Dpto. Física de la Tierra, Astronomía y Astrofísica: Geofísica y Meteorología.
Facultad de Física. Universidad Complutense de Madrid.

Programa de doctorado Geofísica y Meteorología.

Primer modelo Arqueomagnético SCHA de Europa para los últimos 2000 años

Francisco Javier Pavón Carrasco

Directora: Mª Luisa Osete López.

Mayo 2006

TRABAJO DE INVESTIGACIÓN

Programa de Doctorado de Geofísica y Meteorología

Curso 2005 – 2006

Autor:

Fco. Javier Pavón Carrasco

Directora:

Mª Luisa Osete López

V.B.

Universidad Complutense de Madrid

Mayo 2006

Agradecimientos.

Me gustaría dar mis más sinceros agradecimientos a varias personas e instituciones por la ayuda y consejos prestados para la realización de este Trabajo de Investigación.

Gracias Marisa, por tu guía, enseñanza y consejos. Y por darme la oportunidad de estar trabajando durante estos dos años en lo que más me gusta, el Geomagnetismo.

A Miquel Torta, director del Observatorio del Ebro, por su indispensable ayuda, sus acertados consejos y por su contagioso entusiasmo en la investigación geomagnética. Sin olvidar esos buenos días de estancia en el Observatorio.

A Lluís Gaya, por estar siempre ahí cuando he necesitado su ayuda, a pesar de la larga distancia que nos separa.

A Carlos, Gianluca, Victor, Gregg y Ali, y demás paleomagnetas y arqueomagnetas que he conocido durante estos dos últimos años. Sin ellos, mi entrada en el Arqueomagnetismo no hubiera sido tan fácil.

Al Departamento de Geofísica y Meteorología de la Universidad Complutense de Madrid y su directora, Elvira, por poner a mi disposición todo cuanto he necesitado para la realización de este trabajo.

Al Instituto Geográfico Nacional, donde sigo desarrollando mi labor investigadora y permite que siga viviendo en Madrid.

Agradecer a mis compañeros de piso, los ánimos dados cuando más lo necesitaba y hacerme sentir como en casa, estando a cientos de kilómetros de ella.

A mi familia, por apoyarme en todo.

Primer modelo arqueomagnético SCHA de Europa para los últimos dos mil años

Preámbulo

La **Física**, a lo largo de la Historia, siempre ha buscado el "por qué" de los fenómenos naturales y astronómicos que tienen lugar en nuestro entorno. Para estudiar este comportamiento natural, no basta sólo con la mera observación, sino que va más allá y ha quedado plasmada en teorías, leyes e hipótesis que permiten una mejor comprensión del mundo en el que vivimos. Fue en el siglo XVII cuando dieron a luz las primeras teorías del comportamiento de la naturaleza, como es el caso de la primera obra científica de la Historia Occidental, en el año 1600, "De Magnete" de William Gilbert, dando lugar al primer estudio sistemático del magnetismo y de la electricidad (Figura 1). Todas estas teorías y leyes basadas en las matemáticas, han dado lugar a **modelos físico-matemáticos** cuyo objetivo final es la mejor comprensión de la realidad.

La solidez de la Física ha quedado reflejada en los numerosos cambios y reformas que ha sufrido a lo largo del tiempo ante los continuos avances científicos. Pero su desarrollo va más allá de la expresión matemática de los fenómenos observables e intenta adelantarse a los propios fenómenos naturales, estableciendo modelos de predicción.

TRACTATVS
Sive
PHYSIOLOGIA NOVA
DE MAGNETE,
MAGNETICISQVE CORPO-
RIBVS ET MAGNO MAGNETE
tellure Sex libris comprehensis
a
Guilielmo Gilberto Colcestrensi,
Medico Londinensi.
In quibus ea, quæ ad hanc materiam spectant plurimis & argumentis ac experimentis exactissime ebsoluisimeq; tractantur & explicantur.
Omnia nunc diligenter recognita & emendatius quam antè in lucem edita, aucta & figuris illustrata operâ & studio
Wolfgangi Lochmans, I.U.D.
& Mathematis.
Ad calcem libri adjunctus est Index Capitum Rerum et Verborum locupletissimus
EXCVSVS SEDINI
Typis Gotzianis Sumptibus
Authoris
Anno M.DC.XXVIII.

En el caso que nos atañe, nuestro interés se centra en el estudio y análisis de la evolución del campo magnético de la Tierra: el **Geomagnetismo**.

Figura 1. Portada de una versión de "De Magnete", W. Gilbert, 1600.

Índice

página

1. Introducción y objetivos 1

2. Campo Geomagnético: aspectos fundamentales y descripción analítica 3

2_A El Geomagnetismo en la Historia 3

2_B Fundamentos físicos del Geomagnetismo 7

2_C Componentes del campo geomagnético 8

3. Análisis armónico del potencial geomagnético en un casquete esférico: SCHA 11

3_A Gauss: expresión armónica del campo geomagnético 11

3_B Coeficientes de Gauss: coeficientes del modelo geomagnético 14

3_C Haines: desarrollo armónico del campo geomagnético en un casquete esférico 16

3_D Haines versus Gauss: SCHA vs SHA 19

4. Modelización del Campo Geomagnético: Inicios y estado actual del tema 22

4_A Recorrido por los diferentes modelos globales de campo geomagnético 22

4_B Análisis de la variación secular. Modelos globales 23

4_C Modelos regionales del campo geomagnético 26

4_{C1} Desarrollo de la técnica SCHA 30

1. Cálculo de las funciones asociadas de Legendre 30
2. Conversión de coordenadas 33
3. Ajuste de los datos a un modelo SCHA 34
4. SCHA espacio – temporal 35

5. Evolución temporal del Campo Geomagnético: Paleomagnetismo y Arqueomagnetismo. Curvas de Variación Paleosecular (CVPS) 36

5_A Breve introducción al Paleomagnetismo y Arqueomagnetismo 36

5_B Criterios arqueomagnéticos, conversión vía polo y construcción de la CVPS 38

5_C Base de datos arqueomagnética actual de Europa y CVPS 42

5_{C1} CVPS de Iberia 43

5_{C2} CVPS de Francia 46

5_{C3} CVPS de Alemania 48

5_{C4} CVPS de Hungría 49

5_{C5} CVPS de Bulgaria 51

6. Modelización de componentes geomagnéticas en la Península Ibérica.....53

6_A Modelización de componentes magnéticas y su variación secular en Iberia mediante SCHA. Comparación de modelos regionales.....53

7. Modelización de las CVPS para Europa en los últimos dos mil años.....60

7_A Tratamiento previo al modelado. El modelo CALS3K.2.....60

7_B Modificación de la técnica SCHA a SCHA – DI.....64

7_{B1} Aplicación de la técnica SCHA – DI al modelo CALS3K.2.....66

7_C Modelización de las curvas de variación paleosecular de Europa.....68

7_{C1} Curvas de variación paleosecular. Períodos característicos. Datos de entrada.....68

1. Análisis de los períodos característicos de la declinación.....69
2. Análisis de los períodos característicos de la inclinación 69
3. Datos de entrada al modelo SCHA – DI 70

7_{C2} Aplicación de la técnica SCHA – DI para la modelización de las CVPS 72

1. Modelo previo SCHA de los datos.....74
2. Modelo SCHA de las curvas de variación paleosecular.....76
3. Primer modelo arqueomagnético SCHA en Europa para los últimos dos mil años 79
4. Cálculo de errores y error rms.....80

7_D Comparación con modelos globales de campo geomagnético 84

7_E CVPSs y mapas de declinación e inclinación del modelo SCHA.....86

8. Conclusiones y futuros trabajos.....88

i. Anexos.....90

Anexo 1.....90

Anexo 2 93

Anexo 3 94

Anexo 4 98

Anexo 5 102

Anexo 6 104

Anexo 7 114

ii. Referencias 116

1. Introducción y objetivos.

El presente trabajo de investigación se enmarca en la disciplina del Geomagnetismo, ya que su objetivo consiste en determinar un modelo físico matemático que describa la evolución temporal del campo geomagnético de origen interno en Europa durante los últimos dos mil años.

El campo magnético terrestre (c.m.t.) sufre variaciones temporales de diversos periodos y amplitudes, siendo el origen de estas variaciones tanto externo (actividad solar) como interno (núcleo externo terrestre). Si consideramos sólo las variaciones de largo periodo, éstas están relacionadas con el campo de origen interno y reciben el nombre de Variación Secular. Debido a que el campo geomagnético tiene componentes no dipolares, la variación secular tiene también una dependencia espacial. Por lo que, si se pretende estudiar esta variación de largo periodo, es necesario determinar sus características en cada zona, obteniéndose así para cada región de estudio, la Curva de Variación Secular correspondiente.

A partir de la época instrumental, se sabe que debido a la Variación Secular el campo geomagnético está disminuyendo progresivamente de intensidad, y desplazándose hacia el Oeste. Pero este registro sólo abarca de manera continua los últimos siglos. Sin embargo, a diferencia de otros campos terrestres, es posible conocer el pasado del c.m.t. debido a que ciertos minerales presentan la propiedad de registrar el campo que actuó en el pasado: a esta propiedad se le conoce como magnetización remanente y sólo la presentan los materiales denominados ferromagnéticos (*sensu lato*). Es decir, el c.m.t. deja "su huella" en las rocas y en los materiales arqueológicos debido a que estos materiales contienen sustancias ferromagnéticas que pueden poseer un magnetismo remanente estable adquirido en presencia del c.m.t. que actuó durante la formación del material o durante una serie de procesos fisicoquímicos a los que fue sometido el material posteriormente (calentamiento, procesos químicos, etc).

Al estudio del magnetismo remanente grabado en las rocas y materiales arqueológicos se le denomina Paleomagnetismo. Cuando los materiales investigados son arqueológicos, la técnica se conoce por el nombre de Arqueomagnetismo. Conocida la edad de los restos arqueológicos es, por tanto, posible determinar el comportamiento del c.m.t. en el pasado histórico.

Debido a las características del c.m.t., tradicionalmente se ha venido determinando su evolución para cada región, obteniendo así las denominadas Curvas de Variación Paleosecular de cada región. Para construir estas curvas, los datos obtenidos en un yacimiento deben ser corregidos para extrapolar sus valores desde el yacimiento al lugar de referencia donde se pretende elaborar la Curva de Variación Secular. Para ello se determina el Polo paleomagnético a partir de los datos del yacimiento (declinación e inclinación). Posteriormente se calcula a partir del Polo paleomagnético la declinación e inclinación del lugar de referencia. Esto es lo que se conoce como corrección Vía Polo (Noel y Batt, 1990).

Otra forma de abordar el problema es representar analíticamente el comportamiento espacial y temporal del campo geomagnético a partir de datos arqueomagnéticos mediante el análisis armónico. A escala global esta representación ha sido ensayada durante la última década (Ohno y Hamano, 1993; Hongree et al., 1998) y últimamente merecen destacarse los estudios realizados por Korte et al. (2003 y 2005_2). Pero la resolución de los modelos y el grado de los coeficientes esféricos dependen de la cantidad y calidad de los datos y de su distribución global.

El número de estudios arqueomagnéticos realizados es aún escaso para poder determinar un modelo global de gran precisión. Sin embargo, en Europa, donde la densidad de puntos es mayor que en cualquier otra parte del globo, y, donde además, ha aumentado considerablemente durante los últimos años, por la existencia del proyecto AARCH (Archaeomagnetic Applications for Rescue of Cultural Heritage), es posible la representación de las características del campo de menor escala mediante la modelización regional, como es la técnica del Análisis Armónico sobre un Casquete Esférico o SCHA (Spherical Cap Harmonic Analysis, Haines, 1985a). El método SCHA está basado en el conocido análisis armónico esférico que ya fue postulado por Gauss, pero en este caso, se pretende determinar el campo en detalle en un casquete esférico. Para ello, las nuevas condiciones de contorno sobre la frontera del casquete involucran el uso de funciones asociadas de Legendre con grado no entero. La solución general, que satisface las condiciones impuestas por la ecuación de Laplace, se expresa como una expansión en términos de armónicos esféricos acompañados de la correspondiente contribución radial, cuyos parámetros a determinar son los coeficientes armónicos esféricos o coeficientes de Gauss.

Este método ha sido utilizado para obtener varios modelos del Campo Magnético de la Tierra y, entre ellos, modelos de variación secular con datos de observatorios y de estaciones seculares sobre Canadá (Haines, 1985b), España (García et al., 1990, 1991; Torta et al. 1992) y recientemente en la Antártida (Gaya-Piqué, 2004).

A principios del siglo XXI, Torta et al. (2000), emplearon la técnica del SCHA a la modelización regional del campo en Europa para el intervalo temporal 0-500 años d.C. El modelo SCHA obtenido mejora el modelo global de Hongre et al (1998), pero aún dista de dar una precisa representación del campo. Para lograr un mejor ajuste es preciso, por una parte, efectuar una revisión crítica de los datos arqueomagnéticos en Europa, y, por otra parte, introducir en el proceso de inversión la incertidumbre de los datos arqueomagnéticos.

El objetivo principal de este trabajo consiste en obtener, a partir de las curvas de variación Paleosecular existentes en Europa, una representación detallada de la variación de largo período (variación Paleosecular) que experimentó el campo magnético terrestre en Europa durante los últimos dos mil años, mejorando los modelos globales existentes hasta la actualidad. Para ello se recurrirá a la modelización del campo geomagnético por la técnica SCHA.

En la memoria se describen, en primer lugar, las características del campo geomagnético, a continuación se presentan los fundamentos del análisis armónico del potencial geomagnético en un casquete esférico (SCHA), que será la herramienta empleada en este trabajo para la obtención del modelo regional de campo geomagnético. Tras un análisis de los datos de entrada del modelo y tras aplicar la técnica SCHA discutiremos los resultados obtenidos.

2. Campo Geomagnético: aspectos fundamentales y descripción analítica.

2_A El Geomagnetismo en la Historia.

Campos magnéticos de origen interno y externo son los causantes del campo geomagnético en nuestro planeta. Debido al gran interés que a lo largo de la Historia ha despertado el conocimiento del c.m.t., dentro de la Geofísica existe una disciplina específica cuyo objetivo es el estudio de este campo: el Geomagnetismo.

El campo magnético terrestre fue descubierto por el hombre en la antigüedad, y una de sus propiedades ha sido usada por él a lo largo del tiempo: su carácter orientador. Ya aparecen referencias al geomagnetismo en el siglo I a.C. donde se comentaba en los tratados de Filosofía la existencia de cadenas metálicas que se mantenían fijas sin conexiones entre ellas. Pero en edades más remotas, en Oriente, existían leyendas en las que un emperador Chino durante una batalla allá por el año 2634 a.C. poseía un carro de guerra en el que había una figura cuyo brazo siempre apuntaba hacia el sur. Aunque no es seguro que su funcionamiento esté relacionado con el magnetismo terrestre, podría constituir la primera referencia a la observación y determinación de las líneas de campo geomagnético.

Posteriormente, en el año 83 a.C., sí que se constata la existencia en China de una brújula elemental formada por una cuchara de piedra imán apoyada sobre una superficie pulida en la que se podía mover con libertad. La cuchara se orientaba señalando la dirección norte-sur.

Aunque su uso fuese aplicado en la orientación marítima, no es hasta el año 1088 de nuestra Era, cuando se tiene la primera referencia de la existencia de unos artefactos en los que unas agujas suspendidas se orientan en dirección N-S. El chino Shen Kue (1030 – 1094) lo describe en uno de sus escritos, donde, además, hace notar que dichas agujas magnéticas no apuntan exactamente hacia el Norte (o el Sur) geográfico. Pero este fenómeno ya fue descrito unos cientos de años antes por el astrónomo Yi Xing entorno al 720 d.C. Las medidas de declinación magnética más antiguas se describen en la figura 2.1.

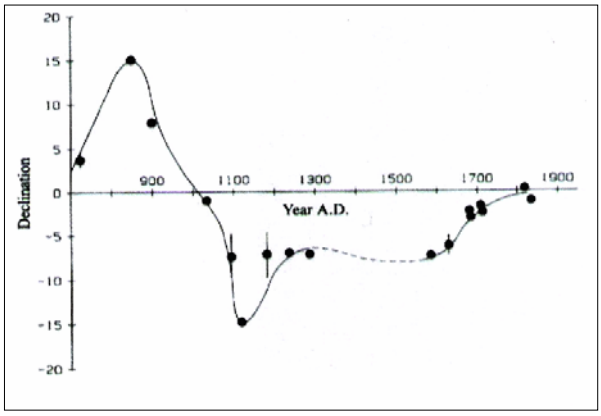


Figura 2.1. Curva de variación secular descrita por valores de declinación en China desde el año 720 hasta el 1820 d.C. (Jacobs et al., 1987).

Parece ser que los árabes fueron los encargados de trasladar la brújula de Oriente a Occidente. En el continente europeo los primeros tratados hablan de dicho aparato como brújula y fue en 1187 cuando el monje inglés Alexander Neckham (1157-1217) da referencias en sus publicaciones de cómo montar una brújula (en latín caja) en un soporte: "De

utensilibus" y "De rerum natura". Además también describe el fenómeno de la declinación magnética.

El origen de esta propiedad orientadora se le asoció por aquel entonces a la estrella Polar que se suponía fija. De acuerdo con un enfoque filosófico–aristotélico del tema, se consideró que la piedra imanada recibía su "virtud" de esa estrella, y ésta podía ser transmitida a la aguja de la brújula al frotarse ésta contra aquellas para imantarla. Un poco más tarde se afirmó que la virtud no emanaba de la estrella sino de grandes depósitos de magnetita situados en las cercanías del Polo Norte. Ésta última teoría fue desbancada por Pierre de Maricourt, llamado también Petrus Peregrinus, donde a través de su obra "Epistola ad Sigerum de Foucaucourt militem de magnete" también conocida como "Epístola de Mangete", en 1269, indica que no sólo existen depósitos de material magnético en el polo norte, sino que hay más repartidos por toda la Tierra. Esta obra incluye la definición del concepto de polaridad por primera vez en Europa; la comprobación de la interacción entre polos diferentes y la afirmación de que la fuerza entre ellos es máxima cuando son de distinta polaridad y se repelen cuando tienen la misma. En la segunda parte de su Epístola, hace descripción de algunos tipos de brújulas, donde a partir de resultados experimentales, aporta importantes descripciones de los fenómenos magnéticos.

El descubrimiento de la variación espacial de la declinación puede ser atribuida al Cristóbal Colón, ya que en el diario de su primer viaje hacia las Indias hace constar la aparición de unas anomalías en la observación del compás; lo cual atemorizó a la tripulación.

La inclinación, o ángulo de desviación de la aguja magnética respecto de la horizontal fue descubierta por George Hartman en 1544, pero al no publicar su hallazgo, tuvieron que pasar varias decenas de años, para que en 1581 Robert Norman la redescubriera y la publicó en un folleto "The new attractive". El valor que proporcionó Norman para Londres fue de 71º 50'.

La revolución del estudio del c.m.t. llega en 1600 con la publicación por parte de W. Gilbert (1544 – 1603) de su obra "De Magnete". Gilbert, presidente del Colegio de Médicos de Inglaterra y médico de la Reina Isabel, observó que cuando una aguja pequeña "versorium" se mueve sobre la superficie de un imán esférico, reproduce fielmente el proceso de la aguja de la brújula. No solo apunta la aguja hacia el polo cuando se posiciona en un plano tangencial a la esfera, sino que también se inclina hacia abajo en un ángulo cuando pivota sobre un eje horizontal, reproduciendo la inclinación magnética. Los experimentos de Gilbert con la esférica "terrella" (ver figura 2.2) corroboran sus observaciones. Propone que la misteriosa direccionalidad de la aguja tiene lugar por que la propia Tierra era un imán gigantesco: "Magnus magnes ipsa est globos terrestres". Hace constar también el efecto negativo de la temperatura sobre los imanes, pero atribuyó a la atracción magnética el mantenimiento de los planetas en su órbita. Esta obra, "De Magnete", dividida en seis libros y escrita en latín, fue el mayor logro de Gilbert y constituye la primera obra redactada en Occidente en la que la Tierra es vista con una unidad ya que los "Principia" de Newton no aparecen hasta 1687.

La variación en el tiempo de la declinación es intuida por Gellibrand cuando observa que el valor que mide en la declinación en Londres para 1634 discrepaba con los resultados obtenidos en 1580 por Borough y en 1622 por Gunter. Ello hizo pensar que además de variar en el espacio también variaba en el tiempo. Esta variación no se producía de forma continua ya que en ocasiones se producía rápidamente. Por ejemplo, la línea ágona (declinación nula) pasó por Londres en 1660 y ya en 1820 la declinación en el lugar era de 24º Oeste.

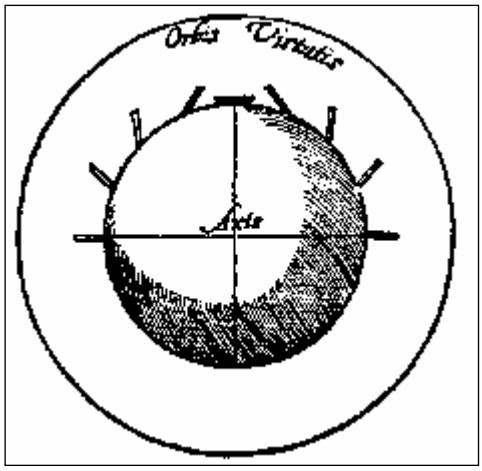


Figura 2.2. Imagen de la Terrella de Gilbert, un modelo de la Tierra magnética. (Merrill et al., The magnetic field of the Earth, 1996)

Su deriva de carácter global hacia el Oeste fue analizada por Halley en 1683, dando los primeros indicios del origen del c.m.t., asociándolo al núcleo interno de la Tierra, de naturaleza fluída y con velocidad de rotación menor que la de la superficie, adelantándose a la teoría de Rotación Diferencial propuesta por Bullard en 1949. Otras de las aportaciones de Halley fue la primera carta de declinación magnética en el Atlántico Norte, siendo, además, pionero en la representación global de un parámetro geofísico.

La primera carta de isoclinas (líneas de igual inclinación magnética) fue publicada en 1721 por W. Whiston para la región inglesa. Su propósito, que terminó en fracaso, era deducir la longitud y latitud de un lugar a partir de los valores de declinación e inclinación.

Dentro de la variación temporal de la declinación cobra gran interés la variación diurna (variación del c.m.t. de origen externo –solar– que afecta a todas las componentes del campo). Ésta fue descubierta por G. Graham, tras realizar 1000 observaciones de declinación entre los años 1722 y 1723. Las mediciones mostraron que la declinación variaba repetidas veces en un mismo día alcanzando desviaciones de medio grado en unas pocas horas y que había días en los que los cambios se verificaban de manera regular mientras que en otros sucedían de forma irregular. De esta manera se introdujo los conceptos de días magnéticamente tranquilos y días perturbados.

