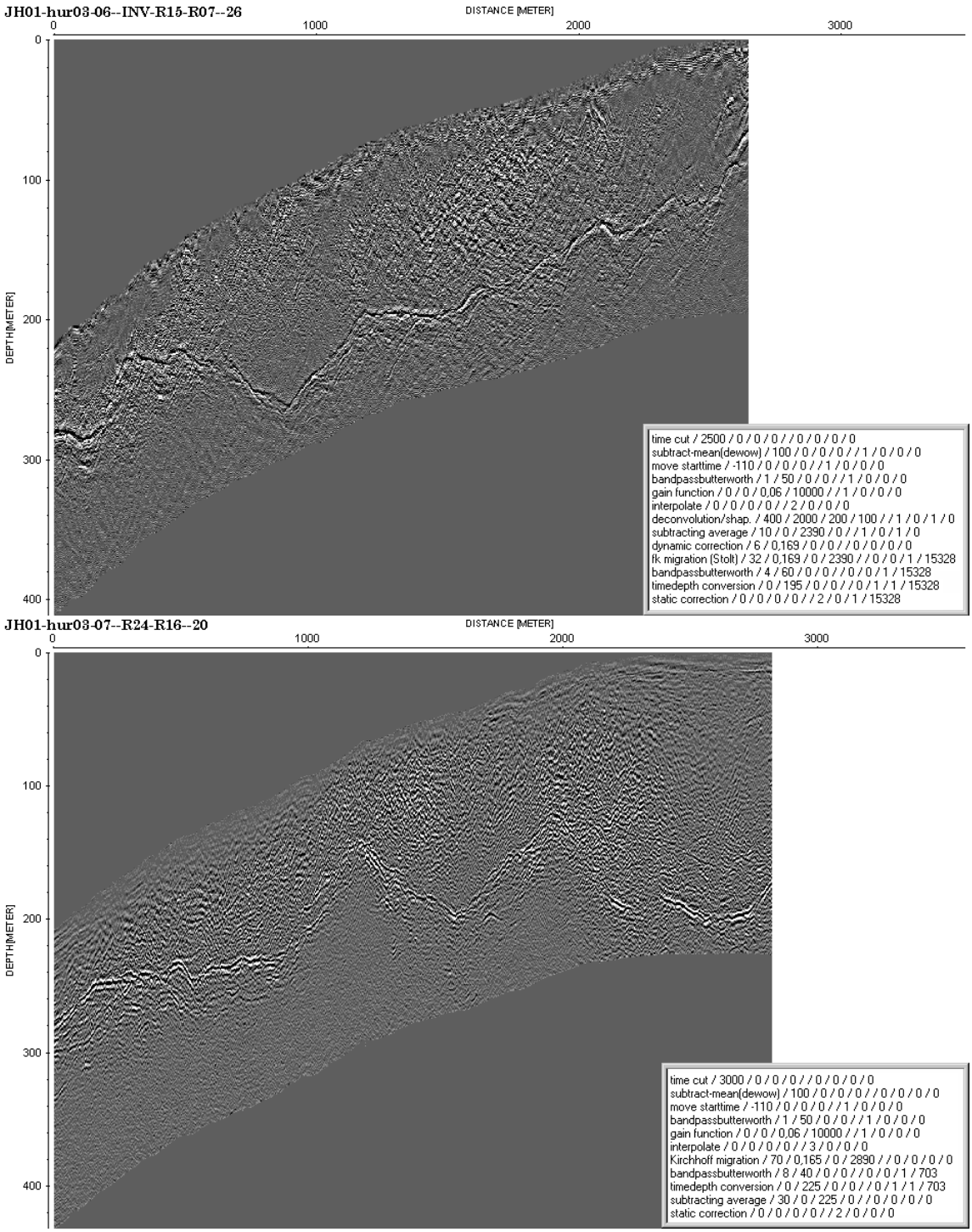

Figura B 61 Perfiles R07–R15 y R24-R16, con corrección topográfica.

Apéndice C

Conceptos básicos en mecánica de fluidos

En esta tesis se utilizan ciertas expresiones habituales en mecánica de fluidos que, por su importancia y su uso específico en dicho ámbito, se introducen en este apéndice para su consulta o recuerdo.