Los primeros valores de campo total o de la componente F tardaron en producirse, debido a la mayor complejidad que requiere su determinación comparada con la medida de las componentes angulares, declinación e inclinación. Entre 1799 y 1804 Humboldt comprobó, mediante medidas realizadas en Perú que la intensidad crecía con la latitud.

A finales de 1831, llega a Gottingën (Alemania) Carl Friedrich Gauss, para ocupar la plaza de profesor de Física. En estrecha colaboración con Weber, Gauss desarrollará una intensa labor en el estudio del magnetismo terrestre. Acoge con entusiasmo la propuesta de Alexander von Humbodlt de crear una red de observatorios magnéticos que cubran toda la superficie terrestre. En la década de los 30 publica varias obras sobre el tema: "Intensitas vis magneticae terrestris ad mensuram absolutam revocata" (1832), que trata teorías actuales sobre magnetismo terrestre, anticipando las ideas de Poisson, la medida absoluta de la fuerza magnética, F, y una definición empírica del magnetismo terrestre, "Allgemeine Theorie Erdmagnetismus" (1839), en la que demuestra que solo puede haber dos polos y sienta las bases para determinar la intensidad de la componente horizontal de la fuerza magnética junto con el ángulo de inclinación. Se ayuda de la ecuación de Laplace y especifica la ubicación del polo sur magnético, desarrollando toda la teoría del desarrollo en armónicos esféricos del

potencial magnético y su relación con las componentes magnéticas. Junto a Weber, es autor del primer atlas geomagnético terrestre y de más de 40 obras sobre mediciones magnéticas de la Sociedad de Magnetismo, fundada por ellos, y de nuevas herramientas para medir el campo magnético.

En el siglo XIX, el estudio del c.m.t. empieza a extrapolarse a los fenómenos inosféricos. Kelvin afirmó que dicha capa atmosférica era conductora, y en 1878, Stewart asoció la variación diurna con corrientes eléctricas en la ionosfera. Dicho análisis fue analizado experimentalmente cuando en 1901 Marconi transmitió ondas electromagnéticas en la frecuencia de radio a través del Atlántico Norte utilizando las propiedades de las capas conductoras de la ionosfera. Estos fenómenos fueron también corroborados independientemente de los de Marconi por Heaviside y Kennely en 1902. El nombre "ionosfera" fue dado por Watson-Watt en 1926.

También en este siglo aparecen los primeros estudios de Paleomagnetismo, cuando Dellese (1849) y Melloni (1853) observaron la existencia de rocas con imanación paralela al c.m.t. actual. Pero el gran desarrollo lo sufrió en el siglo XX con la aparición de rocas imanadas en la dirección opuesta al campo actual, mostrando los primeros indicios de las inversiones del campo magnético. Ello ha permitido verificar la teoría de la deriva continental y su desarrollo en la tectónica de placas, proporcionando además la correlación de secciones geológicas a través de la escala de tiempo de inversiones de polaridad del c.m.t.

Es fundamental para el estudio del campo geomagnético la existencia de una red de observatorios magnéticos. Fue en el siglo XIX cuando se empezaron a construir dispersados por el planeta, hasta alcanzar la distribución actual de 99 observatorios (ver figura 2.3). Éstos, junto con los nuevos avances científicos del siglo pasado, como son la creación y puesta en órbita de satélites espaciales para la medida del c.m.t., han permitido mejorar nuestro conocimiento del comportamiento espacio–temporal del campo magnético en la Tierra.

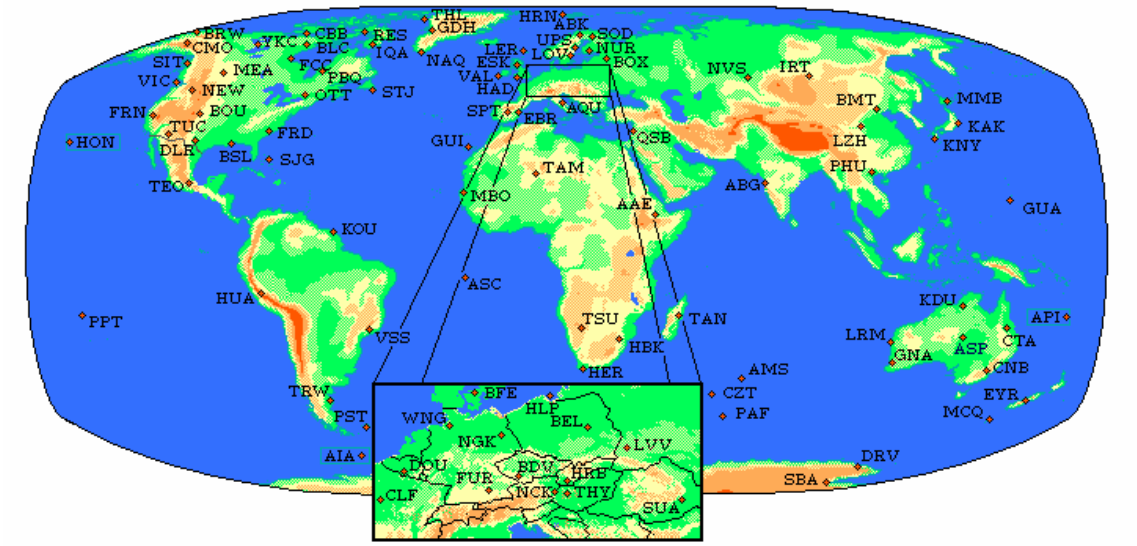


Figura 2.3. Red de observatorios mundiales, imagen de Intermagnet (www.intermagnet.org)

2_B Fundamentos físicos del Geomagnetismo.

En una región del espacio existe un campo magnético si al introducir en ella un material imantado, éste sufre la actuación de un par de fuerzas que lo obliga a alinearse con el campo existente. Esta fuerza que no tiene origen mecánico, gravitatorio ni electrostático, es la fuerza magnética. También experimentan fuerzas magnéticas las cargas en movimiento que están en presencia de un campo magnético, es la llamada fuerza de Lorentz, $\mathbf{F_m}$, cuya expresión indica que, al contrario de lo que ocurre en electrostática, la fuerza magnética es perpendicular al vector magnético:

$$\vec{F}_m = q \cdot \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \tag{2.1}$$

Siendo q la carga electrostática del cuerpo y **v** su velocidad. El vector **B** es la inducción magnética o el vector densidad de flujo magnético. La unidad en el Sistema Internacional del vector inducción es la Tesla, cuyas dimensiones son MT^2I^{-1}. En geomagnetismo se toma como unidad de **B** la nanoTesla (nT) que equivale a 10^{-9} Teslas.

Es en la ley de Ampere donde queda de manifiesto la naturaleza del campo magnético. En ella se cuantifica la fuerza que se ejerce sobre un circuito por el que circula una corriente debido a la proximidad de otro circuito con corriente. Siendo la relación entre ambos el campo magnético **H** que genera uno y que actúa sobre el otro. **H** es el vector intensidad magnética, que está relacionado con el vector inducción mediante:

$$\vec{B} = \mu \cdot \left(\vec{H} + \vec{M}\right) \tag{2.2}$$

Siendo μ la permeabilidad magnética, cuyo valor en vacío es de $4\pi \cdot 10^{-7}$ $N \cdot A^{-2}$. En el sistema CGS, la permeabilidad en el vacío es la unidad. Las unidades de **H** son $A \cdot m^{-1}$.

Para poder analizar a mayor profundidad el fenómeno magnético serán necesarias dos de las ecuaciones de Maxwell, las relativas al magnetismo (ver p.e., Parkinson, *Introduction to Geomagnetism*, 1983).

$$\begin{aligned} &\vec{\nabla}\vec{B} = 0 \\ &\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu\left(\vec{J} + \vec{\nabla} \times \vec{M} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) \end{aligned} \tag{2.3}$$

La primera indica la imposibilidad de la existencia de cargas magnéticas aisladas (no podemos aislar un polo magnético) haciendo que las líneas de fuerza del campo magnético siempre sean cerradas. En el caso del Geomagnetismo, al considerar la Tierra como un gran imán, las líneas de fuerza salen desde las proximidades del polo Sur geográfico (polo Norte magnético) y penetran en la Tierra en la zona Boreal (polo Sur magnético).

La segunda expresión relaciona el vector inducción con sus posibles fuentes de creación, como son una densidad de corriente, **J**, una distribución de material imantado, **M** y una corriente eléctrica de desplazamiento variable en el tiempo **D**. La magnetohidrodinámica es la disciplina encargada del análisis de estas expresiones, junto con las ecuaciones de continuidad de los fluidos y de transferencia de calor, que gobiernan el origen del campo Interno de la Tierra.

2C Componentes del Campo Geomagnético.

El magnetismo de la Tierra está asociado principalmente a fuentes magnéticas situadas en el núcleo externo. Ello hace que se pueda considerar en primera aproximación que el campo geomagnético es el resultante de la suma de campos magnéticos generados en el núcleo. A esta contribución del campo total se de llama Campo Interno o Campo Principal, cuya naturaleza es aproximadamente dipolar. Oscila en la superficie de la Tierra con valores entre las 60000 nT en los polos magnéticos y las 30000 nT en el ecuador magnético (Jacobs, *Geomagnetism*, 1987-1991). La variación temporal que sufre es muy lenta, apreciable a partir de decenas de años, llamada Variación Secular. Pero no todas las características del c.m.t. se describen por el Campo Principal, ya que existen otros campos magnéticos de naturalezas distintas que se suman al Principal.

Un segundo campo que contribuye al c.m.t., también es de origen interno, es el llamado campo cortical o campo de anomalías, resultante de la magnetización de las rocas en la corteza terrestre. Esta magnetización tiene dos orígenes: la primera puede ser debida a los campos inducidos o viscosos en los materiales, cuyas variaciones son análogas a las del campo principal bajo un cierto tiempo de retraso; y la segunda corresponde a los campos magnéticos remanentes de las rocas originados durante su formación geológica o producidos por otros fenómenos físico-químicos. Sus variaciones son largas, del orden de escalas geológicas.

Contribuyen además al campo total, los campos de origen externo, generados en las regiones ionosféricas y magnetosféricas, cuyos períodos de variación van desde un máximo de 24 h (variación diurna) hasta segundos (Pulsaciones magnéticas).

Otras fuentes importantes son los campos que provienen de corrientes eléctricas que fluyen en la ionosfera y los campos inducidos por corrientes que fluyen dentro de la corteza terrestre. Un resumen de todos los campos lo podemos ver en la Tabla 2.1.

El valor del Campo Principal sobre la superficie de la Tierra se obtiene promediando su valor en un rango temporal de un año y en una superficie no mayor de 10^6 km^2. Ello es necesario para eliminar cambios de corto período de origen externo.

Tabla 2.1. *Campos contribuyentes al campo total.*

Campo Magnético	Fuente del campo	Intensidad máxima	Carácter	Variación temporal
Principal	Núcleo externo	65000 nT	Dipolar más contribución no dipolar	Variación secular Inversiones
Cortical	Corteza	100 nT	Irregular	Ninguna
Ionosférico	Ionosfera	200 nT	Global	Variación Diurna Tormentas
Magnetosférico	Magnetosfera	100 nT	Global	Tormentas Pulsaciones
Inducidos	Corteza y manto superior	50 nT	Global con irregularidades de tipo local	Análoga a los ionosféricos y magnetosféricos

El campo total será expresado por el vector inducción magnética, **B**, cuyas tres componentes tienen una dirección definida.

$$\vec{B} = \vec{B}_r + \vec{B}_\theta + \vec{B}_\lambda = \vec{X} + \vec{Y} + \vec{Z} \qquad (2.4)$$

Componente norte: **X** = - $\mathbf{B_\theta}$, que está dirigida hacia el norte geográfico.
Componente este: **Y** = $\mathbf{B_\lambda}$, dirigida hacia el este geográfico
Componente vertical: **Z** = - $\mathbf{B_r}$, que en el hemisferio norte está dirigida hacia el nadir y al cenit en el sur.

El campo geomagnético puede ser expresado en función de sus componentes naturales, que son la declinación, D, la inclinación, I, el campo horizontal, **H** y el campo total, **F**; o también en función de las componentes geográficas **X**, **Y**, **Z** descritas anteriormente. La relación que existen entre ellas se describe gráficamente en al figura 2.4.

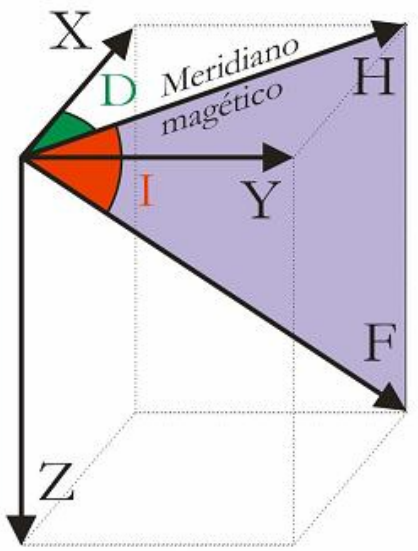


Figura 2.4. Estructura de las componentes magnéticas.

Aplicando razones trigonométricas vemos que:

$$\begin{aligned} X &= H\cos D = F\cos D\cos I \\ Y &= H\sin D = F\sin D\cos I \\ Z &= F\sin I \end{aligned} \tag{2.5}$$

A partir de éstas, se pueden deducir:

$$\begin{aligned} F &= B = \left(X^2 + Y^2 + Z^2\right)^{1/2} \\ H &= \left(X^2 + Y^2\right)^{1/2} \\ tgI &= \frac{Z}{H} \\ tgD &= \frac{Y}{X} \end{aligned} \tag{2.6}$$

El campo total, F, es el módulo del vector magnético **B**, y la componente horizontal, H, es la proyección del campo total en el plano horizontal del lugar. Ambas son siempre positivas.

La declinación magnética, D, es el ángulo que forma la componente horizontal, H, con el norte geográfico, es positiva si el meridiano magnético está al este del geográfico y negativa

en caso contrario. Si hacemos una representación de la declinación en la superficie de la Tierra, ésta varía de ± 180º en los polos magnéticos hasta hacerse nula en la llamada línea ágona. La inclinación magnética, I, es el ángulo que forma el vector campo magnético con la componente horizontal. Ésta va desde los ± 90º, localizando los polos magnéticos, hasta el valor 0º en el ecuador magnético. Siendo positiva en el hemisferio norte magnético y negativa en el hemisferio sur magnético.

En la figura 2.5 mostramos los valores de declinación, inclinación y campo total en la región europea para la época 2006.0. Dichos valores son generadas a partir de la décima generación del IGRF (IAGA, 2005).

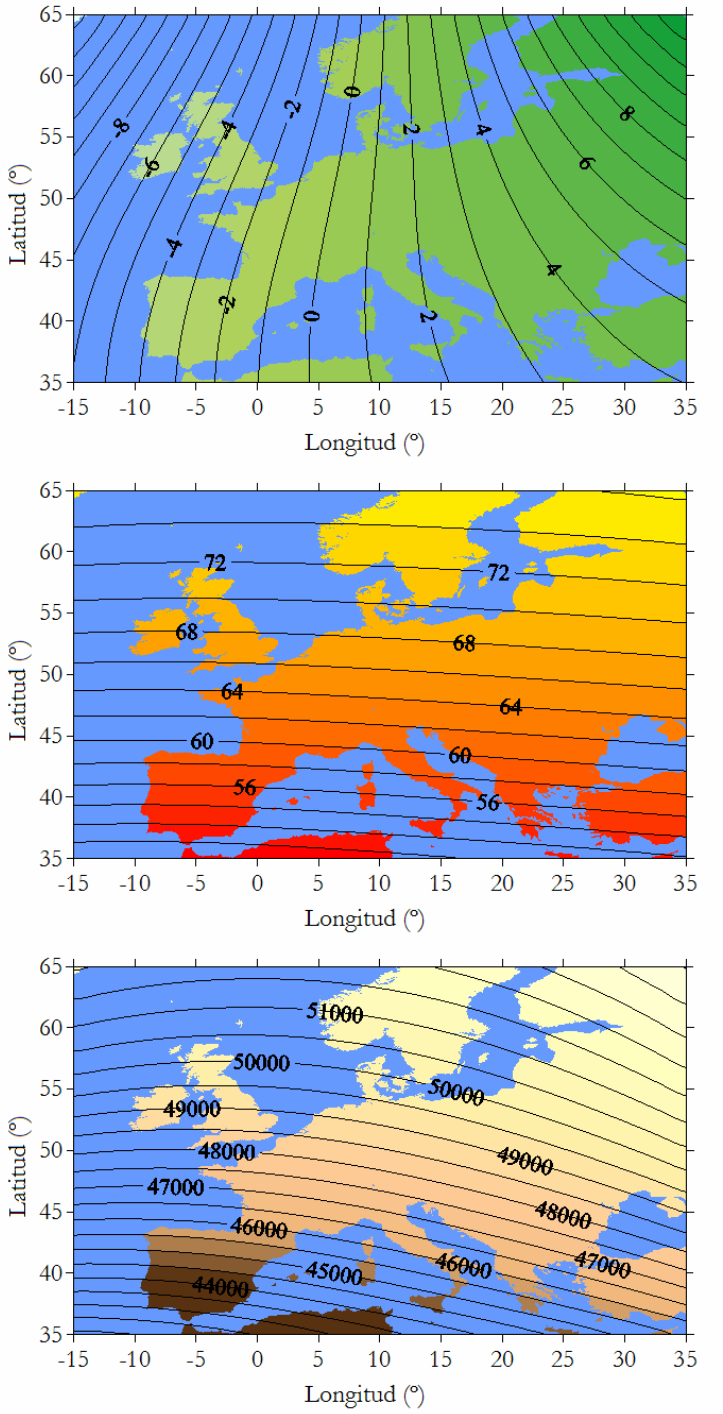


Figura 2.5. Mapas de declinación (arriba), de inclinación (en medio), ambas en grados, e intensidad total en nT (abajo) en Europa para la época 2006.0. (IAGA, 2005)

3. Análisis armónico del potencial geomagnético en un casquete esférico: SCHA.

3_A Gauss: expresión armónica del campo geomagnético.

La descripción matemática del campo principal se basa en la aplicación de las ecuaciones de Maxwell que hemos mencionado. Su aplicación tendrá lugar en la región libre de cargas magnéticas, limitada por la superficie de la Tierra y a una altura máxima de unos 50 km, ya que a partir de la cual tenemos la ionosfera donde existen fuentes del campo magnético.

Para esta región, vamos a suponer que la permeabilidad magnética coincide con la del vacío, por tanto, según Maxwell:

$$\vec{\nabla}\vec{B} = 0 \qquad (3.1)$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = 0$$

El vector imanación, **M**, es cero, ya que hemos considerado una región libre de cargas, el vector densidad de corriente, **J** y las variaciones de campos eléctricos en estas condiciones son aproximadamente nulos, siendo el rotacional del campo magnético cero, lo cual hace que se pueda derivar dicho campo magnético de un campo escalar: el potencial magnético escalar, V.

$$\vec{B} = -\vec{\nabla}V \qquad (3.2)$$

Teniendo en cuenta (3.2), y aplicando las ecuaciones (3.1), se tiene que el potencial escalar verifica la ecuación de Laplace en la región indicada:

$$\nabla^2 V = 0 \qquad (3.3)$$

Que un potencial escalar verifique la ecuación de Laplace lleva asociado varias consecuencias. En primer lugar, dadas unas condiciones de contorno, el potencial existirá siempre (teorema de Dirichlet), será único (teorema de Stokes) y armónico (es una función analítica). En segundo caso, Gauss en 1839, demostró que dicho potencial puede ser descrito como una expansión en armónicos esféricos (SHA, Spherical Harmonic Analysis), ya que la geometría que nos exige el campo geomagnético es la esférica. Aunque otro tipo de representaciones analíticas del campo son posibles, como posteriormente veremos.

El desarrollo SHA del campo geomagnético consiste en la resolución del potencial magnético escalar, que satisface la expresión (3.3) bajo una serie de condiciones de contorno. El potencial magnético no es más que una expresión matemática para la representación del campo a través de fuentes magnéticas "virtuales" situadas en el centro de la Tierra, y a pesar de alejarse de la realidad, permite definir de forma analítica el comportamiento del campo en las regiones dadas.

Si definimos el potencial en coordinas esféricas $V(r, \theta, \lambda)$, el laplaciano del mismo viene expresado por:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\lambda^2}=0 \tag{3.4}$$

Aplicando el método de separación de variables (consultar por ejemplo, Heiskanen y Moritz, *Geodesia física*, 1988), se puede escribir:

$$V(r,\theta,\lambda)=f(r)\cdot g(\theta)\cdot h(\lambda) \tag{3.5}$$

La solución al potencial son tres ecuaciones diferenciales de autovalores, una para cada variable. Para la componente radial:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d^2f(r)}{dr^2}+2r\frac{df(r)}{dr}-kf(r)=0 \tag{3.6}$$

Para la componente polar:

$$\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dg(\theta)}{d\theta}\right)+g(\theta)\left[n(n+1)\sin\theta-\frac{m^2}{\sin\theta}\right]=0 \tag{3.7}$$

Para la componente azimutal:

$$\frac{d^2h(\lambda)}{d\lambda^2}+m^2h(\lambda)=0 \tag{3.8}$$

La solución de las tres ecuaciones está determinada por las condiciones de contorno en la esfera, en la que se asume que el potencial debe anularse cuando el radio tiende a infinito y ser finito cuando el radio es nulo, además de la continuidad en la longitud y colatitud:

$$\begin{gathered}V(r,\theta,\lambda)=V(r,\theta,\lambda+2\pi);\ \frac{\partial V(r,\theta,\lambda)}{\partial\lambda}=\frac{\partial V(r,\theta,\lambda+2\pi)}{\partial\lambda}\\ V(r,\theta_i,\lambda)=0,\ \text{si } m\neq 0;\ \frac{\partial V(r,\theta_i,\lambda)}{\partial\theta}=0,\ \text{si } m=0,\quad \text{con } \theta_i=0,\pi\end{gathered} \tag{3.9}$$

Ello hace que las soluciones sean de la forma:

$$\begin{gathered}f(r)=Ar^n+Br^{-(n+1)}\\ h(\lambda)=Ce^{im\lambda}+De^{-im\lambda}\end{gathered} \tag{3.10}$$

En el caso de la colatitud, la solución son los polinomios de Legendre de primera y segunda especie. Los polinomios de segunda especie poseen una singularidad en $\theta = 0$, por lo que no pueden ser considerados como solución, por tanto serán los de primera especie o también llamados polinomios de Newman la solución en colatitud.

$$P_n^m(\cos\theta):\ \text{Polinomios de Legendre de primera especie.}$$

Los autovalores *m* y *n(n+1)* son constantes enteras para la solución en la esfera, donde *n* indica el grado del polinomio y el de *m* el orden de la función, verificándose que $m \leq n$.

La combinación de los polinomios de Legendre y las soluciones en longitud nos proporciona los armónicos de superficie, que son funciones ortogonales en la esfera.

$$S_n(\theta,\lambda) = P_n^m(\cos\theta)\cos m\lambda$$
$$S_n(\theta,\lambda) = P_n^m(\cos\theta)\sin m\lambda \tag{3.11}$$

En el *Anexo 1* se indican algunas de las propiedades de los armónicos esféricos.

Si agrupamos las soluciones como indica la expresión (3.5), tenemos dos tipos de funciones dependiendo si $r > a$ o $r < a$, siendo a el radio medio de la esfera, que en nuestro caso será el radio medio terrestre. Todas las posibles combinaciones de estas funciones darán una solución al potencial magnético escalar, éste podrá expresarse a través de una contribución interna y otra externa, según el valor de r:

$$V_{ext}(r,\theta,\lambda) = a\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n \sum_{m=0}^{n} P_n^m(\cos\theta)(g_{n,ext}^m \cos m\lambda + h_{n,ext}^m \sin m\lambda)$$
$$V_{int}(r,\theta,\lambda) = a\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^{n} P_n^m(\cos\theta)(g_{n,int}^m \cos m\lambda + h_{n,int}^m \sin m\lambda) \tag{3.12}$$

De este modo el potencial se divide en dos partes, una originada por fuentes internas situadas dentro de la esfera y otra por fuentes externas a la misma. Para el potencial interno se tiene que verificar que tienda a cero cuando el radio tiende a infinito y para el externo que sea nulo cuando $r = 0$.

$$V = V_{int} + V_{ext} \tag{3.13}$$

En el caso del geomagnetismo, el potencial interno será aquel que describe fuentes situadas en el interior de la Tierra, mientras que el potencial externo indica fuentes magnéticas situadas a alturas superiores a los 100 km (Barraclough, 1978).

A los coeficientes que aparecen en la expresión del potencial, g y h, se les denominan coeficientes de Gauss y sus dimensiones son las mismas que las del campo magnético, pudiéndose expresar en nT. Los coeficientes h_n^0 son nulos, debido a la condición de contorno de continuidad del potencial y su derivada en los valores λ y $\lambda + 2\pi$.

Otras consideraciones a tener en cuenta al aplicarlo al geomagnetismo es que el sumatorio no puede empezar en $n = 0$, ya que para este caso el potencial interno será constante y de él no derivará ningún campo magnético ($\vec{\nabla}V = 0 = -\vec{B}$) y el potencial externo será inversamente proporcional a r dando lugar a una fuente magnética monopolar situada en el centro de la Tierra, lo cual es ilógico. Añadir también que el sumatorio no se extiende a infinito, si no a un grado máximo de $n = N_{máx}$.

Si queremos representar el campo geomagnético mediante el potencial anterior, hay que tener en cuenta que éste no es observable, si no que necesitamos relacionarlo con magnitudes medibles, como son las componentes del campo magnético X, Y, Z. La relación entre ambos se deriva del potencial de la forma:

$$X = \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}$$
$$Y = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \lambda} \tag{3.14}$$
$$Z = \frac{\partial V}{\partial r}$$

Los pioneros en el uso de funciones armónicas a la aplicación de fenómenos geofísicos fueron Legendre y Laplace, aplicándolo al campo gravitatorio. En 1839 Gauss aplicó la teoría desarrollada anteriormente al campo magnético. Para ello dispuso de datos de declinación dados por Barlow en 1833, de inclinación dados por Horner en el 1836 y de campo total, proporcionados por Sabine en 1837, reduciendo todas las observaciones a una época común: 1835. Con estos datos calculó los coeficientes del desarrollo en armónicos esféricos del potencial observando que aquellos coeficientes pertenecientes al potencial externo eran nulos, mientras que los del potencial interno no lo eran. Ello hizo pensar a Gauss que el campo Principal (cuyos datos en superficie estaba modelando) era de origen interno, pudiendo reducir su análisis al del potencial escalar interno (primer sumando de la expresión 3.13). Posteriormente Schmidt recalculó los coeficientes pero teniendo en cuenta la forma elipsoidal de la Tierra, los resultados confirmaron la teoría anterior de Gauss.

Por tanto el campo magnético Principal (o de origen interno) podrá ser expresado analíticamente en superficie y hasta alturas menores de los 50 km de la forma:

$$V(r,\theta,\lambda) = a \sum_{n=1}^{N_{máx}} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^{n} P_n^m(\cos\theta)(g_n^m \cos m\lambda + h_n^m \sin m\lambda) \qquad (3.15)$$

3B Coeficientes de Gauss: coeficientes del modelo geomagnético.

Si queremos expresar el campo Principal como un desarrollo en armónicos esféricos, cobra gran importancia los coeficientes de Gauss, ya que ellos definen al potencial. Para analizar e interpretar físicamente los coeficientes, vamos a sustituir en la expresión (3.15) los valores de los primeros armónicos esféricos hasta grado 1, orden 1 (ver p.e. Parkinson, *Introduction of the Geomagnetism*, 1983):

$$\begin{aligned} V(r,\theta,\lambda) &= \\ &= \frac{a^3}{r^2}\left[g_1^0\ P_1^0(\cos\theta) + (g_1^1\cos\lambda + h_1^1\sin\lambda)P_1^1(\cos\theta)\right] = \\ &= \frac{a^3}{r^2}\left[g_1^0\ \cos\theta + (g_1^1\cos\lambda + h_1^1\sin\lambda)\sin\theta\right] \end{aligned} \qquad (3.16)$$

El potencial de un dipolo magnético viene dado por la expresión:

$$V = K\cdot\frac{\vec{m}\cdot\hat{e}_r}{r^2} = \frac{K}{r^2}(m_x\cos\lambda\sin\theta + m_y\sin\lambda\sin\theta + m_z\cos\theta) \qquad (3.17)$$

Si comparamos esta expresión con los términos de (3.16) vemos que los primeros coeficientes de Gauss están relacionados con las componentes del momento dipolar **m**, la constante electrostática K y el radio medio de la Tierra:

$$g_1^0 = K\frac{m_z}{a^3},\ g_1^1 = K\frac{m_x}{a^3},\ h_1^1 = K\frac{m_y}{a^3} \qquad (3.18)$$

El módulo del momento dipolar será:

$$m = \frac{a^3}{K}\sqrt{(g_1^0)^2 + (g_1^1)^2 + (h_1^1)^2} = B_0 \tag{3.19}$$

Siendo B_0 la constante geomagnética.
La dirección del dipolo se calculará a través de las componentes del momento dipolar:

$$tg\theta_0 = \frac{\sqrt{(g_1^1)^2 + (h_1^1)^2}}{g_1^0}; \quad tg\lambda_0 = \frac{h_1^1}{g_1^1} \tag{3.20}$$

Siendo θ_0 la colatitud y λ_0 la longitud que definen su dirección.

Con los coeficientes que nos proporciona la décima generación del Modelo Internacional de Referencia IGRF (IAGA, 2005) podemos obtener los parámetros del dipolo centrado e inclinado para la época 2006.5, ver Tabla 3.1.

Tabla 3.1. *Coeficientes hasta grado 1 y parámetros del dipolo centrado para la época 2006.5*

Coeficientes IGRF 10º (2006.5)	B_0 (2006.5)	ϕ_0 (2006.5)	λ_0 (2006.5)
g_{10} = -29543.6 nT	30017.5 nT	79º 48.3'	71º 50.5'
g_{11} = -1655.6 nT			
h_{11} = 5048.1 nT			

Si aumentamos el grado, para n = 2, éste representa un cuadrupolo, con n = 3 un octupolo y así continuamente aproximándose con mayor exactitud el campo real. A medida que aumentamos el grado de desarrollo la magnitud de los coeficientes disminuyen, ya que la mayor contribución se debe a los coeficientes de menor grado. A continuación se muestra una gráfica donde se observa la caída exponencial de los coeficientes a medida que se aumenta el grado del desarrollo. Coeficientes proporcionados también por el IGRF a la época 2005.0 (IAGA, 2005).

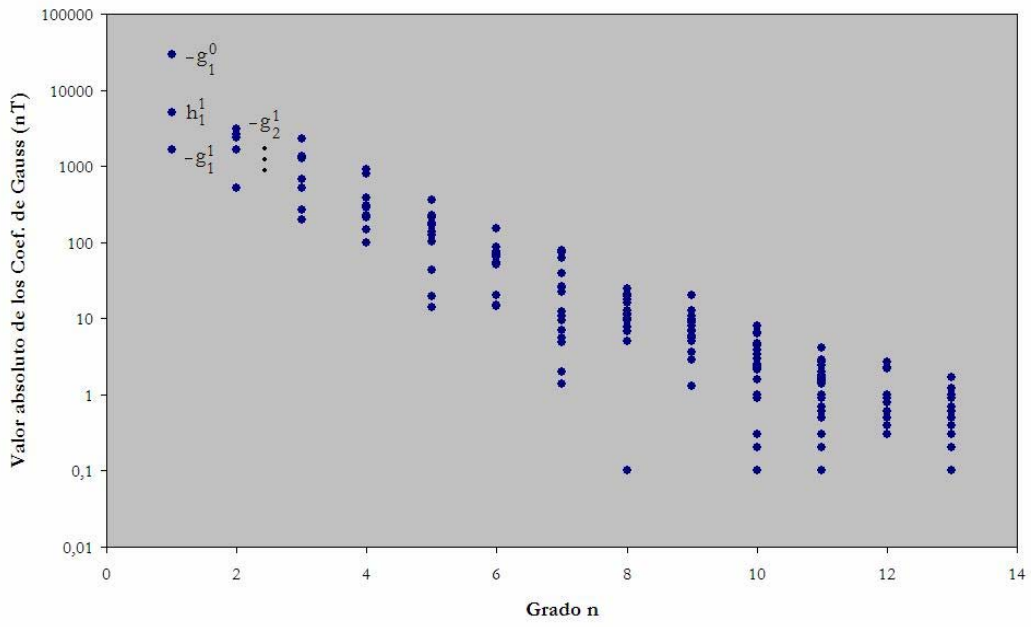


Figura 3.1. Valores de los coeficientes de Gauss para 2005.5, según IGRF décima generación (IAGA, 2005) frente al grado del desarrollo en armónicos esféricos, *n*.

El espectro de los coeficientes de Gauss presenta un cambio de pendiente significativo a partir del grado 13 o 14 (Langel y Estes, 1982; Cain et al., 1984), lo cual es interpretado como el paso de una contribución puramente nuclear a una contribución cortical. Los de menor grado dan lugar a variaciones del campo magnético de grandes longitudes de onda generadas en zonas del núcleo externo, y a medida que *n* aumenta las longitudes de onda disminuyen.

La aproximación dipolar conseguida con el grado $n = 1$ define en un 90% el valor del campo Principal, variando este porcentaje dependiendo de unas zonas u otras de la Tierra. El resto del desarrollo corresponde al campo no dipolar cuya variación espacio-temporal es diferente al dipolar.

3C Haines (1985a): desarrollo armónico del campo geomagnético en un casquete esférico.

En el caso del casquete esférico (ver figura 3.2), las condiciones de contorno para la componente radial, r, son las mismas que en el caso esférico. En el caso de la longitud, las condiciones siguen siendo las mismas, lo cual hace que en el desarrollo en un casquete esférico el orden *m* siga siendo real y entero; sin embargo, para la colatidud las condiciones son diferentes.

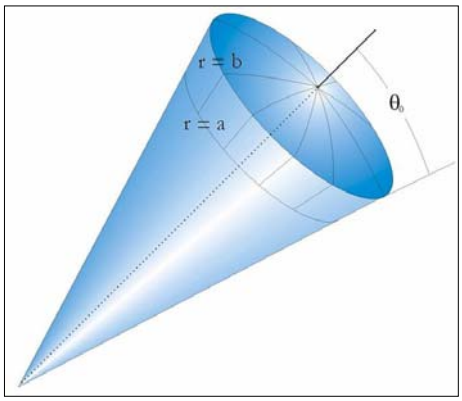


Figura 3.2. Casquete esférico de semiángulo θ_0. La región entre r = a y r = b, junto con la delimitación de θ_0, definen el área a analizar. Figura modificada de Haines, 1985a.

Cuando la colatitud es nula, es decir, en el centro del casquete, la condición de contorno si que es análoga a la del caso esférico, pero en el borde del casquete, cuando la colatitud es igual a θ_0, el potencial y su derivada tiene que verificar:

$$\begin{aligned} V(r,\theta_0,\lambda) &= f(r,\lambda) \\ \frac{\partial V(r,\theta_0,\lambda)}{\partial\theta} &= g(r,\lambda) \end{aligned} \tag{3.21}$$

Siendo las funciones f y g arbitrarias y sujetas a las mismas condiciones que la componente radial y la longitud.

Se puede demostrar que tomando unos ciertos valores del grado, *n*, las funciones f y g pueden ser nulas (Haines, 1985a). Para una serie de valores de *n* podemos ser verifica que:

$$V(r,\theta_0,\lambda) = 0 \tag{3.22}$$

Del mismo modo, para otros ciertos valores de *n* se verifica que:

$$\frac{\partial V(r,\theta_0,\lambda)}{\partial\theta} = 0 \tag{3.23}$$

La solución del potencial con condiciones de contorno dadas en las expresiones (3.22) y (3.23) son de nuevo las funciones asociadas de Legendre de primera especie, pero el valor de *n*, ya no tiene por que ser entero.

Como los diferentes valores reales de *n* dependen de *m*, para su representación vamos a hacer uso de un nuevo parámetro, *k*, que será un índice entero escogido para ordenar de forma creciente las diferentes raíces *n* para un *m* dado (además, *k* empieza por el valor de *m*, de manera análoga al caso de *n* entero). Ello da lugar a que los valores de *n* vengan descritos a través de *m* y *k* de la forma: $n_k(m)$.

Así los $n_k(m)$ para los que $(k - m) = par$ son los correspondientes a las raíces de (3.23) y aquellos para los que $(k - m) = impar$ son las raíces de (3.22), cuando estas ecuaciones son consideradas como ecuaciones en *n*. Es decir, que los posibles grados de las funciones asociadas de Legendre que estarán presentes en la expansión, se determinarán a partir de los ceros de las propias funciones de Legendre y su derivada según la colatitud en la frontera del casquete, θ_0:

$$\begin{aligned} &\frac{dP^m_{n_k(m)}(\cos\theta_0)}{d\theta} = 0 \quad \text{para } k - m = \text{par} \\ &P^m_{n_k(m)}(\cos\theta_0) = 0 \quad \text{para } k - m = \text{impar} \end{aligned} \tag{3.24}$$

Vemos por tanto, que el método SCHA, es un reajuste del método SHA pasando de un casquete de 90º (hemisferio) a un casquete de semiángulo θ_0. En la figura 3.3 se da un ejemplo gráfico, donde se compara el caso SHA para un hemisferio y el método SCHA (De Santis, 1991). Se observa como las condiciones de contorno descritas en (3.22 y 3.23) para el casquete esférico hace que en la frontera el comportamiento de los dos grupos de funciones de Legendre sea análogo a lo que ocurre en el borde del hemisferio de 90º para el caso SHA.

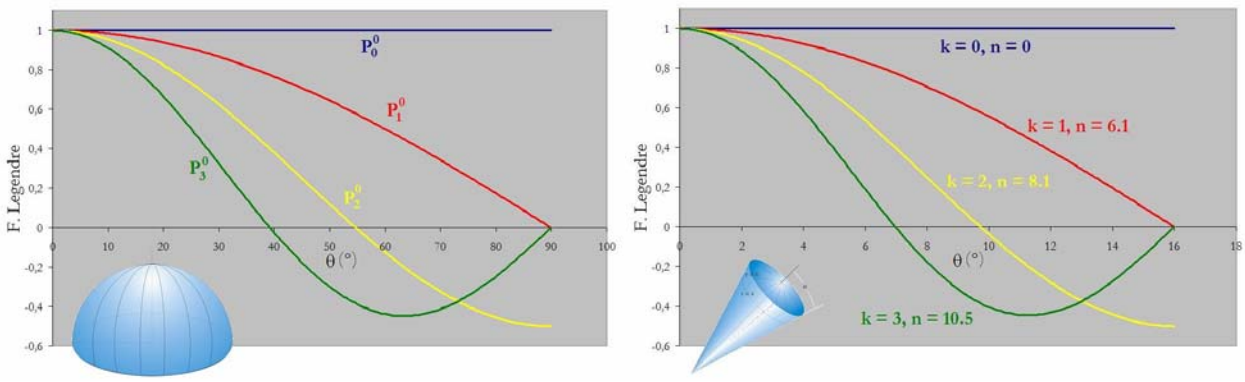


Figura 3.3. Funciones asociadas de Legendre (con $m = 0$). Izquierda, para el caso de un hemisferio. Derecha, para un casquete esférico de semiángulo 16º. Para $n - m = par$ (línea amarilla) las funciones han de tener sus derivadas iguales a cero en la frontera (ecuador). Para $n - m = impar$ (línea roja y verde) las funciones son nulas en la frontera. El índice k reemplaza a n. Adaptada de De Santis, 1991.

El potencial magnético interno podrá ser expresado de forma análoga a la expresión (3.15), pero cambiando la notación de los índices:

$$V(r,\theta,\lambda) = a \sum_{k=0}^{K_{int}} \sum_{m=0}^{k} \left(\frac{a}{r}\right)^{n_k(m)+1} P^m_{n_k(m)}(\cos\theta)\cdot(g^m_{n_k(m)}\cos m\lambda + h^m_{n_k(m)}\sin m\lambda) \quad (3.25)$$

El parámetro K_{int} indica el grado máximo del desarrollo de las fuentes internas. En este caso, una expansión completa espacial e interna del potencial dará lugar a $(K_{int}+1)^2$ coeficientes de Gauss. De este modo, el potencial magnético escalar se describe a través de dos conjuntos de funciones armónicas, unas para $k - m = par$ y otras para $k - m = impar$, de manera que las funciones son ortogonales sobre el casquete dentro de cada base, pero las de una base no son ortogonales con respecto a las de la otra (Haines, 1985a). De esta forma, los coeficientes de la expansión no pueden expresarse algebraicamente en términos de la integral del producto entre la función y la correspondiente función base, como en el caso de una expansión ortogonal (en este caso, si se multiplican todos los términos de la serie por dicha función base y se integra dentro del intervalo de validez de la expansión, debido a la ortogonalidad todos los términos desaparecen, excepto el correspondiente a la función base). Aunque este hecho supone un impedimento analítico, sin embargo no representa un gran inconveniente práctico, puesto que en la realidad se cuenta con un número discreto de observaciones y los coeficientes se determinan por procedimientos numéricos como por ejemplo los ajustes por mínimos cuadrados.

La longitud de onda que proporciona un modelo de armónicos esféricos ordinario viene dado por la expresión, (Bullard, 1967):

$$\omega = \frac{2\pi a}{n} \quad (3.26)$$

Que para el caso del casquete esférico es análoga, pero cambiando el grado n entero por el grado $n_k(m)$ real:

$$\omega = \frac{2\pi a}{n_k(m)} \quad (3.27)$$

Vemos por tanto, como el método SCHA proporciona longitudes de onda más pequeñas (mayor resolución) con un número igual de coeficientes de Gauss que el caso SHA; ya que los grados n_k reales son siempre mayores que los n enteros del caso global (ver figura 3.3). Y esta longitud de onda será más pequeña si menor es el tamaño del casquete.

Teniendo en cuenta esta longitud de onda mínima que el modelo SCHA puede reproducir, se puede obtener el valor máximo de k. Usando la expresión (3.27), cuyo numerador se puede aproximar por 40000 km, el valor máximo de k será (Haines, 1988):

$$K_{máx} = \frac{\theta_0}{90^o}\left(\frac{40000}{\omega_{mín}} + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \quad (3.28)$$

Si tenemos en cuenta las expresiones (3.14), las componentes del campo geomagnético para un desarrollo en armónicos esféricos en un casquete vendrán determinadas por:

$$X = \sum_{k=1}^{K_{int}} \sum_{m=0}^{k} \left(\frac{a}{r}\right)^{n_k(m)+2} \frac{dP^m_{n_k(m)}(\cos\theta)}{d\theta} (g^m_{n_k(m)} \cos m\lambda + h^m_{n_k(m)} \sin m\lambda)$$

$$Y = \sum_{k=1}^{K_{int}} \sum_{m=1}^{k} \left(\frac{a}{r}\right)^{n_k(m)+2} \frac{m \cdot P^m_{n_k(m)}(\cos\theta)}{\sin\theta} (g^m_{n_k(m)} \sin m\lambda - h^m_{n_k(m)} \cos m\lambda) \qquad (3.29)$$

$$Z = -\sum_{k=1}^{K_{int}} \sum_{m=0}^{k} (n_k(m)+1) \left(\frac{a}{r}\right)^{n_k(m)+2} P^m_{n_k(m)}(\cos\theta)(g^m_{n_k(m)} \cos m\lambda + h^m_{n_k(m)} \sin m\lambda)$$

Estas expresiones de las componentes serán la herramienta matemática usada para la construcción del modelo regional de campo geomagnético.

3_D Haines versus Gauss: SCHA vs SHA.

La técnica SCHA permite el análisis de un campo potencial, como puede ser el geomagnético o el gravitatorio, en una región del espacio sin incumplir la ecuación de Laplace. Ello hace que su uso actual vaya incrementándose en la comunidad científica, y en especial a la modelización regional del c.m.t. (ver p.e. De Santis and Torta, 1997). Las propiedades básicas del método en armónicos esféricos ordinarios (SHA) son también válidas para el método SCHA, aunque como veremos existen algunas diferencias al compararlos.

Denotaremos en minúscula los coeficientes de Gauss del desarrollo global y en mayúscula los coeficientes de Gauss del desarrollo regional (Haines, 1991). Para su análisis, vamos a comparar las expresiones (3.15) y (3.25); la primera define un potencial en función de armónicos esféricos ordinarios, mientras que la segunda describe el potencial en un casquete de armónicos esféricos. En el caso regional, el potencial definido sólo es válido en la región interna al casquete y no es posible hacer una extrapolación a regiones externas del mismo.

Una de las principales diferencias radica en las funciones de Legendre. Como vimos en el caso global, las condiciones de contorno hacían que el grado *n* fuese entero, sin embargo para el caso regional, aparecían dos grupos de funciones de Legendre donde el grado *n* podía ser real. Esto puede facilitar el análisis en un casquete de una función que dependa sólo de la componente vertical, como es el caso de la componente Z del campo geomagnético o de la gravedad, ya que para estos casos sólo un conjunto de esas funciones serán necesarios, concretamente aquellas que satisfacen que $k - m = impar$ (Haines, 1985a).