C.1 Derivada material (*material derivate*)

Supuesta una masa continua en movimiento, con densidad $\rho = \rho(\mathbf{r},t)$, velocidad $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$ y existiendo un campo escalar[92] diferenciable $A = A(\mathbf{r},t)$, la variación total que sufre el valor del campo a lo largo del tiempo, sobre una partícula puntual en movimiento, toma la siguiente expresión:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla A) \ , \tag{C.1}$$

y sus términos se denominan:

dA/dt se conoce como derivada material (también *substantive derivate*),

$\partial A/\partial t$ se conoce como derivada local (*local derivate*),

$\mathbf{u} \cdot \nabla A$ se conoce como término convectivo (*convective term*).

Recordando que se utilizan coordenadas Eulerianas, fijas en el espacio, para estudiar una partícula en movimiento, la ecuación (C.1) se interpreta como sigue:

- si se estudiara la variación que sufre el valor del campo A, sobre una partícula fija en el espacio, la tasa de cambio sería tan sólo $\partial A/\partial t$;
- pero realizando este cálculo sobre una partícula en movimiento, hay que sumar un término que establezca la variación del valor del campo A en la

[92] En este caso se trabaja con un campo escalar, pero la derivada material puede aplicarse también a un campo vectorial o tensorial asociados a la partícula, siempre que sean diferenciables.

partícula, por moverse con una velocidad $\mathbf{u}$. Esto se debe a que el campo varía espacialmente con un determinado gradiente ∇A y la velocidad que tiene la partícula provoca que ésta se traslade hacia otros valores de A, que pueden ser inferiores o superiores.

C.2 Teorema del transporte, de Reynolds

En la misma situación establecida para la derivada material, si en lugar de una masa aislada se estudia un conjunto de partículas de una masa continua, que ocupan un volumen $V_{(t)}$, variable y móvil a lo largo del tiempo, se obtiene la derivada respecto del tiempo del campo en el volumen integral:

$$\frac{d}{dt}\iiint_{V_{(t)}} A\, dV = \iiint_{V_{(t)}} \left[\frac{dA}{dt} + A\,(\nabla \cdot \mathbf{u})\right] dV \quad . \tag{C.2}$$

C.3 Ecuación de continuidad

El principio de conservación de masa, junto con su expresión como integral de la densidad en el volumen $V_{(t)}$,

$$\frac{dM}{dt} = 0 \ , \qquad M = \iiint_{V_{(t)}} \rho\, dV \ , \tag{C.3}$$

proporcionan la expresión

$$\frac{d}{dt}\iiint_{V_{(t)}} \rho\, dV = 0 \quad . \tag{C.4}$$

Aplicando sobre ella el teorema del transporte de Reynolds (C.2), se obtiene

$$\frac{d}{dt}\iiint_{V_{(t)}} \rho \, dV = \iiint_{V_{(t)}} \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{u}) \right) dV = 0 \ . \tag{C.5}$$

Dado que el integrando es continuo y el volumen es arbitrario, el integrando ha de ser nulo en todo punto. Así, a partir de (C.5) se obtiene la ecuación de continuidad

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0 \ . \tag{C.6}$$

Puede obtenerse otra expresión para la ecuación de continuidad, aplicando ahora la derivada material (C.1) sobre esta ecuación, obteniendo así

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \rho(\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0 \ , \tag{C.7}$$

a partir de la cual, con sólo recordar $\operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = \rho(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho$, puede expresarse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \ . \tag{C.8}$$

En cualquier caso, si el medio es incompresible, como ocurre con el hielo, la densidad es constante en el tiempo y en el espacio, por lo que la ecuación de continuidad queda reducida a

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \ . \tag{C.9}$$

C.4 Teorema de la divergencia, o de Gauss-Ostrogradski

Dado el campo vectorial $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$, definido sobre el volumen de masa, ya definido, $V_{(t)}$, encerrado por la superficie cerrada $S_{(t)}$, y definiendo **dS** normal y saliente de dicho volumen, se cumple:

$$\oiint_{S_{(t)}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dS} \quad = \quad \iiint_{V_{(t)}} \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV \ . \tag{C.10}$$

C.5 Advección

El segundo término obtenido en la derivada material (término convectivo), cambiado de signo, se denomina advección[93], y muestra la variación del campo debida al desplazamiento sobre un campo que varía a lo largo del espacio.

$$\text{Advección} \quad = \quad \mathbf{u} \cdot (-\nabla A) \quad = \quad -\mathbf{u} \cdot \nabla A \tag{C.11}$$

El gradiente tiene por dirección y sentido las del crecimiento máximo en el campo, por lo que el gradiente del campo, cambiado de signo ($-\nabla A$), se dirige hacia los valores inferiores del campo. Consecuentemente, la advección será positiva cuando la velocidad de la partícula ($\mathbf{u}$) se dirija hacia valores más pequeños del campo (ángulo agudo entre ambos vectores). La Figura C 1 muestra este efecto.