Para comparar ambas técnicas vamos a expresar una función de Legendre del caso ordinario en función de una serie de armónicos esféricos definidos en un casquete (De Santis et al., 1999):

$$P^m_n(\cos\theta)\cos m\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{k} \left(\frac{a}{r}\right)^{n_k(m)+1} P^{\mu}_{n_k(m)}(\cos\theta) \cdot (A^{\mu,n}_k \cos\mu\lambda + B^{\mu,n}_k \sin\mu\lambda) \qquad (3.30)$$

Si multiplicamos simultáneamente por $\cos(m\lambda)$ e integramos para valores de λ entre 0 y 2π, obtenemos una expresión que relaciona directamente las funciones de Legendre ordinarias con las del método SCHA. Y análogamente se podría hacer con $P^m_n(\cos\theta)\sin m\lambda$.

$$P_n^m(\cos\theta) = \sum_{k=m}^{\infty} A_k^{m,n} P_{n_k(m)}^m(\cos\theta) \tag{3.31}$$

El coeficiente $A_k^{m,n}$ indica la transformación de las funciones de Legendre de SCHA a SHA. Al igual que en análisis anteriores, el sumatorio puede ser truncado en un cierto valor de *k* donde la contribución de los sumandos no es significativa (Haines, 1988).

Se verifica que los valores de $A_k^{m,n}$ dependen del valor máximo de *k* y del tamaño del casquete, siendo la convergencia de la serie más rápida par un valor óptimo de *k* y para valores grandes de θ_0 (De Santis et al., 1999). Ello hace que en pequeños casquetes, la convergencia del SCHA sea muy lenta para el caso de grandes longitudes de ondas, como es el caso de la variación secular, y en la practica, el SCHA para estos casos suele presentar dificultades o ser imposibles (Torta et al., 1992; Torta and De Santis, 1996).

Se puede establecer una relación entre los coeficientes de SHA con los de SCHA. Para relacionarlos hay que tener en cuenta que los coeficientes de Gauss del SCHA, G_k^m y H_k^m, están referidos al centro del casquete, que por lo general no está situado en el polo Norte geográfico, por lo que habrá que rotar estos coeficientes o los del desarrollo ordinario, g_n^m y h_n^m, para referir los dos conjuntos de coeficientes al mismo polo (De Santis et al., 1996).

La determinación de los coeficientes G_k^m y H_k^m en función de g_n^m y h_n^m se puede definir a través de un desarrollo de la forma (De Santis et al., 1999):

$$\begin{Bmatrix} G_k^m \\ H_k^m \end{Bmatrix} = \sum_{n=m}^{\infty} A_k^{m,n} \begin{Bmatrix} g_n^m \\ h_n^m \end{Bmatrix} \tag{3.32}$$

Hay que tener en cuenta que la determinación de G_k^m y H_k^m a través de g_n^m y h_n^m es única, pero el procedimiento inverso no es posible. Esto es obvio, ya que dado un potencial global, siempre se podrá obtener unos coeficientes para una representación regional en un casquete y serán únicos estos coeficientes. Sin embargo a la inversa no ocurre, pues existiría un número infinito de potenciales globales cuyos valores dentro del casquete coincidirían, solo hay un caso posible, y lo dio Haines (1991) proporcionando un potencial global que es nulo fuera del casquete.

Estos coeficientes que definen el SCHA indican una de las mayores diferencias entre SCHA y SHA, pues con un número pequeño de coeficientes se puede modelar un campo potencial caracterizado con bajas longitudes de onda, lo cual no se podría hacer mediante la técnica ordinaria SHA a menos que el número de coeficientes fuera muy superior al de SCHA.

Por último, otra de las diferencias entre las expresiones (3.15) y (3.25) radica en el valor inicial del índice sumatorio *n* para el caso global y su análogo en el regional, *k*. En el primero de los casos, el valor inicial es 1, sin embargo para el caso SCHA el valor inicial de *k* es 0. En el apartado 3_A vimos cuales eran las consecuencias del uso $n = 0$, llegando a la conclusión de que el sumatorio empezaría en $n = 1$; sin embargo en el SCHA, es necesario empezar en $k = 0$, ya que la componente vertical Z obtenida por la derivada radial del potencial magnético ($Z = \partial V/\partial r$) tiene su mayor contribución con los índices $k = m = 0$. Si obtenemos el coeficiente

G_0^0 a partir de g_n^0, como indica (3.32), éste se podrá expresar solo en términos de armónicos zonales SHA, como:

$$G_0^0 = \sum_{n=n_{mín}}^{\infty} A_0^{0,n} g_n^0 \tag{3.33}$$

Donde n_{min} = 1 y la suma es truncada a un finito valor de n. Si G_0^0 es distinto de cero indica que existe una contribución significativa de los términos armónicos zonales. En De Santis (1999) se muestra un ejemplo de cómo este coeficientes es significativo, evaluando la parte del IGRF 1990 (Langel, 1992) con m = 0 (armónicos zonales) hasta n = 6 aplicado sobre un casquete centrado en el polo norte y de semiángulo 50º. Donde se observa que a medida que vamos eliminando la contribución con menor valor de n, el coeficiente G_0^0 tiende a cero (figura 3.4).

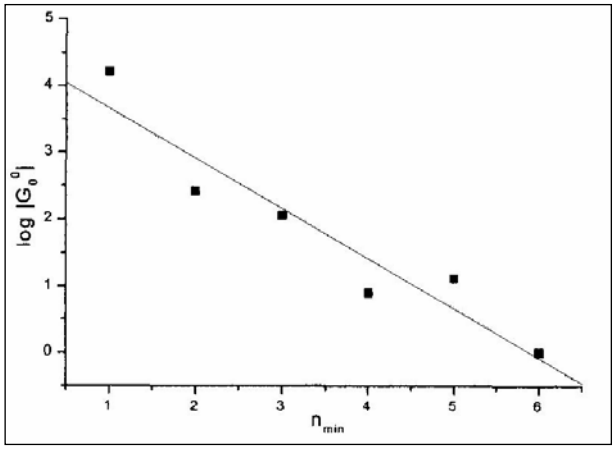


Figura 3.4. Caída del valor absoluto de G_0^0, al ir eliminando los armónicos zonales desde el grado 1 al n. (De Santis et al., 1999).

Un valor próximo a cero de G_0^0 en un ajuste SCHA indica una mala representación de grandes longitudes de onda. Este coeficiente será objeto de análisis a lo largo de este trabajo.

4. Modelización del Campo Geomagnético: Inicios y estado actual del tema.

4_A Recorrido por los diferentes modelos globales de campo geomagnético.

Históricamente el primer modelo de campo magnético que podemos considerar fue el establecido por Gilbert en 1600 al establecer que la Tierra en sí misma se comporta como un gigantesco imán esférico. Ello implicaba que el campo geomagnético era el resultante de un dipolo magnético situado en el centro de la Tierra y alineado con el eje de rotación, lo cual sería ilógico, ya que implicaría valores nulos de declinación para cualquier punto de la superficie del Planeta.

Una mejor aproximación se consigue considerando el dipolo inclinado, cuyo eje está girado respecto al de rotación unos 11.5º (calculado y dado en la Tabla 3.1 del apartado 3_B). Este dipolo genera en superficie el llamado campo dipolar, la diferencia con el campo real es el campo no dipolar. Si esta situación se diera, las isodinámicas (líneas de igual valor del campo) estarían en paralelos orientados según el eje del dipolo, lo cual tampoco ocurre en la realidad.

Finalmente, una mejora del modelo anterior, sería considerar el dipolo descentrado, su desviación es hacia el Oeste del Océano Pacífico, concretamente 450 km en dirección 151º E y 16º N. A esta aproximación se le llama del dipolo excéntrico, que mejora los resultados en superficie en algunas zonas, aunque en otras empeoran.

En 1610 se aplica las matemáticas para poder definir un parámetro geomagnético, la inclinación. Wringht impuso dos condiciones, que fuese nula en el ecuador y máxima en el polo norte geográfico. En 1688 fue modelada la declinación por Bond, usando valores de Londres y ajustando su variación secular.

El primer modelo global llega en 1838, con el modelo armónico de Gauss que comentamos anteriormente. Basados en la misma técnica que Gauss (armónicos esféricos), aunque perfeccionada a lo largo del tiempo, se han desarrollado la mayor parte de los modelos globales existentes hasta la actualidad.

Barracolough (1978) publica: *"Spherical Harmonic models of the geomagnetic field"*, una recopilación de todos los modelos realizados mediante armónicos esféricos hasta su fecha de publicación. En ella hace una clasificación de los modelos dependiendo de tres parámetros. El primero era el tipo de normalización usada en las funciones de Legendre, en un segundo caso atendiendo al tipo de componente que se modelaba y finalmente mediante los diferentes tipos de análisis y métodos que eran empleados.

Dentro de estos modelos cabe destacar los modelos que han sido (y siguen siendo) los modelos de referencia. Éstos son los Modelos Internacionales de Referencia de Campo Geomagnético (IGRF). Idea que se plasma en 1968, cuando la IAGA (Internacional Association of Geomagnetism and Aeronomy) genera el primer modelo en armónicos esféricos del campo Principal y su variación secular. Su primera generación dio un modelo referido al 1 de Enero de 1965 y que incluía los valores de los coeficientes de Gauss y sus derivadas temporales hasta un grado $n = 8$. Este modelo tenía validez desde 1955 hasta 1972.

Ya la segunda generación es consecuencia de la evolución tecnológica, pues se introducen también datos obtenidos desde satélite. Dando de nuevo un modelo de campo para 1975 y su variación secular válida de 1975 a 1980. Críticas de los modelos anteriores hacen que en 1970 se revisen los modelos, generándose los modelos de referencia definitivos DGRF.

Del mismo modo y cada cinco años ha ido apareciendo los diferentes modelos IGRF válidos para el año de publicación y posteriores (gracias a la traslación por medio de la variación secular) y los modelos definitivos DGRF.

Estos modelos son el fruto de la revisión de la IAGA de las diferentes propuestas de los grupos científicos dedicados al geomagnetismo. En la actualidad contamos con catorce modelos de referencia IGRF. De ellos, trece, describen el campo Principal en épocas separadas por intervalos de cinco años desde 1900 hasta 2005; y el último da la predicción a través de la variación secular para el intervalo 2005 – 2010.

También en intervalos de cinco años desde 1945 hasta el 2000 se dan los modelos definitivos (DGRF). Todos ellos se han generado considerando la forma normalizada de Schmidt (Chapman y Bartels, 1940). El IGRF actual corresponde a la décima generación (IAGA, 2005), con un total de 195 coeficientes dados hasta el grado máximo 13 y variación secular hasta grado 8. En la figura 4.1 se muestran los valores de las componentes del campo geomagnético dados por el IGRF2005 para 2005.0.

En los últimos años se han desarrollado modelos que intentan superar el problema de la unión de la variación espaciotemporal del c.m.t. en la superficie terrestre y las observaciones en satélites (unión entre campo de origen interno y externo). Aparecen los modelos "Comprensivos" del campo geomagnético, usando principalmente los datos proporcionados por los satélites Ørsted, CHAMP, Magsat y POGO y datos en tierra de los observatorios geomagnéticos.

El primero fue el modelo CM3 (Sabaka et al., 2002). En él se hace un análisis de los datos de satélites Magsat y POGO en el intervalo 1960 – 1985. Teniendo en cuenta todas las fuentes posibles del campo geomagnético, desde el núcleo externo hasta la influencia de la magnetosfera. Más recientemente se ha actualizado dicho modelo, apareciendo el CM4 (Sabaka et al., 2004), mediante datos de los satélites CHAMP y Øersted, ampliando el período de validez del CM3 hasta mediados de 2002.

A través de estos modelos es posible la representación del campo con orígenes diversos, desde origen interno (campo Principal o nuclear), pasando por el litosférico e ionosférico, hasta la representación del campo generado en la magnetosfera. En la dirección web: *http://core2.gsfc.nasa.gov/geomag.html* podemos encontrar toda la información necesaria con representaciones del campo geomagnético, así como los programas de generación de estos modelos "Comprensivos".

4_B Análisis de la variación secular. Modelos globales.

Para trasladar los datos de campo magnético en un mismo lugar a épocas distintas, se hace necesario el uso de la variación temporal del campo magnético de largo período: la variación secular. Actualmente se caracteriza por una disminución del campo dipolar y por una deriva hacia el oeste.

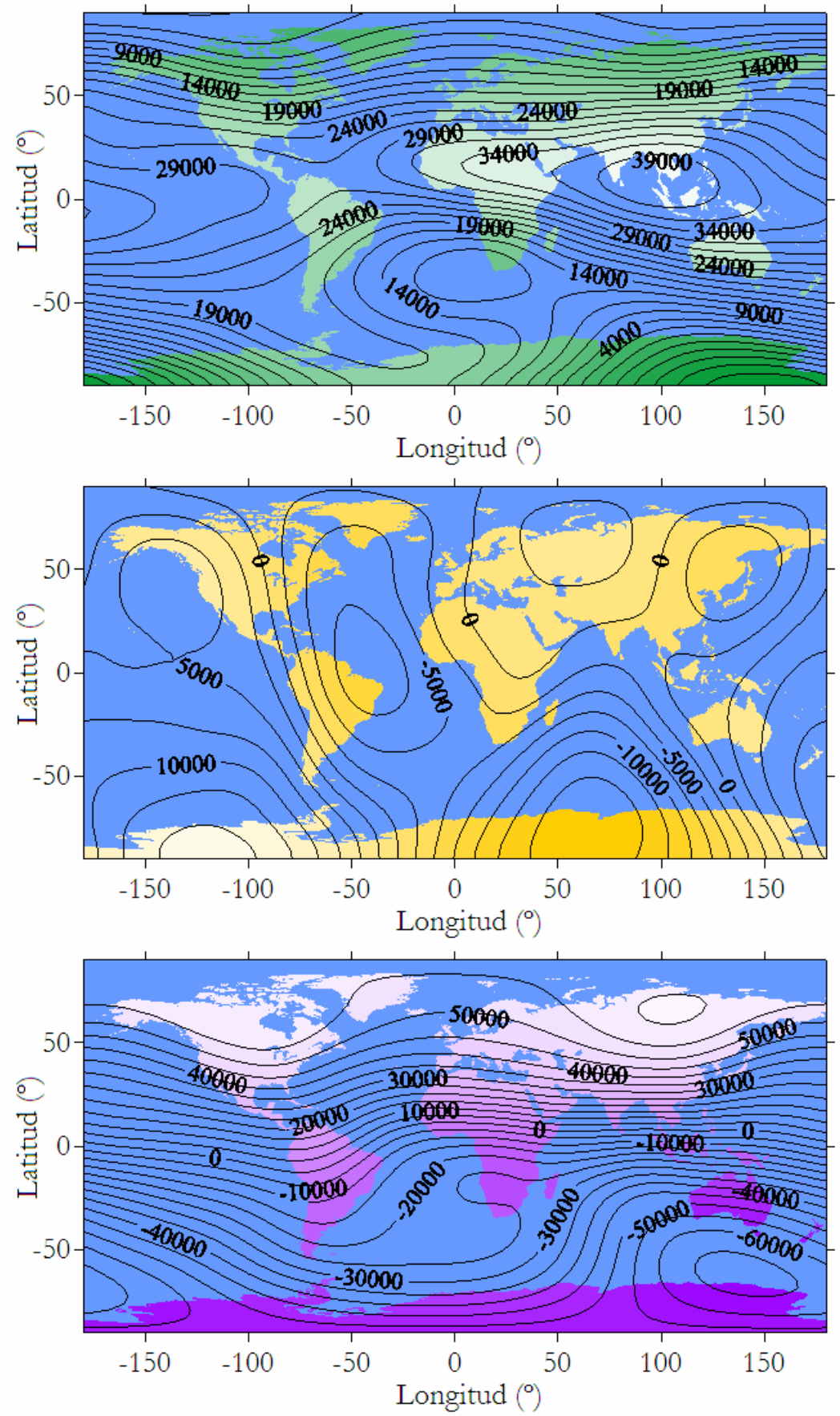


Figura 4.1. Mapa de componente Norte (arriba), Este (medio) y Vertical (abajo) para la época 2005.0, datos obtenidos del IGRF2005 (IAGA, 2005). Valores en nT.

El intento de modelar en armónicos esféricos la variación secular fue llevado a cabo por Carlheim-Gyllensköld (1896), generando una serie de modelos de campo principal para el período 1550 – 1900 y relacionándolos entre sí a través de la variación secular. Pero fue en 1925 cuando Bartels genera el primer modelo de variación secular para el período 1902 – 1919, basado en datos de sólo 14 observatorios y con un número máximo de coeficientes de ocho.

Modelos actuales de variación secular van asociados en general a modelos de campo principal, como es el caso del IGRF. De nuevo Barraclough (1976) hace un recopilatorio de los diferentes modelos de variación secular desarrollados a través de la técnica de armónicos esféricos. Estos modelos han permitido conocer la variación del campo geomagnético en los últimos cien años. Pero podemos hacer uso del paleomagnetismo para poder retroceder en el tiempo y analizar el campo en el pasado.

Los modelos globales de campo magnético en el pasado nacen por la necesidad de conocer la variación del campo durante períodos de tiempos grandes y poder analizar su comportamiento y origen. Surgen así en las últimas décadas modelos globales de campo magnético en el pasado, basados principalmente en datos aportados por medidas históricas, análisis paleomagnéticos de erupciones volcánicas históricas, estudios paleomagnéticos llevados a cabo en sedimentos lacustres y por datos arqueomagnéticos.

Un ejemplo de modelo basado en medidas históricas es el establecido por Jackson et al. (2000). Estos autores proporcionan un modelo global del campo para los últimos cuatrocientos años. Los datos del último centenario son dados por los observatorios, pero los datos anteriores al siglo XIX, han sido obtenidos a través de valores de declinación e inclinación de los mapas, cartas y apuntes de los marineros de la época. En la figura 4.2 se presenta los puntos de medida que estos autores emplearon. Estos datos tienen dos tipos de errores, el error en la determinación de la posición de los puntos de medida y el error de la propia medida. Para tratar esta información, proponen un modelo estocástico, donde se establece una dispersión aleatoria de errores mediante un movimiento Browniano. El modelo obtenido se basa en armónicos esféricos en su parte espacial y en B-splines en su parte temporal, se le denota como modelo GUFM1.

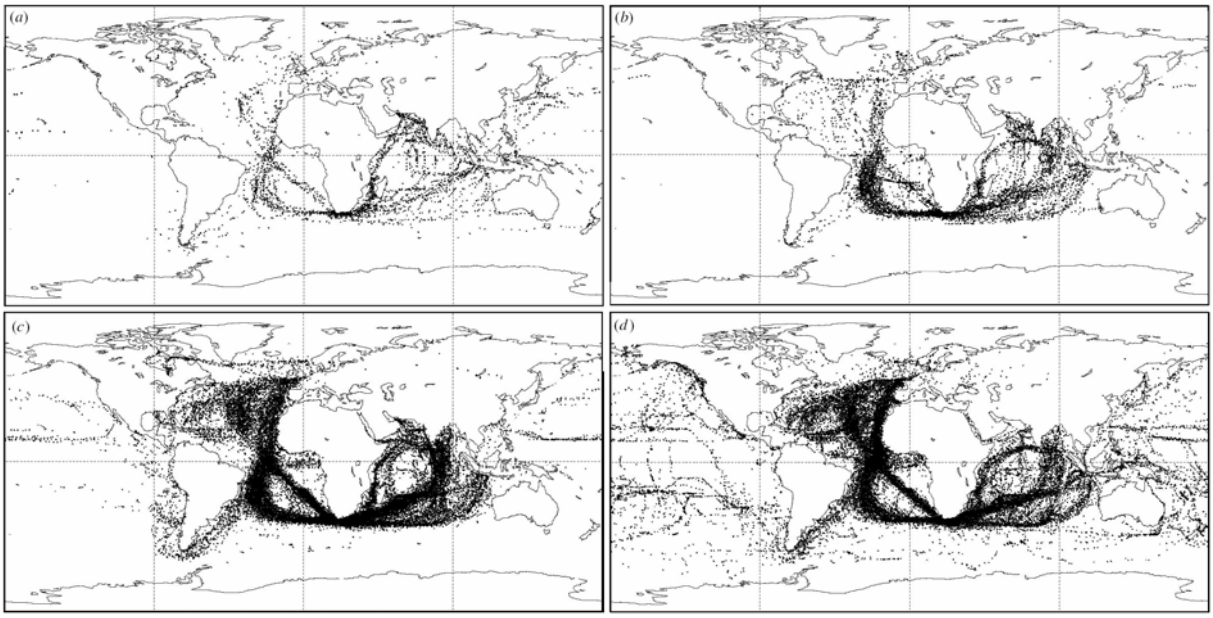


Figura 4.2. Evolución de la distribución espacial de los puntos de medidas de declinación tomados de las rutas marinas: a) período de 1600 a 1649; b) de 1650 a 1699; c) de 1700 a 1749 y c) de 1750 a 1799. Jackson et al., 2000.

En cuanto a modelos basados en datos paleomagnéticos, podemos encontrar los modelos publicados por McElhinny et al. (1996), Johnson y Constable (1997), Kelly y Gubbins (1997), Carlut y Courtillot (1998) y Hatekeyama y Kono (2002). Todos ellos proporcionan un modelo de campo par los últimos cinco mil años. Las bases de datos paleomagnéticos que fueron usadas en estos modelos fueron recopiladas por Quidelleur et al. (1994), Johnson y Constable (1997), y McElhinny y Lock (1996).

Basado en la recopilación de datos arqueomagnéticos llevados a cabo por Daly and Goff (1996); Hongre et al. en 1988, generan un modelo de campo desde el inicio de nuestra Era hasta el año 1700. Modelo también basado en armónicos esféricos, pero con una contribución de bajos armónicos, pues consideran solo los primeros armónicos hasta grado 2 más el de grado 3 orden 3. En este año se publica también por parte de Johnson y Constable (1998) un modelo pseudo-temporal, el ALS3K.

Tras una nueva recopilación llevada a cabo por Lund y Constable (en preparación), llamada PSVMOD1.0 de datos arqueomagnéticos y paleomagnéticos de sedimentos lacustres para los últimos tres mil años, elaboran un modelo estático realizado cada cien años durante los últimos tres mil años (Constable et al., 2000). Como mejora de este último modelo estático, en 2003, Korte y Constable publican un modelo continuo en el tiempo para los últimos tres mil años; es el modelo CALS3K.1 (ver figura 4.3). Para ello, de nuevo, se hace uso de los armónicos esféricos para la parte espacial y de los B-splines en la parte temporal.

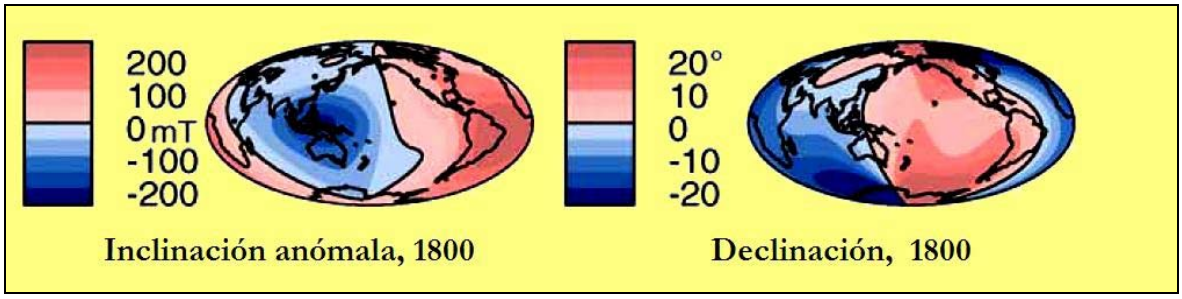


Figura 4.3. Mapas de inclinación anómala (diferencia con la dipolar) y declinación para el año 1800 d.C. Modelo CALS3K.1, Korte et al., 2003.

Y es ya en 2005, a partir de una nueva recopilación de datos (Korte et al., 2005_1) cuando se publica el último modelo continuo global de campo geomagnético, que no es más que una mejora del modelo CALS3K.1 y un nuevo modelo válido para los últimos siete mil años. Estos dos nuevos modelos, publicados también por Korte y Constable (2005_2), son el CALS3K.2 (para los últimos tres mil años) y el modelo CALS7K.2 para los últimos siete mil años.

El modelo CALS3K.2 será estudiado con más detalle en el capítulo 7, ya que será usado en la modelización de las curvas paleoseculares de Europa.

4C Modelos regionales del campo geomagnético.

Cuando la densidad de datos se concentra en una determinada zona de la superficie de la Tierra, es más adecuada una representación regional del campo geomagnético. Estos modelos regionales tendrán solo validez para la región que abarca a los datos de entrada y es en esta región donde el modelo tendrá mayor resolución que cualquier modelo global, ya que

con los modelos regionales es posible la representación de menores longitudes de onda (mayor resolución).

Pero al pasar de una distribución esférica, como es el caso de los modelos globales, a una distribución delimitada, las funciones que describen los modelos globales (funciones asociadas de Legendre y funciones en seno y coseno) no constituyen una base de funciones apropiadas para el ajuste regional. Por lo cual, hay que desarrollar nuevas técnicas para poder aplicar las funciones base de modelos globales a modelos regionales.

Haines (1990a) proporciona una serie de métodos matemáticos para poder abordar el problema de la modelización del campo geomagnético y su variación secular en áreas regionales. Según él, podemos clasificar las diferentes técnicas de modelado regional en gráficas y analíticas.

Los modelos gráficos son los más antiguos. Éstos eran obtenidos representando las observaciones en un mapa y contorneándolas a mano. Más actualmente, a través de la informática se han podido generar algoritmos para la interpolación de mallas irregulares a mallas regulares, pudiéndose trazar posteriormente las isolíneas. En este caso, los valores de campo entre dos isolíneas tienen que calcularse a través de la interpolación sobre el mapa.

Las técnicas analíticas permiten obtener un modelo matemático que mejor se ajuste a los datos observados. Existen varias técnicas analíticas de modelización regional. A continuación esquematizamos los diferentes tipos de técnicas así como sus principales características:

1. Ajuste polinomial.

Es un método sencillo de ajuste de las componentes del campo geomagnético a una distribución polinomial en función de las coordenadas de los datos de observación. Se ha recurrido a esta técnica en numerosas ocasiones e incluso en la península Ibérica (Ardizone et al, 1998; Marín y Pavón Carrasco, 2006).

Básicamente se basa en relacionar un observable del campo geomagnético (como pueden ser las componentes X, Y o Z, o los valores angulares de declinación e inclinación, e incluso la variación secular de cualquiera de ellos) con las coordenadas del punto de observación a través de una función polinomial. Si denotamos la componente del campo como *E*, ésta vendrá dada por (Barraclough y Clarke, 1988):

$$E = e_0 + e_1(\theta-\theta_0) + e_2(\lambda-\lambda_0) + e_3(\theta-\theta_0)^2 + e_4(\theta-\theta_0)(\lambda-\lambda_0)^2 + e_5(\lambda-\lambda_0)^2 + \ldots \quad (4.1)$$

Siendo θ la colatitud y λ la longitud del dato y θ_0, λ_0 las coordenadas de un punto central de la distribución de datos (punto de referencia). Del mimo modo que las representaciones gráficas, esta técnica no contempla las altitudes de los datos de entrada. Además, las ecuaciones que se establecen para el modelo no satisfacen la ecuación de Laplace (3.3), pero se puede imponer parcialmente estableciendo que la componente radial del rotacional del campo sea cero (Haines, 1968).

2. Ajuste mediante armónicos esféricos ordinarios.

Otra posibilidad de modelización sería aplicar el método clásico de armónicos esféricos globales (método de Gauss) pero con datos de la región seleccionada. Ello puede

generar inestabilidades en el modelo, pues las funciones de Legendre no son ortogonales dentro de la región donde se analizan los datos de entrada. Esta inestabilidad puede ser corregida en algunos casos añadiendo una malla regular por todo el planeta obtenida a través de datos de modelos globales previos. El inconveniente viene dado por la longitud de onda, ya que al usarse armónicos ordinarios no mejorará las longitudes características de los modelos globales.

3. Análisis armónico rectangular.

El hecho de que en una determinada región no se verifique la ortogonalidad de las funciones asociadas de Legendre o de las funciones sinusoidales, hace que éstas se tengan que modificar para poder ser aplicadas a zonas restringidas de la Tierra. Una de estas modificaciones corresponde al análisis armónico rectangular (RHA, Rectangular Harmonic Analysis). Sus funciones base se obtienen tras aplicar la ecuación de Laplace (3.3) en coordenadas cartesianas al potencial magnético escalar, pudiéndose expresar éste en función de las coordenadas cartesianas, los índices del desarrollo (*n* y *m*) y en función de los parámetros que definen la región de estudio ($K_X = 2\pi/L_X$ y $K_Y = 2\pi/L_Y$, donde L_X y L_Y son las dimensiones de la región rectangular):

$$\begin{aligned} V(x,y,z) = Ax + By + Cz + \sum_{m=1}^{M}(a_0^m \cos(mx) + b_0^m \sin(mx)) \cdot e^{-K_X mz} + \\ + \sum_{n=1}^{N}(a_n^0 \cos(ny) + c_n^0 \sin(ny)) \cdot e^{-K_Y nz} + \\ + \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}(a_n^m \cos(mx)\cos(ny) + b_n^m \sin(mx)\cos(ny) + \\ + c_n^m \cos(mx)\sin(ny) + d_n^m \sin(mx)\sin(ny)) \cdot e^{-\sqrt{(K_X m)^2 + (K_Y n)^2} \cdot z} \end{aligned} \tag{4.2}$$

El método, estudiado en detalle por Alldredge (1981) presenta algunos inconvenientes. En concreto la convergencia del método de inversión no se da uniformemente dentro del intervalo de validez y sólo convergen en media (Haines, 1990b). Este hecho se debe a la no periodicidad de algunas de las funciones en la región de estudio, como es el caso de los términos en x, y o z de la expresión (4.2). Además estas funciones lineales hacen que no se cumpla la condición de contorno del potencial, ya que éste no tiende a cero cuando las coordenadas tienden a infinito.

A destacar también su uso limitado a regiones muy pequeñas de la superficie de la Tierra, ya que solo en este caso se puede aproximar la geometría esférica a la rectangular.

4. Análisis armónico ajustado.

Este método, introducido por De Santis en 1992 (De Santis, 1992), consiste en considerar un casquete esférico de semiángulo θ_0 en una región lo suficientemente pequeña en la que se pueda verificar para las colatitudes que $\sin\theta \approx \theta$. Para ello, se escalan los armónicos esféricos globales a todo el casquete, es decir que la colatitud pasa de de tomar cualquier valor entre los dos polos a tener valores entre 0º y el borde del casquete: θ_0.

Esta técnica, llamada también ASHA (Adjusted Spherical Harmonic Análisis), ha sido aplicada a datos geomagnéticos del sur de Italia por Chiappini et al. (1997).

5. Análisis armónico en un casquete esférico.

La técnica SCHA, como ya se indicó a lo largo del capítulo anterior, permite una representación del campo geomagnético a escala regional mediante el desarrollo de funciones bases en un casquete esférico. Al ser la técnica elegida en este Trabajo para la modelización del campo geomagnético, la desarrollaremos en capítulos posteriores.

A partir de su publicación en 1985 por Haines (Haines, 1985a), muchos de los trabajos en modelización regional se han llevado a cabo usando SCHA, no solo en el campo del Geomagnetismo, sino también en el caso de la Gravimetría. Con ella se pueden obtener modelos regionales del campo Principal, de la variación secular (o ambas cosas a la vez), de las anomalías magnéticas, de las corrientes eléctricas de la ionosfera, etc.

La primera aplicación de la técnica SCHA fue la modelización de anomalías de la componente vertical del campo (Haines, 1985b). Posteriormente ha sido aplicada para el análisis del campo Principal y anomalías en España (Torta, 1992), en China (An et al., 1992), Italia (De Santis et al., 1990), Polonia (Rotanova et al., 2000) y para todo el continente europeo (De Santis et al., 1989; Rotanova and Odintsov, 1999).

El primer modelo de variación secular a través de la técnica SCHA lo propone también Haines (1985c) aplicado a América del Norte y con datos de los observatorios y estaciones seculares a lo largo de 20 años. Basada en la misma técnica, Korte and Haak (2000) modelan la variación secular en Europa durante la segunda mitad del siglo XX. Torta et al. (2002) representan la variación secular en la Antártida para el período 1960 – 1998 mediante esta técnica.

Y en cuanto a modelos conjuntos, de campo Principal y de variación secular, fueron Haines y Newitt (1986) los que desarrollaron el primer modelo para Canadá. De forma análoga fue aplicado a España por Torta et al. (1993) usando datos de satélites, observatorios y estaciones seculares.

En 1997 se produce una mejora del método SCHA, al poderse aplicar simultáneamente al análisis del campo Principal y su variación secular a través del método de "diferencias del campo principal", reevaluándose de nuevo el campo en Canadá (Haines y Newitt, 1997). Esta nueva mejora fue adoptada por De Santis et al. (2002a) y Gaya-Piqué et al. (2004) para introducir el primer modelo regional de referencia para la Antártida.

Como vimos en el capítulo 3, existe la posibilidad de representar el campo de origen externo a través del desarrollo en armónicos esféricos del potencial magnético. En esta circunstancia es posible la modelización a través de SCHA de las corrientes inducidas en la superficie de la Tierra por variaciones magnéticas. Haines y Torta (1994) fueron los pioneros en este tipo de modelización evaluando las corrientes ionosféricas e inducidas por los cambios en el campo geomagnético. Posteriormente, Torta et al. (1997) usaron la técnica para poder analizar separadamente la contribución interna y externa del campo geomagnético analizando las corrientes ionosféricas sobre Europa.

También se ha aplicado la técnica SCHA para el modelo de otros campos, como el gravitatorio. En este ámbito hay que destacar el trabajo de De Santis y Torta (1997a) que proponen un modelo local de gravedad a través de SCHA.

En el *Anexo 2*, proporcionamos una tabla con una recopilación de diferentes trabajos relacionados con la técnica SCHA hasta la actualidad (Gaya-Piqué, 2004).

4_{C1} Desarrollo de la técnica SCHA

El método SCHA, como ya hemos descrito, en la resolución del potencial magnético escalar en un casquete esférico a través del análisis armónico. En este capítulo vamos a desarrollar brevemente todos los pasos que conlleva el modelado de un campo potencial, como es el c.m.t., mediante la técnica SCHA. El desarrollo en detalle de todos los pasos, así como los algoritmos necesarios para la modelización lo podemos ver en Haines (1985a) y Haines (1988).

Como se indica en la expresión (3.29), las componentes del campo magnético pueden ser dadas como una expansión en armónicos esféricos entorno al polo del casquete esférico. En esta expansión tenemos dos grupos de variables que se conocen: los valores de las componentes del campo X, Y y Z, y los armónicos esféricos junto con la parte radial, que son función solo de las coordenadas del punto.

Para poder resolver dichas ecuaciones es necesario conocer los coeficientes de Gauss, que ligan los parámetros (coordenadas) con los observables (componentes del campo geomagnético: X, Y y Z).

Para ello hay que tener en cuenta una serie pasos, que iremos resolviendo a continuación:

1. Las funciones asociadas de Legendre que forman los armónicos esféricos **no** son ordinarias, ya que como vimos poseen grado real.
2. Las coordenadas están referidas al polo del casquete, por lo que es necesario realizar un giro de coordenadas desde el polo norte geográfico al nuevo polo del casquete. Ello implica también que las componentes horizontales del campo (X y Y) deben de ser giradas. Pero antes, es necesario transformar las coordenadas y componentes del campo desde valores geodésicos a valores geocéntricos.
3. Tras aplicar los dos pasos anteriores ya estamos en condiciones de aplicar un método de ajuste para obtener los coeficientes de Gauss. En nuestro caso se usará el método de mínimos cuadrados bajo una serie de imposiciones estadísticas.

1. Cálculo de las funciones asociadas de Legendre.

Según Haines (1985a) la función asociada de Legendre de grado no entero viene expresada en función del grado *n*, el orden *m*, el parámetro de orden *k* y la colatitud, como:

$$P_n^k(\cos\theta) = K_n^m \sin^m\theta \cdot F\left(m-n, n+m+1; 1+m; \frac{1-\cos\theta}{2}\right) \qquad (4.3)$$

Siendo F una serie hipergeométrica o serie de Gauss y el parámetro K_n^m es una constante de normalización, cuyos valores en la forma semi-normalizada de Schmidt vienen dadas por:

$$K_n^m = 1 \quad , \text{si} \quad m = 0$$
$$K_n^m = \frac{2^{-m}}{(m\pi)^{1/2}} \left(\frac{n+m}{n-m}\right)^{\frac{n}{2}+\frac{1}{4}} p^{\frac{m}{2}} e^{e_1+e_2} \tag{4.4}$$

donde:

$$p = \left(\frac{n}{m}\right)^2 - 1$$
$$e_1 = -\frac{1}{12m}\left(1+\frac{1}{p}\right) \tag{4.5}$$
$$e_2 = \frac{1}{360m^3}\left(1+\frac{3}{p^2}+\frac{4}{p^3}\right)$$

La ecuación (4.3) puede obtenerse mediante recurrencia, dando lugar a una expresión de las funciones asociadas de Legendre para este caso:

$$P_n^m(\cos\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(m,n)\sin^{2k}(\theta/2) \tag{4.6}$$

y los términos A_k son definidos como:

$$A_0(m,n) = K_n^m \sin^m \theta$$
$$A_k(m,n) = \frac{(k+m-1)(k+m)-n(n+1)}{k(k+m)} A_{k-1}(m,n) \tag{4.7}$$

Se podría probar en (4.6) que si *n* es entero, la serie se podría truncar en un valor finito de *k*, obteniéndose el correspondiente polinomio de Legendre ordinario. En este caso, al tener un número infinito de términos, es necesario truncar la expresión en el termino donde se proporcionen tantas cifras significativas como previamente se decida a aceptar (De Santis, 1991). Además será necesario la derivada de las nuevas funciones de Legendre con respecto a la colatitud, pues ésta aparece en la expresión de la componente Norte, X (ver 3.29):

$$\frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta} = \frac{\sin\theta}{2}\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot A_k(m,n)\sin^{2(k-1)}(\theta/2), \quad \text{para} \quad m = 0$$
$$\frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta} = \frac{m\cos\theta}{\sin\theta} P_n^m(\cos\theta) + \frac{\sin\theta}{2}\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot A_k(m,n)\sin^{2(k-1)}(\theta/2), \text{ cuando} \quad m \neq 0 \tag{4.8}$$

Para el cálculo de dichas funciones, Haines (1988) desarrolló una rutina informática. Pero el cálculo se hace complicado cuando el valor de la colatitud aumenta o cuando queremos alcanzar valores mayores de $n_k(m)$. La rutina propuesta por Haines fallaba en este sentido, es decir, que para un cierto valor de $n_k(m)$ o de colatitud θ, la función se hacía inconsistente y divergía (Ver figura 4.4). La normalización aplicada a las funciones de Legendre es la normalización de Schmidt.

Fue en 2002 cuando Thébault et al., aplicaron otra herramienta matemática para calcular las funciones de Legendre de grado no entero. Para ello aplicaron el algoritmo de Olver y Smith (1983), consistente en un aumento del rango de precisión en el cálculo de las funciones.

La consecuencia ha sido la mejora sustancial de la técnica SCHA, ya que con esta nueva rutina se permite evaluar con mayor precisión los valores de $n_k(m)$.

Los parámetros que definen las funciones de Legendre: k, m, $n_k(m)$ y θ_0 son fundamentales para la técnica SCHA. Para un orden m dado, el valor de n es mayor a menor tamaño del casquete, y análogamente, para un casquete fijo, n aumenta al aumentar el valor del índice k (o m); esto lo podemos ver gráficamente en la figura 4.5, donde se representa algunos valores de n para un k fijo (m = 0, 1,…k) y para diferentes tamaños del casquete; así como para un casquete fijo y valores crecientes de k.

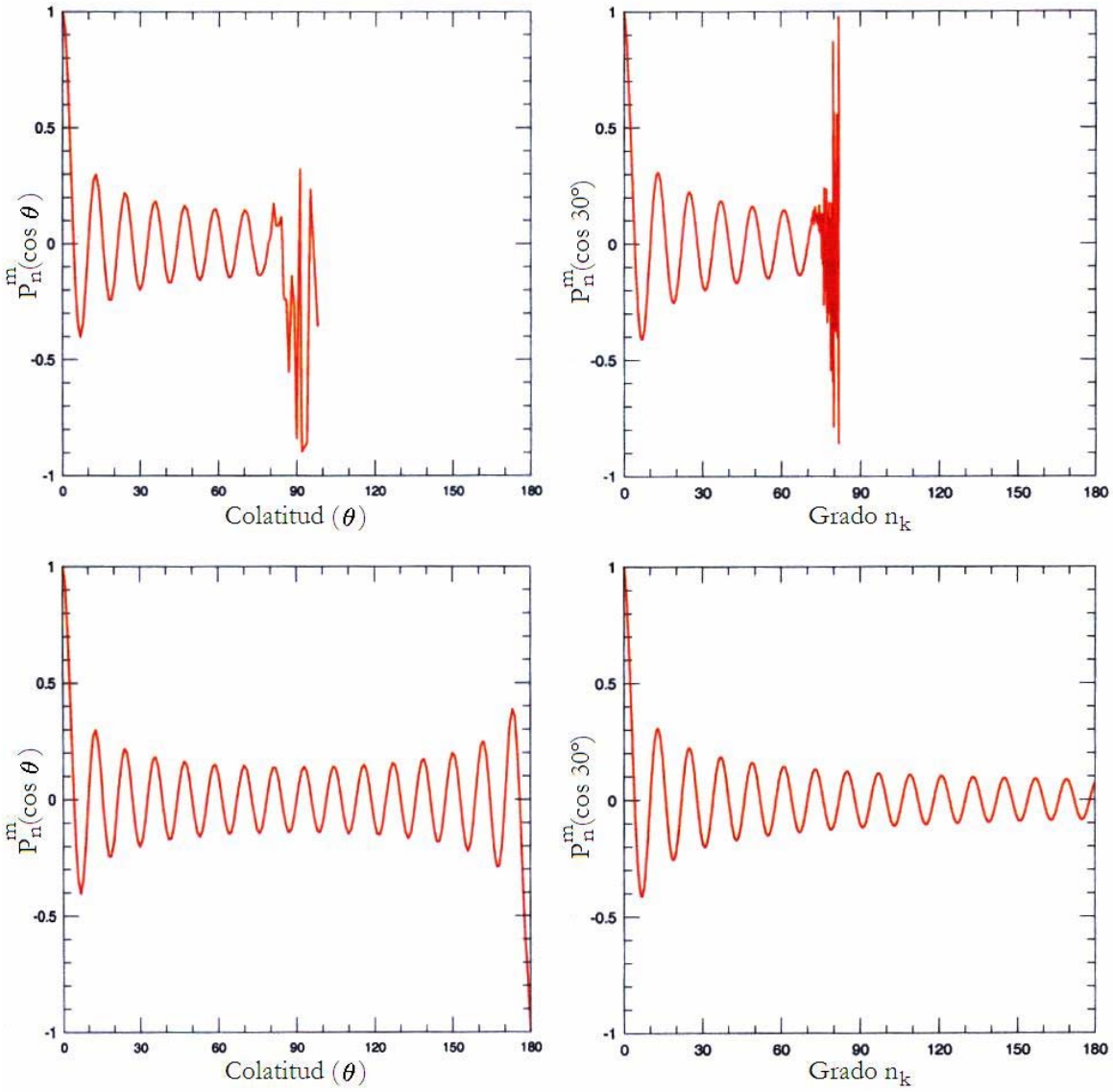


Figura 4.4. Arriba: función de Legendre obtenida por el método desarrollado por Haines en 1988 (izquierda, para un n y m fijo; derecha, para un θ_0 fijo). Abajo: mismo análisis, pero con la nueva técnica de Thébault et al., 2002. Figura de Gaya-Piqué, 2004.

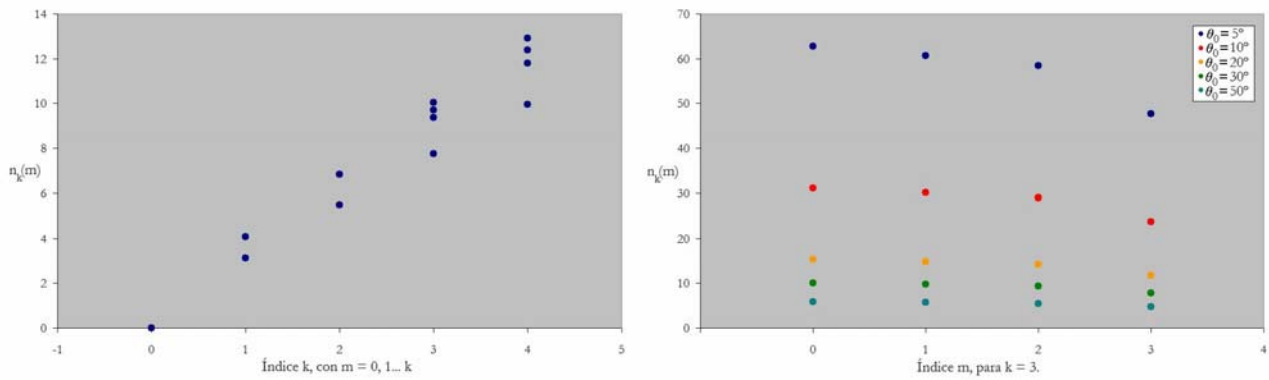


Figura 4.5. A la izquierda, representación de n frente *k* (*m* = 0, 1,…k) para un θ_0 fijo. Derecha, representación de *n* frente a *m* para valores distintos de θ_0.