[93] La advección está incluida dentro de los mecanismos convectivos de transporte de calor.

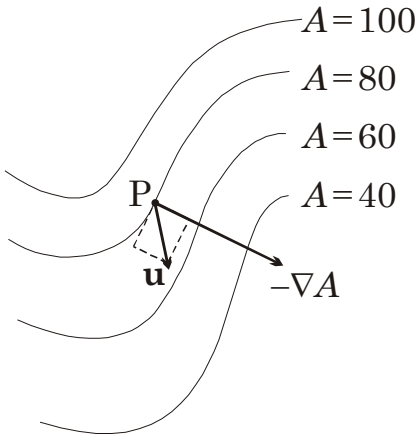

Figura C 1 Efecto de la velocidad de las partículas en el transporte de calor: advección.

Supuesto que A represente un campo escalar de temperaturas, la presencia de una velocidad de arrastre hacia temperaturas decrecientes, como muestra la Figura C 1, dará lugar a una advección positiva en el punto P, lo que indica un ascenso de la temperatura en dicho punto, ya que la velocidad arrastra el material hacia temperaturas inferiores, con la consiguiente llegada de temperaturas mayores a dicho punto fijo en el espacio.

Pero si en lugar de observar lo ocurrido en el punto P, estudiamos lo que ocurre con la propia partícula en movimiento, que instantáneamente se encuentra en P, podemos observar que ésta será arrastrada por la velocidad $\mathbf{u}$ hacia temperaturas inferiores. Así, una advección positiva supone un incremento local de temperatura, pero en la partícula en movimiento supone un decremento, una pérdida de su energía térmica interna.

Apéndice D

Complementos matemáticos

A continuación se recuerdan algunas fórmulas y operadores matemáticos de relevancia que son utilizados a lo largo de esta tesis.

D.1 Operadores

En esta tesis se utilizan de manera equivalente las notaciones de ciertos operadores matemáticos, que se expresan a continuación, acompañados por su definición.

Operador Nabla:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{\mathbf{k}} \ . \tag{D.1}$$

Así, de su aplicación sobre una función escalar A, o vectorial $\mathbf{F}$, se obtiene:

$$\mathrm{grad}(A) = \nabla A = \frac{\partial A}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial A}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial A}{\partial z}\hat{\mathbf{k}} \ , \tag{D.2}$$

$$\mathrm{div}(\mathbf{F}) = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \ , \tag{D.3}$$

$$\mathrm{rot}(\mathbf{F}) = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \ . \tag{D.4}$$

Operador Laplaciana:

$$\nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \ . \tag{D.5}$$

Análogamente, aplicado sobre una función escalar A, queda:

$$\nabla^2 A = \Delta A = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \ , \tag{D.6}$$

D.2 Norma L^∞

La norma utilizada para la velocidad en la solución numérica del submodelo térmico (§7.3.2) se define como

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\left\{M \geq 0 : \left|v(\mathbf{x})\right| \leq M \text{ casi en todo } \Omega\right\}, \tag{D.7}$$

donde "casi en todo Ω" significa "en todo Ω salvo, a lo sumo, en un subconjunto suyo de medida nula".

D.3 Fórmula de Green

La fórmula de Green (integración por partes) se utiliza sistemáticamente para obtener la formulación débil, previa a la aplicación del MEF.

Puede expresarse como

$$\int_\Omega g\,\nabla\cdot\mathbf{u}\,d\Omega = \int_\Gamma g\,\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{u}\,d\Gamma - \int_\Omega \mathbf{u}\cdot\nabla g\,d\Omega\ , \tag{D.8}$$

siendo $\hat{\mathbf{n}}$ el vector unitario normal a la frontera Γ del dominio Ω.

En particular,

$$\int_\Omega g\,\Delta f\,d\Omega = \int_\Omega g\,\nabla\cdot(\nabla f)\,d\Omega = \int_\Gamma g\,\hat{\mathbf{n}}\cdot\nabla f\,d\Omega - \int_\Omega \nabla f\cdot\nabla g\,d\Omega\ , \tag{D.9}$$

donde $\hat{\mathbf{n}}\cdot\nabla f = \partial f/\partial n$.