2. Conversión de coordenadas.

Ya que los datos arqueomagnéticos que vamos a usar son tomados en la superficie de la Tierra es necesario transformar sus coordenadas geodésicas (coordenadas sobre el geoide de referencia) a geocéntricas, hecho que afecta también a la componente norte, X, y vertical, Z, del campo geomagnético. En la figura 4.6 vemos un esquema de los parámetros a transformar y los transformados.

A continuación hay que girar, tanto coordenadas y componentes geocéntricas más la longitud y componente Este del campo, Y, para referirlas al centro del casquete. Queda ajeno al giro la componente radial, *R*, y la componente vertical del campo, *BV*.

Teniendo en cuenta la notación dada en la figura 4.7, podemos aplicar las ecuaciones del giro (De Santis y Kerridge, 1989):

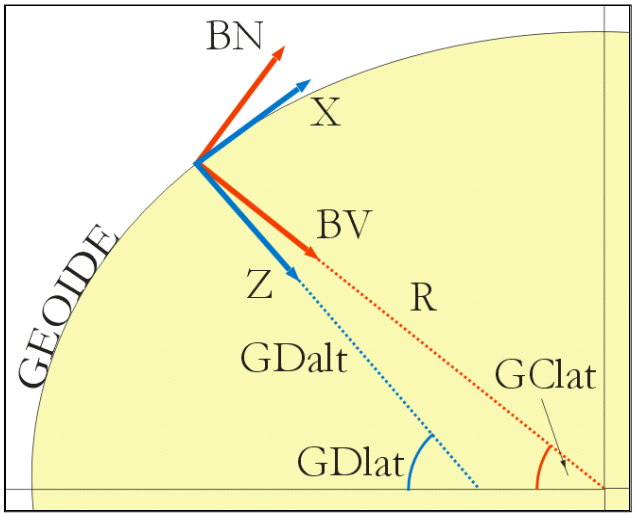


Figura 4.6. Conversión de coordenadas geodésicas a geocéntricas. GDlat, GDalt, GClat y R son la latitud, altitud geodésica y latitud, altitud geocéntrica respectivamente. X y Z corresponden a las componentes del campo norte y vertical en geodésicas y sus análogas BN y BV en geocéntricas

$$\cos\theta' = \cos\theta_0 \cos\theta + \sin\theta_0 \sin\theta \cos(\lambda - \lambda_0)$$
$$\mathrm{tg}(\pi - \lambda') = \frac{\sin\theta \sin(\lambda - \lambda_0)}{\sin\theta_0 \cos\theta - \cos\theta_0 \sin\theta \cos(\lambda - \lambda_0)} \qquad (4.9)$$

donde θ' y λ' son las coordenadas del punto en el nuevo sistema de referencia, mientras que θ y λ son las coordenadas en el sistema de referencia anterior. Y θ_0 y λ_0 las del polo del casquete en el sistema de referencia anterior.

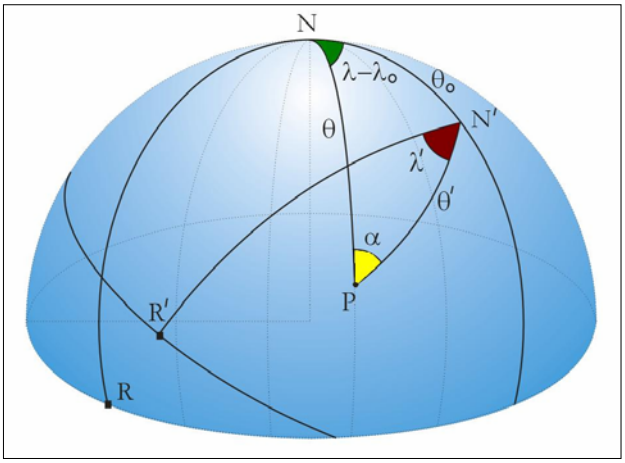


Figura 4.7. Cambio de sistema de referencia, del polo norte geográfico al nuevo polo del casquete.

Tras obtener el valor del ángulo que forma la componente Norte antes y después del giro, que denotaremos por α, podemos aplicar una matriz de giro a las componentes horizontales del campo (*X* y Y), obteniendo dichas componentes referidas al nuevo polo o centro del casquete (*X'* y *Y'*):

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \tag{4.10}$$

Cuando un punto de entrada coincide con el centro del casquete nos encontramos ante un punto singular que hay que hacerlo notar en el programa de cálculo imponiendo en este caso que la colatitud y longitud referidas al centro del casquete son nulas. De la misma forma, cuando los datos se encuentren cerca del polo, es necesario aumentar la precisión numérica para una correcta conversión de coordenadas y componentes.

3. Ajuste de los datos a un modelo SCHA.

Tras la realización de los pasos anteriores, estamos en la situación de poder aplicar la técnica SCHA a dichos datos y poder obtener un modelo que se ajuste a los mismos. Será necesario además, dependiendo de las características de los datos y del tipo de campo escalar a modelar, que se establezcan los parámetros del modelo: $K_{máx}$ y θ_0.

Con ello, y según la expresión (3.29), para obtener un modelo hay que obtener aquellos coeficientes de Gauss que mejor ajustan los datos de entrada (coordenadas de los datos) con los observables de entrada (componentes del campo geomagnético). Para una convergencia del proceso de ajuste es necesario que el número de datos de entrada sea mayor que el número de coeficientes de Gauss que definen el modelo.

Una de las herramientas matemáticas que podemos usar para obtener dicho ajuste es el método por mínimos cuadrados, donde los parámetros del modelo vienen dados por los índices de las funciones de Legendre y la matriz de funciones base está formada por las expresiones que agrupan las dependencias angulares y radial que aparecen multiplicando a cada coeficiente. Así, cada observable puede expresarse como combinación lineal de las

funciones base a través de los coeficientes de Gauss, que son las llamadas ecuaciones de condición o ecuación normal.

Para ello es necesario realizar la inversión de una matriz generalizada formada por las funciones base. La técnica usada en nuestro caso viene descrita en por Haines (1988) basada en una regresión por mínimos cuadrados por aproximaciones sucesivas, donde se le asigna un valor estadístico para definir el grado de significancia (grado del ajuste) deseado (Draper y Smith, 1981). Dicho parámetro estadístico es el nivel F de la estadística de Fisher. En otras palabras, se realiza una serie de iteraciones en la cual se van eliminando los coeficientes cuyo nivel F no supere uno dado. Ello se hace para eliminar aquellos coeficientes que puedan generar inestabilidades durante el proceso de ajuste (De Santis, 1991) y solo considerar aquellos que son estadísticamente significativos. Un valor típico de F es aproximadamente 4 (3,84), que corresponde a un nivel de significancia del 5% cuando el número de observaciones es grande.

El desarrollo, tanto de las rutinas como del programa informático desarrollado en Fortran, se puede encontrar en Haines (1988). Y para un mejor conocimiento del proceso de mínimos cuadrados aplicados en este método, se puede consultar: *"Mathematical Methods for Digital Computers"* (Efroymson, M.A., 1967, Volumen 1, capítulo 17).

4. SCHA espacio – temporal.

Hasta ahora hemos desarrollado toda la técnica SCHA sin tener en cuenta una contribución temporal. En el caso de campos potenciales estáticos, como es el caso del campo gravitatorio, no es necesario incluir la parte temporal en las expresiones del potencial; pero en el caso del campo geomagnético, cuyas variaciones temporales ya analizamos en el apartado segundo, se hace necesaria la contribución temporal para un mejor análisis del mismo.

Además, teniendo en cuenta que el objeto de estudio de este presente trabajo es la variación secular del campo geomagnético, se hace necesario introducir el tiempo en las expresiones anteriormente desarrolladas.

Introducir la parte temporal en todo lo que hemos desarrollado hasta ahora no es muy complejo, ya que dicha función temporal solo afectará a uno de los elementos característicos que definen el potencial, que corresponde a los coeficientes de Gauss. Simplemente identificaremos los coeficientes de Gauss estáticos (dados en por la expresión 3.25): g_k^m y h_k^m con otros que dependan del tiempo de la forma (Haines, 1995a, 1988):

$$g_k^m(t) = \sum_{q=0}^{Q_{máx}} g_{k,q}^n \cdot f_q\left(\frac{t-t_0}{T}\right); \quad h_k^m(t) = \sum_{q=0}^{Q_{máx}} h_{k,q}^n \cdot f_q\left(\frac{t-t_0}{T}\right) \qquad (4.11)$$

siendo t_0 el tiempo inicial, T el incremento de tiempo característico y t el valor en un instante dado. La función f puede ser cualquier función temporal que elijamos, ya sean polinomios de Legendre temporales, series de Fourier, o series en función del seno o del coseno (Haines, 1988). En nuestro caso vamos a elegir una función polinomial cúbica.

$$f_q(t) = \left(\frac{t-t_0}{T}\right)^q \qquad (4.12)$$

con valores de q = 0, 1, 3, 5, …

5. Evolución temporal del Campo Geomagnético: Paleomagnetismo y arqueomagnetismo. Curvas de Variación Paleosecular (CVPS).

5_A Breve introducción al Paleomagnetismo y Arqueomagnetismo.

El Paleomagnetismo es la disciplina que, enmarcada dentro del Geomagnetismo, se encarga del estudio del campo geomagnético en el pasado. El hecho de que se pueda estudiar el pasado de un campo potencial, se debe a que el campo geomagnético al contrario de otros campos, como el gravitatorio, puede quedar grabado en las rocas a través de varios procesos que describiremos a lo largo de este capítulo. Ello ha hecho posible permitir una mejor comprensión de los mecanismos de generación del campo geomagnético de origen interno y sus características.

En el capítulo 2_A se mencionó que los estudios de la imanación remanente en las rocas, llevado a cabo por Dellese (1849) y Melloni (1853), permitieron concluir que los materiales calentados y después enfriados en presencia del c.m.t. retienen información de este último. A partir de estos resultados, en 1904 y 1906, David y Brunhes, respectivamente, analizaron la imanación en flujos de lava, para comparar sus resultados con el de las rocas que fueron calentadas por la propia lava. El resultado fue que las rocas estaban imanadas en la misma dirección que las lavas, pero con una peculiaridad, y es que la dirección era contraria al campo magnético presente, por lo que indicaron la posibilidad de que el campo geomagnético sufriera inversiones. Si esta teoría fuese plausible tenía que verificarse que rocas de la misma edad que las estudiadas, distribuidas por toda la Tierra, tenían que presentar también una polaridad invertida. Fue Mercanton, en 1926, el que analizó varias rocas de diferentes lugares, comprobando que alguna de ellas sí que presentaban polaridad invertida. Confirmando, así, la teoría de las inversiones del campo geomagnético.

Los primeros estudios de la variación secular por medio de investigaciones paleomagnéticas fueron llevados a cabo por Chevalier en 1925 en coladas volcánicas del Monte Etna. Su estudio se potenció a través del desarrollo del arqueomagnetismo y del estudio paleomagnético de sedimentos lacustres. Éstos últimos han proporcionado valores de las componentes del c.m.t. para épocas anteriores al período histórico (Mackereth, 1958; Creer, 1972).

Para una mejor comprensión de la teoría y de los métodos del análisis paleomagnético, leer por ejemplo los textos básicos de Butler (*Paleomagnetism*, 1992) o Tauxe (*Lectures in Paleomagnetism*, 2005). En ellos se desarrollan todos los fundamentos físicos en los que se basa dicha disciplina y se describen tanto las técnicas de laboratorio, como los análisis estadísticos. Aquí, en este trabajo, se desarrollarán sólo algunos de los aspectos fundamentales necesarios para la compresión del mismo.

Los materiales aptos para paleomagnetismo tienen una imanación remanente natural (NRM, Natural Remanent Magnetisation), que es suma de todas las posibles imanaciones que ha podido adquirir el material a lo largo de su historia, ya sean imanaciones debidas a procesos geológicos o al resultado de estar sometidos al c.m.t. actual.

Esta imanación se considera la suma (suma vectorial, ya que la imanación es un vector) de una posible magnetización primaria más otras secundarias. La primaria es la adquirida por

la roca en su formación y las secundarias están relacionadas con procesos físico-químicos posteriores.

Entre los posibles mecanismos de adquisición de remanencia magnética, vamos a analizar la que en mayor medida afecta a los materiales arqueológicos. Es la remanencia térmica o termorremanencia (TRM, Termal Remanent Magnetisation).

Cuando un material está sometido a altas temperaturas por encima del punto de Curie, los minerales ferromagnéticos contenidos en el material cambian su estado magnético, pasando a ser súperparamagnéticos. En este estado, un campo magnético pequeño (como lo es el c.m.t., cuya intensidad máxima no alcanza las 60 μT) es capaz de orientar los momentos magnéticos atómicos de los minerales. Cuando el material se enfría por debajo de la temperatura de bloqueo (que depende del tamaño de grano) la imanación inducida se bloquea, adquiriendo el material una magnetización remanente térmica o termorremanencia. Esta remanencia es muy estable y solo desaparece cuando calentamos de nuevo al material a temperaturas mayores de la de Curie o aplicando un campo magnético particularmente intenso.

El arqueomagnetismo se centra en el análisis paleomagnético de materiales de origen arqueológico. La primera publicación de análisis arqueomagnético fue hecha en Italia por Gheradi en 1862: "Sul magnetismo polare de palazzi ed altri edifizi in Torino". Posteriormente Folgerhaiter, en 1899, analizó la remanencia en ladrillos y cerámicas, dando las primeras pinceladas de lo que son hoy las bases del arqueomagnetismo. Posteriormente, en Francia, Thellier desarrolló las técnicas arqueomagnéticas analizando la variación secular en Francia en los últimos dos milenios (Thellier, 1937, 1938, 1981; Thellier y Thellier 1952, 1959). Estudios que siguieron en 1958 Cook y Belshé en Reino Unido.

En los yacimientos arqueológicos podemos encontrar estructuras que han sido calentadas para su uso, como son el caso de termas (figura 5.1), hornos, hogares, etc. O bien, calentadas accidentalmente como incendios.

Figura 5.1. Terma romana muestreada en el Castro Chao Samartín, Asturias.

El calentamiento de la estructura actúa también sobre los minerales ferromagnéticos que contiene. Cuando estas estructuras se enfrían, la imanación de los minerales ferromagnéticos se orienta en la dirección del campo geomagnético local. Si se quieren hacer estudios de direccionalidad es necesario que a lo largo del tiempo hasta su muestreo estas estructuras hayan permanecido "in situ", ya que un basculamiento de las mismas puede producir cambios importantes en la orientación del momento magnético remanente. No ocurre lo mismo si se pretende hacer análisis de la intensidad, ya que la posición de la estructura en este caso no es importante.

Si en una región, no mayor de 10^6 km^2 (Tarling, 1983), hay un suficiente número de yacimientos arqueológicos de edades diferentes, podemos conocer como ha ido cambiando la

dirección del c.m.t. a lo largo de la Historia. Con estos datos es posible la construcción de una curva de referencia que describa la variación temporal de las componentes angulares, declinación e inclinación. A dicha curva la llamamos Curva de Variación Paleosecular (CVPS). Y será una curva característica de la región de estudio, no extrapolable fuera de ella debido a las características del campo geomagnético y su carácter no dipolar. Aparecen así las CVPS característica de cada región. Curvas que existen ya en varios países de Europa y que posteriormente serán analizadas.

El hecho de tener una CVPS bien definida en el tiempo permite actuar de forma inversa, es decir, que si conocemos la dirección en declinación e inclinación de una estructura arqueológica pero no su edad, con la curva podríamos evaluar la fecha de su último enfriamiento (es decir, de su último uso). Se trata, por tanto, de una técnica de datación arqueológica relativa, ya que se comparan los valores direccionales con los de la curva de referencia. Pero para ello es necesario que las curvas estén bien definidas y ello solo es posible con aportaciones de declinación e inclinación de yacimientos bien datados cronológicamente.

La mayor fuente de error en estos estudios son errores direccionales debido a la orientación de las muestras o a posibles basculamientos de las mismas. Pequeñas variaciones en la posición de la estructura pueden generar errores apreciables en la dirección del c.m.t. En cuanto a la datación relativa de las curvas aparece el error de unicidad, ya que un par de valores declinación e inclinación, pueden dar lugar a edades distintas. Aunque en este caso se puede imponer criterios adicionales para descartar una de ellas. Otro error a considerar será el que se introduce al trasladar los datos direccionales *in situ* hasta el punto de referencia de la curva (ya sea para compararla con ella o para ser usado en su construcción). Este error de corrección geográfica será analizado en el apartado siguiente.

5_B Criterios arqueomagnéticos, conversión vía polo y construcción de la CVPS.

Para la selección de un yacimiento arqueológico es necesario recurrir al carácter multidisciplinar que presenta el arqueomagnetismo, ya que serán los arqueólogos los que determinen esta primera fase de selección. Se intenta buscar una distribución espaciotemporal de yacimientos lo más amplia posible.

Se pueden establecer dos tipos de requisitos, unos *a priori*, estableciendo las características que deben cumplir las estructuras arqueológicas para su muestreo; y otros *a posteriori*, que definen las características que deben de satisfacer los resultados direccionales teniendo en cuenta los valores estadísticos de su cálculo.

En cuanto el primer tipo de selección, las principales características que deben de verificar unas estructuras arqueológicas para ser muestreadas son (Núñez, 2005):

- Que hayan sido calentados hasta temperaturas del orden de 600ºC o superiores; es decir, hornos, termas, hogares, edificaciones incendiadas, ect. Aunque calentamientos menores (de hasta 200 – 300º) también pueden ser investigados.
- Que no hayan sufrido calentamientos posteriores.
- Los materiales calentados en el pasado que hayan permanecido *in situ*, es decir, que no hayan sufrido movimientos importantes (derrumbes, basculamientos, ect) desde el último calentamiento.
- Que la estructura esté bien datada (por criterios arqueológicos o por otras técnicas).

Tras el muestreo son necesarios una serie de pasos (preparado de muestras, trabajo de laboratorio y cálculos direccionales) para obtener los valores de declinación – inclinación o de intensidad que han quedado "grabados" en la estructura. Estos parámetros que definen el c.m.t. en el pasado serán usados en la construcción de la CVPS. Para ello, sin un modelo de campo magnético, es necesario realizar el traslado de los valores de declinación e inclinación desde el lugar de muestreo hasta el punto donde se vaya a definir la curva, es lo que se llama corrección geográfica. Ello se puede hacer si los puntos de muestreo no distan más allá de 600 – 900 km del punto central (Tarling, 1983). Si la distancia es pequeña (< 10 – 15 km) el error que se comete es mínimo y podemos ignorar la corrección, pero si consideramos distancias mayores, como las indicadas, si que se hace necesario aplicar la corrección.

Uno de los primeros métodos de corrección solo consideraba el valor de inclinación y lo trasladaba desde el punto origen al punto de referencia de la curva en función de las latitudes de origen, λ_S, y de destino, λ_R, usando la expresión (Aitken, 1974; Thellier, 1981):

$$I_R = I_S + \mathrm{atg}(2\mathrm{tg}\lambda_R) - \mathrm{atg}(2\mathrm{tg}\lambda_S) \qquad (5.1)$$

Así se obtiene el valor de la inclinación en el punto de referencia, I_R, en función de la inclinación in situ, I_S.

Existe otro método más riguroso donde se corrigen los dos valores angulares del c.m.t., declinación e inclinación. Es el "Método de Conversión Vía Polo" propuesto por Noel y Batt (1990). Para ello se asume la dipolaridad del campo geomagnético y a través de los datos de declinación e inclinación in situ, y asumiendo un campo dipolar, se calcula el polo magnético virtual que generarían esos valores. Después de calcular el polo, se calcularía en las coordenadas de referencia los valores de declinación e inclinación que proporcionan el dipolo (ver figura 5.2).

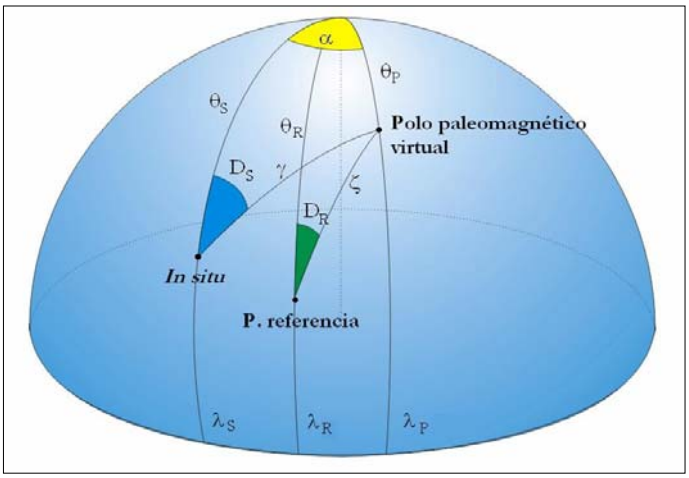


Figura 5.2 Esquema del método de conversión vía polo.

Teniendo en cuenta la notación usada en la figura 5.2, podemos calcular las coordenadas del polo magnético virtual usando razones trigonométricas esféricas:

$$\theta_P = \mathrm{a}\cos(\cos\theta_S \cos\gamma + \sin\theta_S \sin\gamma \cdot \cos D_S)$$
$$\lambda_P = \begin{cases} \lambda_S + \alpha & \text{si,} \quad \cos(\gamma) \geq \cos\theta_S \cos\theta_P \\ \lambda_S + \pi - \alpha & \text{si,} \quad \cos(\gamma) < \cos\theta_S \cos\theta_P \end{cases} \qquad (5.2)$$

Siendo γ la colatitud del lugar in situ referida al polo, que se obtiene asumiendo la hipótesis del dipolo axial y α la diferencia entre longitudes:

$$\mathrm{tg}\gamma = \frac{2}{\mathrm{tg}I_S} \quad ; \quad \sin\alpha = \frac{\sin\gamma \cdot \sin D_S}{\sin\theta_P} \tag{5.3}$$

A partir de las coordenadas del polo, obtenemos los valores de declinación e inclinación en el lugar de referencia:

$$\begin{aligned} I_R &= \mathrm{atg}\left(\frac{2}{\mathrm{tg}\zeta}\right) \\ D_R &= \mathrm{a}\sin\left(\frac{\sin\theta_P \cdot \sin(\lambda_P - \lambda_R)}{\sin\zeta}\right) \end{aligned} \tag{5.4}$$

Siendo ζ la colatitud del punto de referencia respecto del polo virtual:

$$\zeta = \mathrm{a}\cos(\cos\theta_R \cos\theta_P + \sin\theta_R \sin\theta_P \cdot \cos(\lambda_P - \lambda_R)) \tag{5.5}$$

Si evaluamos el error que se cometería al considerar la corrección vía polo en la actualidad, éste es menor de 1º en declinación e inclinación para distancias menores de 600 km y no mayores a 3º en radios de 900 km (Gómez Paccard et al., 2006). En la figura 5.3 se representa el error que se comete al trasladar los datos que proporciona el IGRF 2005 (IAGA,2005) en la península a un punto de referencia: Madrid (40.4º N, -3.70º E).

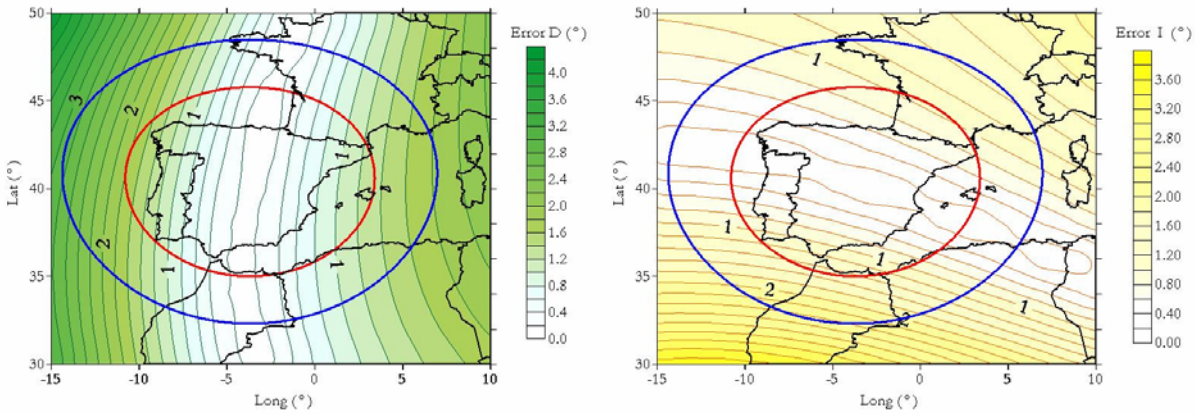


Figura 5.3. Mapa de errores en la corrección Vía polo. Izquierda, declinación y derecha, inclinación. Diferencia entre valores generados por IGRF para 2005.0 (IAGA, 2005) y la correspondiente consideración dipolar considerando como referencia las coordenadas de Madrid. El círculo rojo indica una distancia de 600 km y el azul de 900 km entorno al punto de referencia.

Los pasos a seguir desde la elección de un yacimiento arqueológico hasta la obtención de la dirección del c.m.t. en el lugar de muestreo se ha esquematizado en la figura 5.4. Pueden resumirse en:

- *Paso 1.* Elección del yacimiento arqueológico con estructuras válidas para su estudio arqueomagnético.
- *Paso 2.* Muestreo de dichas estructuras, teniendo en cuenta su constitución. Si son de un material bien consolidado, podemos taladrarlo y extraer las muestras. Si no están tan

consolidados será necesario aplicar otras técnicas de extracción (usando placas de escayola para ello).
- *Paso 3*. Orientación de las muestras in situ a través de una brújula magnética o solar y un inclinómetro.
- *Paso 4*. Tratamiento, preparación de las muestras y clasificación.
- *Paso 5*. Trabajo de laboratorio. Desimanación sistemática por campos alternos decrecientes o térmicamente. Realización de experimentos de magnetismo de rocas que indican la mineralogía magnética responsable de la magnetización
- *Paso 6*. Análisis de las componentes remanentes y aislamiento de la componente característica. Cálculos estadísticos direccionales.
- *Paso 7*. Es el último paso, donde se obtiene la dirección media de un sitio muestreado con sus respectivos parámetros estadísticos.

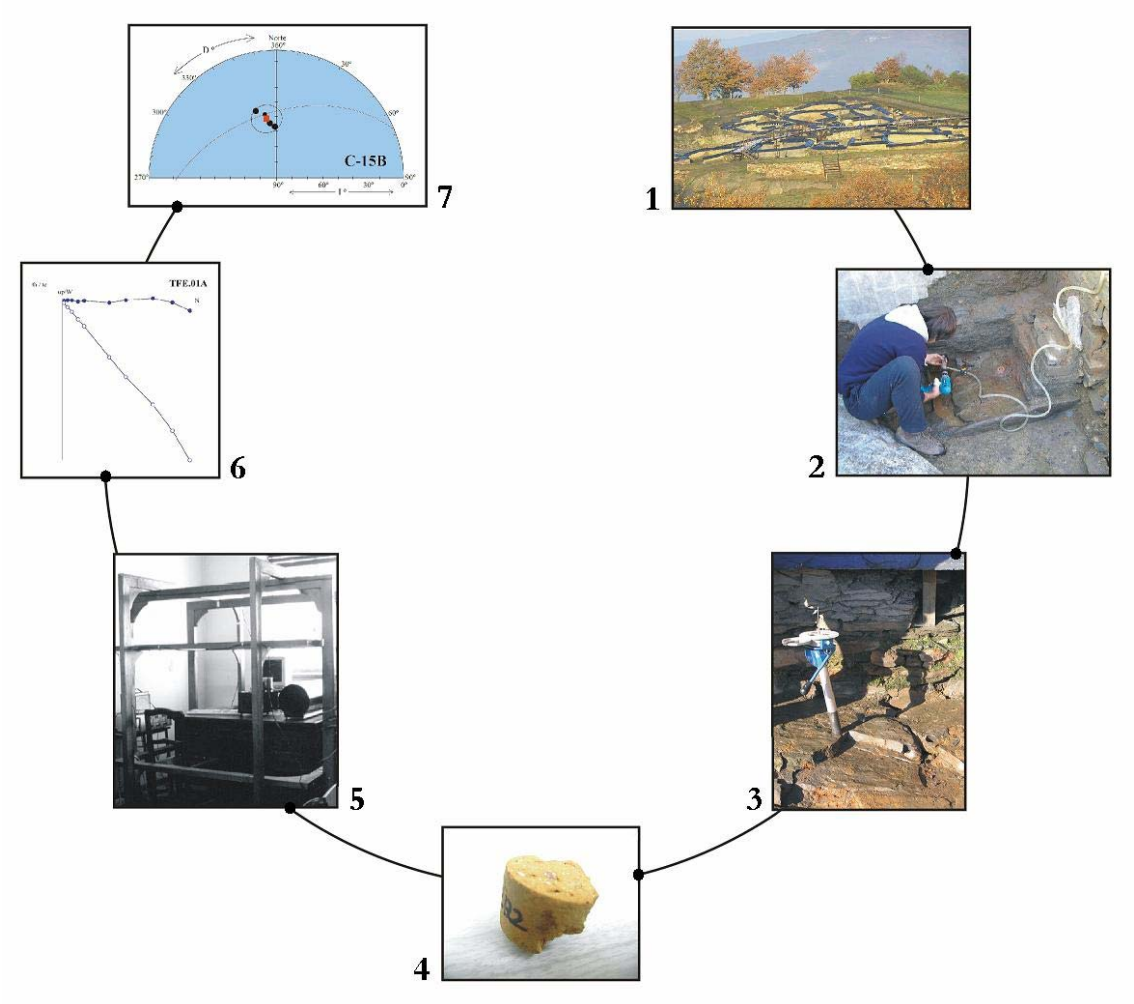


Figura 5.4. Diagrama de los pasos a seguir para la obtención de las componentes direccionales remanentes en estructuras arqueológicas.

En el *Anexo 3*, se adjunta el artículo: *"Estudio arqueomagnético de seis estructuras en el Chao Samartín, Asturias"*. Pavón Carrasco et al., 2006. Donde se analizan detalladamente todos lo pasos expuestos en la figura 5.4.

Después de obtener la dirección del c.m.t. *in situ*, ésta podrá ser trasladada al lugar de referencia para la construcción de la propia curva o bien ser usada *in situ* para otros fines. Pero,

para poder utilizar estos datos con fiabilidad es necesario que se verifiquen una serie de requisitos *a posteriori*.

Existen diferentes criterios de fiabilidad o de clasificación de la "bondad" del dato arqueomagnético. Un ejemplo de estos criterios viene dado en Tarling y Dobson (1995) donde se clasifican los resultados en categorías de 0 a 5. Nuñez (2005) establece los siguientes requisitos para determinar que estructuras de la base de datos paleomagnéticos serán utilizadas en la construcción de la curva paleosecular de Iberia:

- Que el número de muestras o testigos investigados sea mayor a 7: N > 7.
- Que el semiángulo de confianza α_{95} sea menor a 4º.
- Que los errores cronológicos no sean mayores de ± 75 años.

Lo que equivale a las categorías 4 y 5 definidas por Tarling y Dobson (1995).

5C Base de datos arqueomagnética actual de Europa y CVPS.

Algunos países europeos tienen una larga tradición en arqueomagnetismo, como Francia, Gran Bretaña y Bulgaria. Lo que se traduce en que en estos países hay una gran densidad espacial de datos direccionales del campo magnético a lo largo de varios milenios. En la figura 5.5a se representan los yacimientos investigados en Europa Occidental hasta el año 1998. En estos trabajos se han obtenido datos direccionales del c.m.t. La densidad de información sobre la intensidad del campo magnético es muy inferior. En la figura 5.5b se representan los datos existentes en la actualidad en Iberia y áreas vecinas durante los últimos tres mil años (Gómez-Paccard, 2006). Una de las regiones que dispone de una mayor densidad de datos de paleointensidad es Bulgaria (Kovacheva et al., 1998).

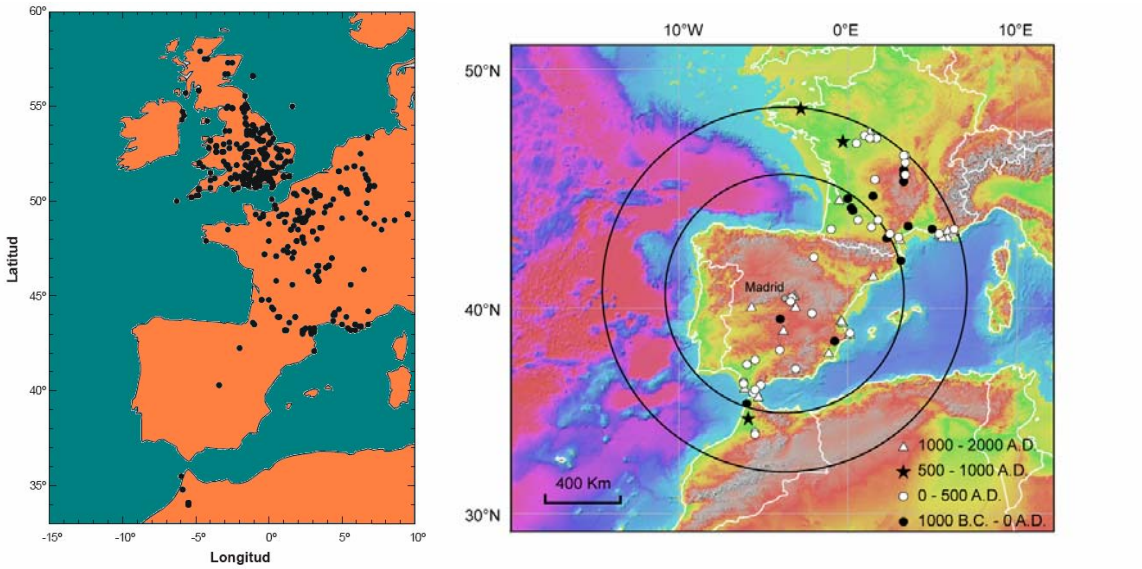


Figura 5.5. a) Izquierda: distribución geográfica de estudios arqueomagnéticos en Europa Occidental hasta 1998. (Núñez, 2005). b) Derecha: distribución de estudios en Iberia y zonas próximas (Gómez-Paccard, 2006)

Estas buenas condiciones si se comparan con el resto del mundo han sido mejoradas en los últimos años gracias al proyecto AARCH financiado por la Unión Europea (Archaeomagnetic Applications for the Rescue of Cultural Heritage). En el proyecto colabora

una red de 12 laboratorios de Paleomagnetismo y Arqueomagnetismo repartidos por Europa. Como resultado, han sido construidas las curvas de variación paleosecular en aquellos países donde no existían y se han obtenido nuevos datos en el resto de países con una cultura arqueomagnética mayor. Así pues estamos en las mejores condiciones para usar estos datos espacio – temporales y hacer un análisis del comportamiento del campo geomagnético en Europa.

En este trabajo se presenta la primera aproximación del modelado del c.m.t. en la región europea (para los dos últimos milenios) por medio de la técnica del análisis de casquetes esféricos (SCHA). Los datos de entrada que se utilizarán son proporcionados por las curvas paleoseculares actuales. Esto tiene asociado sus ventajas e inconvenientes. La ventaja es que al considerar las CVPS como datos de entrada, tenemos una distribución temporal continua en cada punto de referencia de la curva y un suavizado de los datos, pero la desventaja es que los datos no han sido considerados *in situ*, ya que fueron trasladados desde el lugar de muestreo al punto de referencia sobre el que se ha construido la curva. Y esto, como hemos visto, introduce errores. Pero para una primera aproximación las ventajas son mayores que los inconvenientes. En un futuro próximo se abordará el problema con la distribución de datos *in situ*.

Cinco son las CVPS que se han analizado y serán usadas para el modelo del c.m.t. (figura 5.6). Éstas corresponden a Bulgaria (Kovacheva et al., 1998), Francia (Gallet et al., 2002), Alemania (Schnepp et al., 2005), Hungría (Marton et al., 2006) e Iberia (Gómez-Paccard et al., 2006b).

5_{C1} CVPS de Iberia.

Se han utilizado recientemente dos tesis doctorales en España sobre arqueomagnetismo (Núñez, 2005; Gómez-Paccard, 2006) que han proporcionado datos arqueomagnéticos direccionales recopilados en un primer catálogo de datos arqueomagnéticos de Iberia (Gómez-Paccard et al., 2006a). Estos datos, junto con una selección de datos procedentes del Sur de Francia y del Norte de Marruecos (en total 134) han permitido obtener la primera curva de Variación Secular de Iberia, centrada en Madrid (Gómez-Paccard et al., 2006b).

De Francia han sido usados aquellos datos (Gallet et al., 2002; Moutmir, 1995; Chauvin et al., 2000) que quedaban circunscritos dentro de un círculo de 900 km de radio con centro en Madrid (punto de referencia de la curva: 40.4° N, 3.7° W). Del Norte de Marruecos, se han utilizado los datos direccionales aportados por Kovacheva (1984) y Najid (1986).

Para la construcción de la CVPS se han considerado dos set de datos: los primeros, corresponden a localizaciones interiores a una circunferencia de 600 km y en un segundo set, los correspondientes hasta un radio de 900 km. Considerar 600 km de radio se debe a que en la superficie circular que define, el campo geomagnético tiene una gran contribución dipolar (Tarling, 1983), no introduciendo grandes errores al trasladar los datos desde el lugar de muestreo hasta el punto de referencia mediante el método vía polo. El error, obviamente, aumenta cuando se amplia la región.

La base de datos primera (600 km) contiene un total de 78 direcciones, donde se han seleccionado aquellos que tuvieran un α_{95} menor a 5º. Mientras que el segundo sets de datos (900 km) aporta 56 direcciones más.

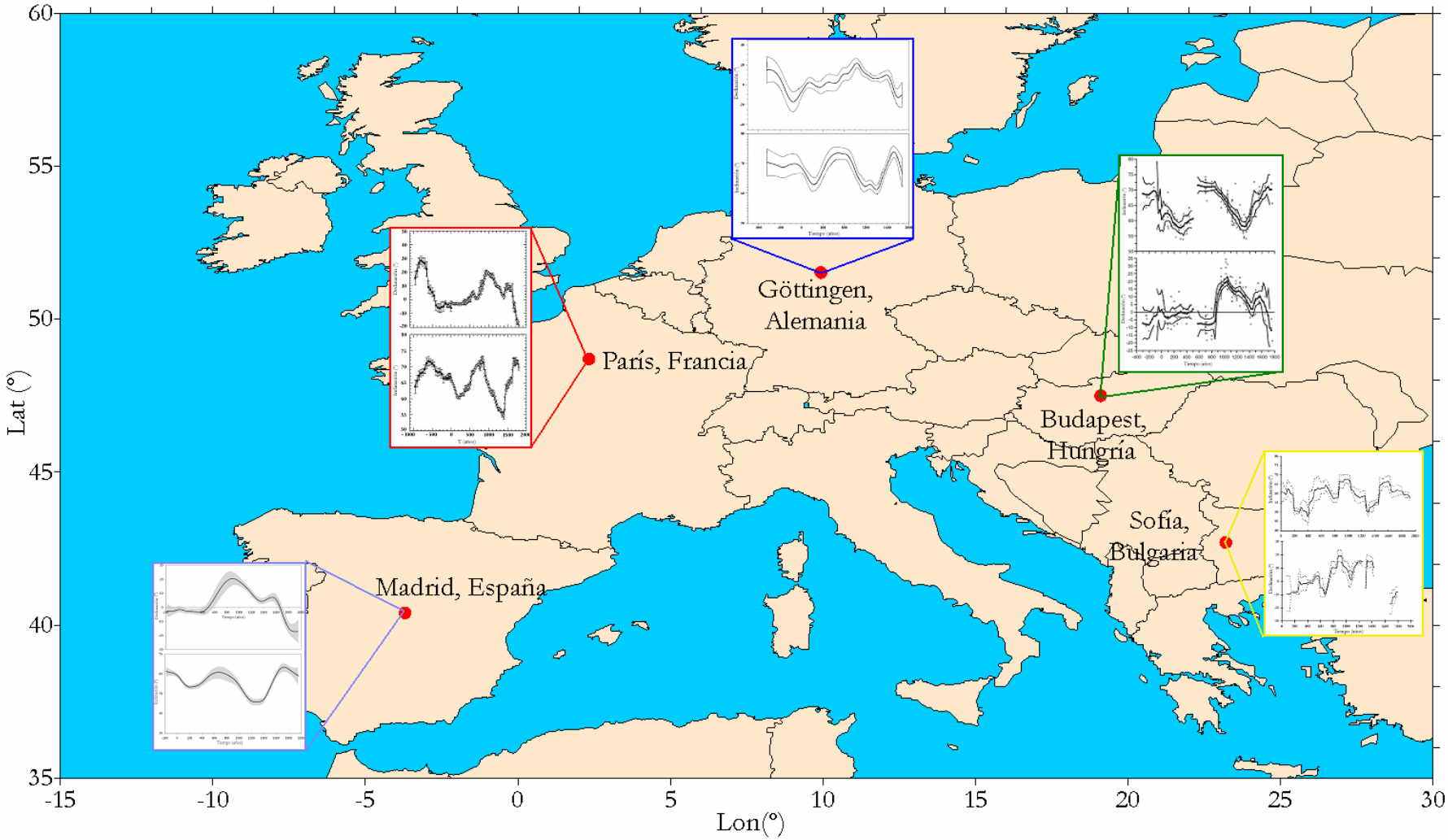


Figura 5.6. Mapa de Europa con las diferentes CVPS que se usarán en el modelado del c.m.t.

En la figura 5.7 se muestra la CVPS de Iberia (Gómez-Paccard et al., 2006b), obtenida mediante el método jerárquico – bayesiano de Lanos (Lanos, 2004 y Lanos et al., 2005). Las características generales de la curva de Iberia son muy similares a las de las curvas francesa y alemana que se expondrán a continuación. De la comparación entre las tres curvas, se concluye que la variación secular del c.m.t. en el oeste de Europa está caracterizada por tres eventos donde el cambio direccional ha sido mayor. Estos corresponden al año 125 a.C, y a los años 200 y 1350 d.C.

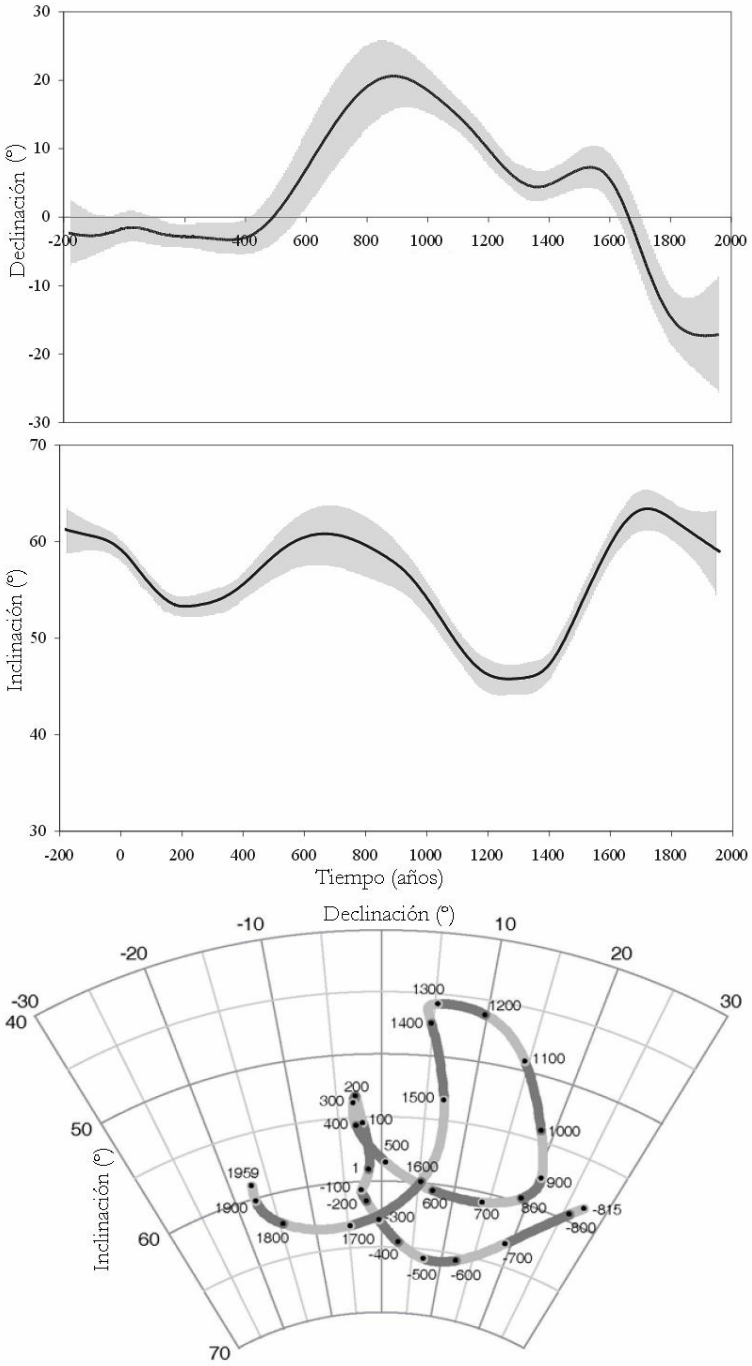


Figura 5.7. CVPS para iberia. Arriba, declinación en función del tiempo. En medio, inclinación en función del tiempo. Abajo, declinación e inclinación en un gráfico de igual área. Modificado de Gómez-Paccard et al., 2006b.

5_{C2} CVPS de Francia.

Francia fue pionera en estudios arqueomagnéticos, a través de los estudios de Emilie Thellier (Thellier, 1937, 1938, 1981; Thellier y Thellier 1952, 1959), el cual publicó la primera curva de variación secular para Francia en los últimos dos milenios en 1981 (Thellier, 1981). Posteriormente se extendió hacia el pasado un siglo más y se completó con nuevas direcciones de 120 estructuras arqueológicas bien datadas (Bucur, 1994), ver figura 5.8. Como se observa en la figura, la variación de las componentes angulares del c.m.t. es en ocasiones lenta y en otras más rápida, como son los cambios en inclinación de hasta 15º entre los siglos IX y XIV, y variaciones de hasta 40º en declinación entre los siglos XI y XIX.

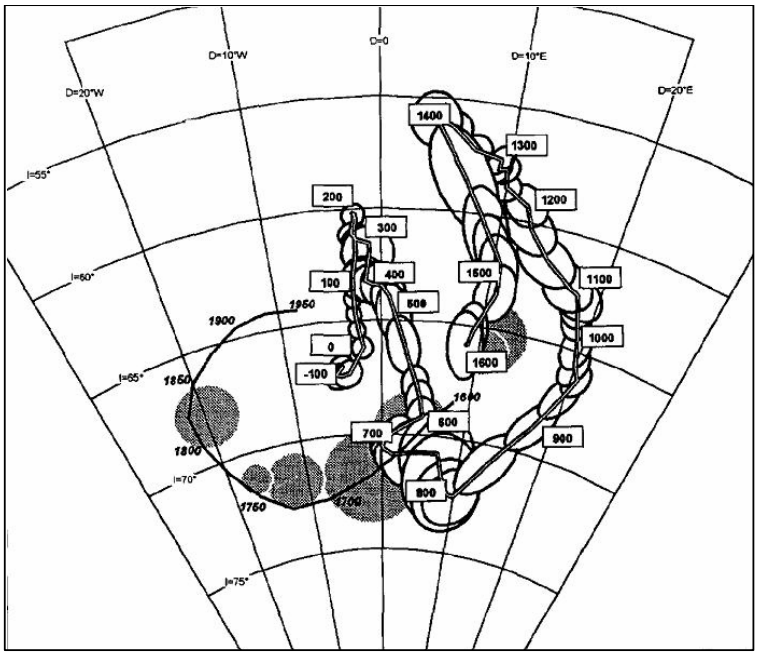


Figura 5.8. CVPS de Francia. (Bucur, 1994)

En 2002 se añadieron nuevos datos a la curva (Gallet et al., 2002), extendiéndose mil años más en el pasado hasta cubrir los últimos tres milenios. Para ello se contó con seis nuevas direcciones en Francia (Gallet et al., 2002) y se han incluido direcciones de otros países, como Gran Bretaña e Italia (con 25 y 10 datos respectivamente) a través de la compilación realizada por Tarling (1999) y dos direcciones en Túnez (Thellier, 1981). Para las direcciones francesas se ha aplicado un criterio de selección (Thellier, 1981) basado en la alta precisión de la orientación de las muestras en el campo, de bajos grados de viscosidad remanente y de parámetros estadísticos que indiquen poca dispersión en la dirección media.

La técnica para la creación de la CVPS de Francia consta de dos períodos. El primero, llevado a cabo por Bucur (1994) (figura 5.8) fue mediante el uso de ventanas temporales de amplitud 80 años moviéndola en intervalos de 25 años. El segundo período, correspondiente al primer milenio antes de nuestra Era, ha sido llevado a cabo por Gallet et al. (2002) construyendo la curva a través de la estadística bivariante (Le Goff, 1990; Le Goff et al., 1992), usando ventanas temporales de 160 años de amplitud y con un paso de 50 años. El resultado es la curva de variación paleosecular para Francia representada en la figura 5.9.

Para centrar la CVPS se optó por París, cuyas coordenadas geográficas son 48.9ºN y 2.3ºE. A dicho lugar de referencia se redujeron todos los datos direccionales (reducción hecha

a través de la corrección vía polo), donde el error máximo se ha cometido en el traslado de los datos desde el sur de Italia y Túnez, pero no excediendo en ningún caso más de 2º en declinación e inclinación (Gallet et al., 2002).

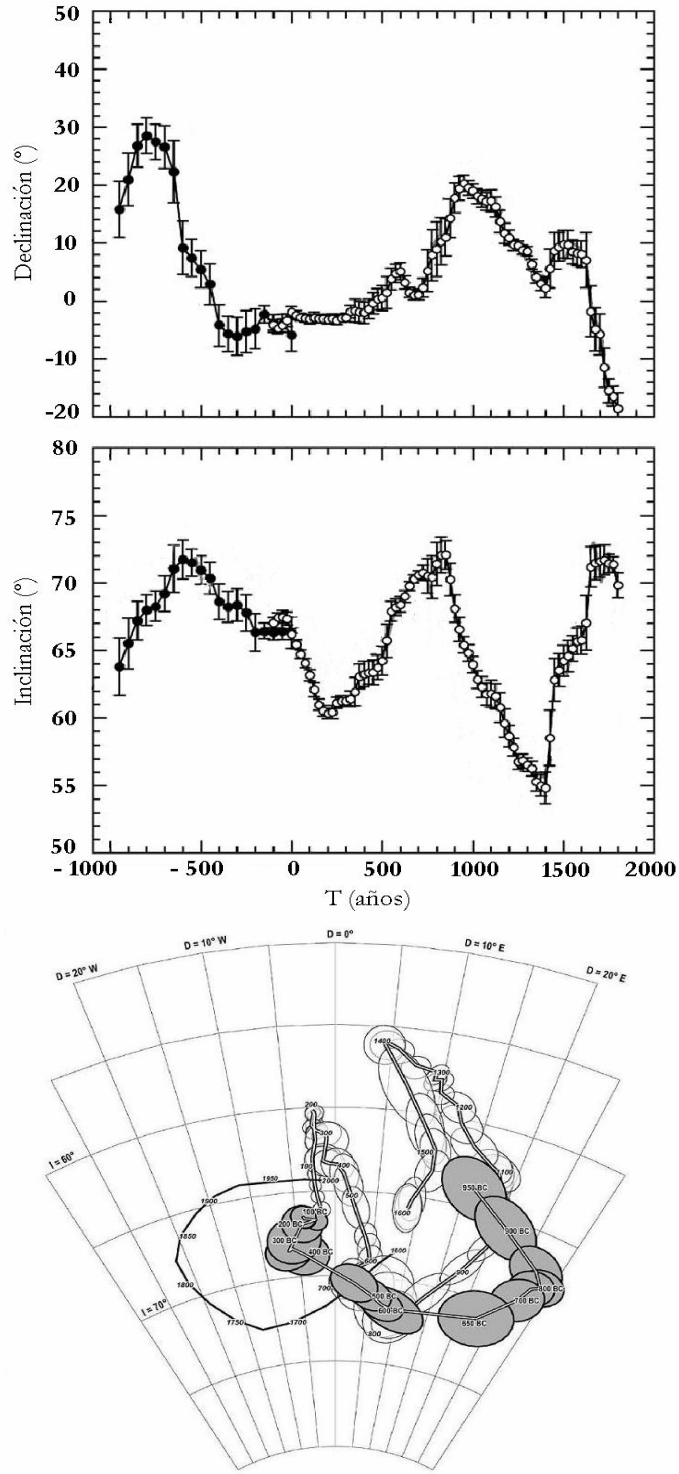


Figura 5.9. CVPS de Francia (Gallet et al., 2002), referida a París. Primer tramo (desde -1000 al año 0) corresponde a Gallet et al. (2002); el segundo (resto de años) a Bucur (1994). Arriba: D en función del tiempo. En medio: I en función del tiempo. Abajo: representación de igual área de D e I.

Vemos que la curva presenta un gran giro horario durante el primer milenio a.C., con rápidos cambios en la primera mitad del milenio marcado por variaciones de hasta 30º en declinación entre los años 800 y 400 a.C. y de hasta 10º en inclinación entre los años 1000 y 600 a.C.

5_{C3} CVPS de Alemania.

La última revisión de datos direccionales en Alemania ha sido llevada a cabo por Elisabeth Schnepp (Schnepp et al., 2005). Este nuevo trabajo incluye datos anteriores (Schnepp et al., 2003, 2004) y aporta un total de 35 nuevas direcciones, obtenidas mediante desimanación térmica y por campos alternos de artefactos arqueológicos. Para la construcción de la curva se han usado, además de datos de Alemania, datos de países circundantes hasta un radio máximo de 500 km alrededor del lugar de referencia.

Los datos alemanes han sido filtrados fijando un criterio de selección que consiste en no tomar aquellas direcciones medias cuyos parámetros estadísticos no superen unos ciertos criterios: que el número de muestras sea mayor a 3, que α_{95} no sea mayor a 7º y que el intervalo de edad no sea mayor a 400 años. Además han sido datados el 70% de las muestras mediante métodos de radiocarbono y luminiscencia.

La ciudad de referencia de la curva, a diferencia de otros países europeos que dan como referencia sus capitales, se ha establecido en Göttingen (51.53º N, 9.93º E), ya que como vimos en el apartado 2_A, esta ciudad está muy ligada al origen del Geomagnetismo, pues fue donde Gauss pasó parte de su vida y desarrolló sus teorías sobre el potencial magnético.

El método usado en la construcción de la curva germana es de nuevo el jerárquico - bayesiano de Lanos (2004); generando una curva con una banda de error al 95% de confianza, ver figuras 5.10 y 5.11.

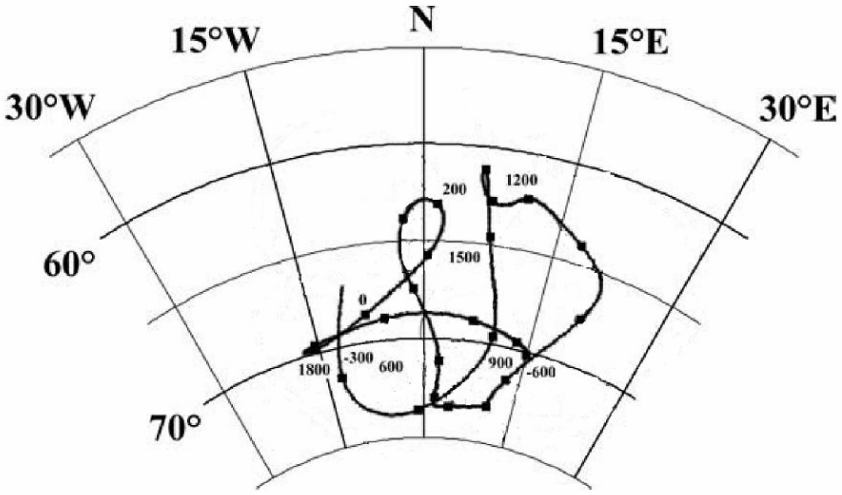


Figura 5.10. CVPS para Alemania (Schnepp et al., 2005).
Representación de igual área en declinación e inclinación.

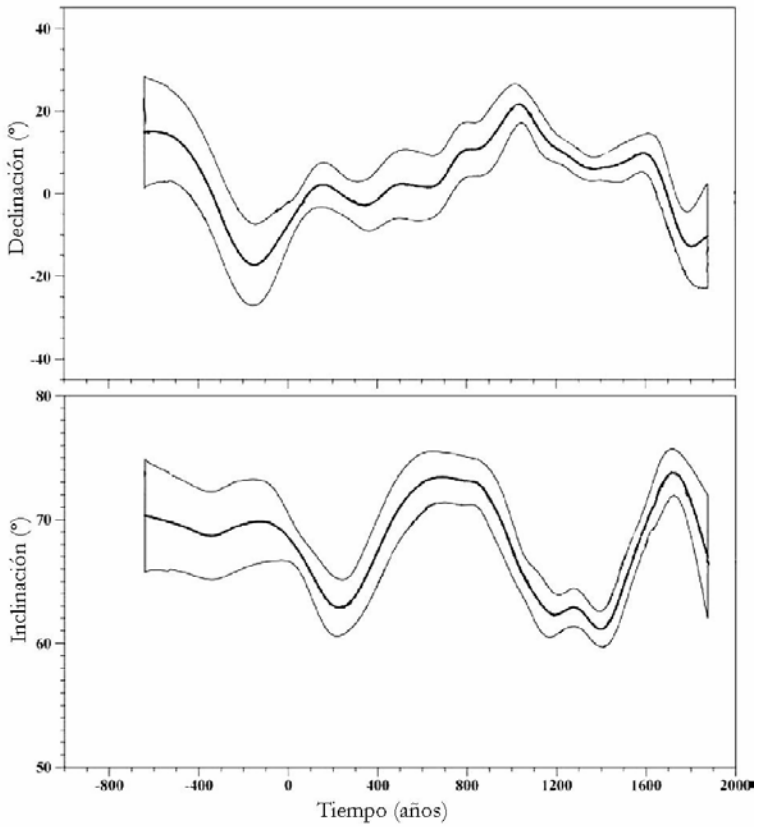


Figura 5.11. CVPS para Alemania (Schnepp et al., 2005). Arriba: declinación en función del tiempo. Abajo: Inclinación en función del tiempo.

5_{C4} CVPS de Hungría.

Marton et al. (2006) aportan 26 nuevas direcciones arqueomagnéticas respecto a la última revisión de los datos de Hungría (Marton, 2003), además de obtener la curva de variación paleosecular a través de dos métodos, el jerárquico – bayesiano propuesto por Lanos et al. (2005) y por el método bivariante de Le Goff et al. (1992).

Se utilizaron un total de 185 datos para la construcción de la CVPS (figura 5.12). Estas direcciones han sido obtenidas mediante el análisis de la componente principal remanente en las estructuras arqueológicas, mediante técnicas de desimanación térmica y por campos alternos. El criterio a seguir para que una dirección sea considerada es que el número de muestras sea mayor a 6 y que el semiángulo α_{95} sea menor que 5º. Con todas las direcciones que cumplen esos requisitos se ha realizado la conversión vía polo hasta el punto de referencia, que ha sido tomado en la capital del país, Sofía, con coordenadas geográficas: 47.5º N – 19.1º E.

De las dos metodologías seguidas, se ha elegido la jerárquica – bayesiana por dos razones (Marton et al., 2006): La primera es que los propios datos arqueomagnéticos cumplen una estructura jerárquica, por lo que es lógico usar este método. La segunda es que el modelo jerárquico – bayesiano considera correctamente la dispersión de los diversos niveles jerárquicos de los datos, mientras que ello no es posible si consideramos un modelo estadístico basado en la estratificación.

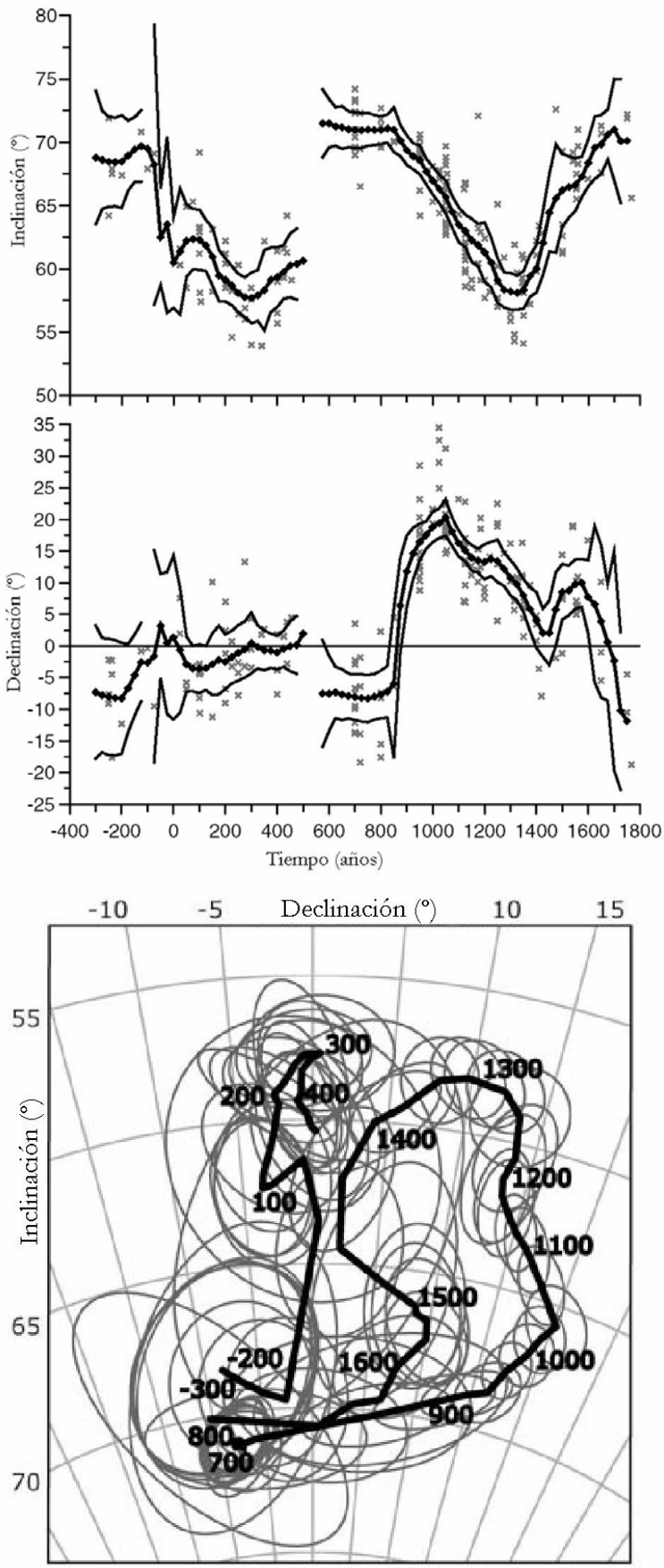


Figura 5.12. CVPS para Hungría (Marton et al., 2006). Arriba: declinación. En medio: inclinación. Abajo: declinación – inclinación en proyección de igual área.

En la curva se diferencian dos segmentos, uno desde el año 300 a.C hasta el 450 d.C y otro intervalo desde el 700 d.C. hasta el 1750 d.C. El error (95% de confianza alrededor del valor medio) es mayor en el primer tramo que en el segundo y ello puede ser debido a que en éste último, las dataciones y los errores en las direcciones de las estructuras son de mejor calidad (Marton et al., 2006).

5$_{C5}$ CVPS de Bulgaria.

Bulgaria es un país de gran tradición arqueomagnética. En él se han publicado estudios de variación secular que cubren los últimos ocho mil años (Kovacheva, 1997 y Kovacheva et al., 1998). Además en este país se ha llevado a cabo numerosos estudios que definen la intensidad del campo geomagnético (paleointensidad). Estudiar la paleointensidad es mucho más complejo que analizar de las componentes angulares (declinación e inclinación), y para obtener buenos datos se requiere que las estructuras arqueológicas contengan minerales ferromagnéticos con estructura de monodominio.

En Bulgaria existe una deficiencia de datos en cuanto a la declinación en algunos intervalos temporales de nuestra Era. Para la construcción de la curva se ha seguido el algoritmo de cálculo y regularización propuesto por Kovacheva y Toshkov (1994), donde todos los datos arqueomagnéticos de Bulgaria han sido reducidos a su capital, Sofía.

En las figuras 5.13 y 5.14 se muestran la CVPS para Bulgaria en nuestra Era (Kovacheva et al., 2001). Se observa como la intensidad del c.m.t. tiene una tendencia decreciente en el tiempo y la aparición de un gap en la curva de declinación a partir del año 1400.

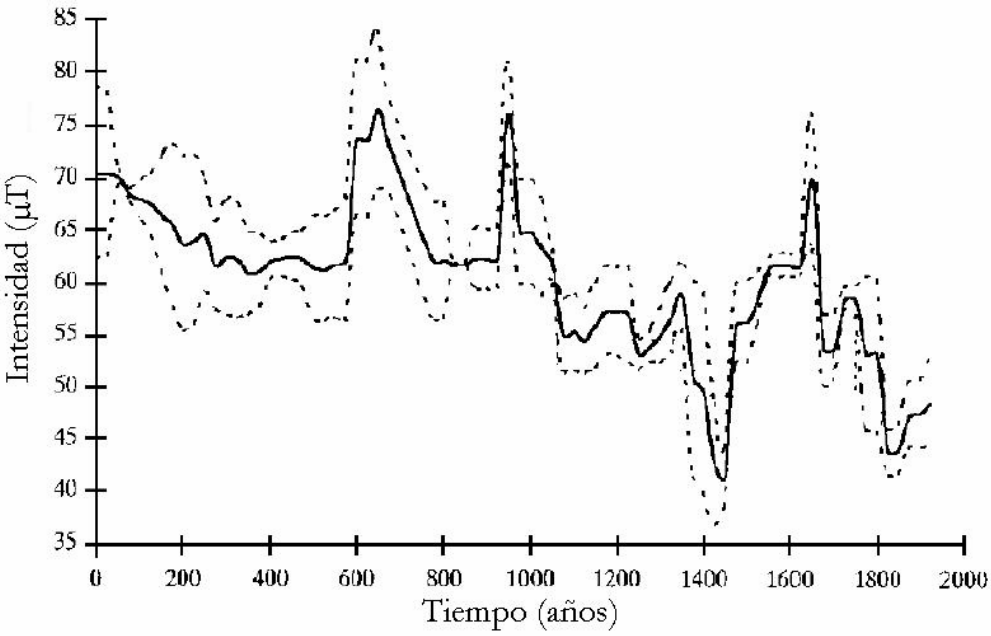


Figura 5.13. Datos de intensidad en Bulgaria (Kovacheva et al., 2001).

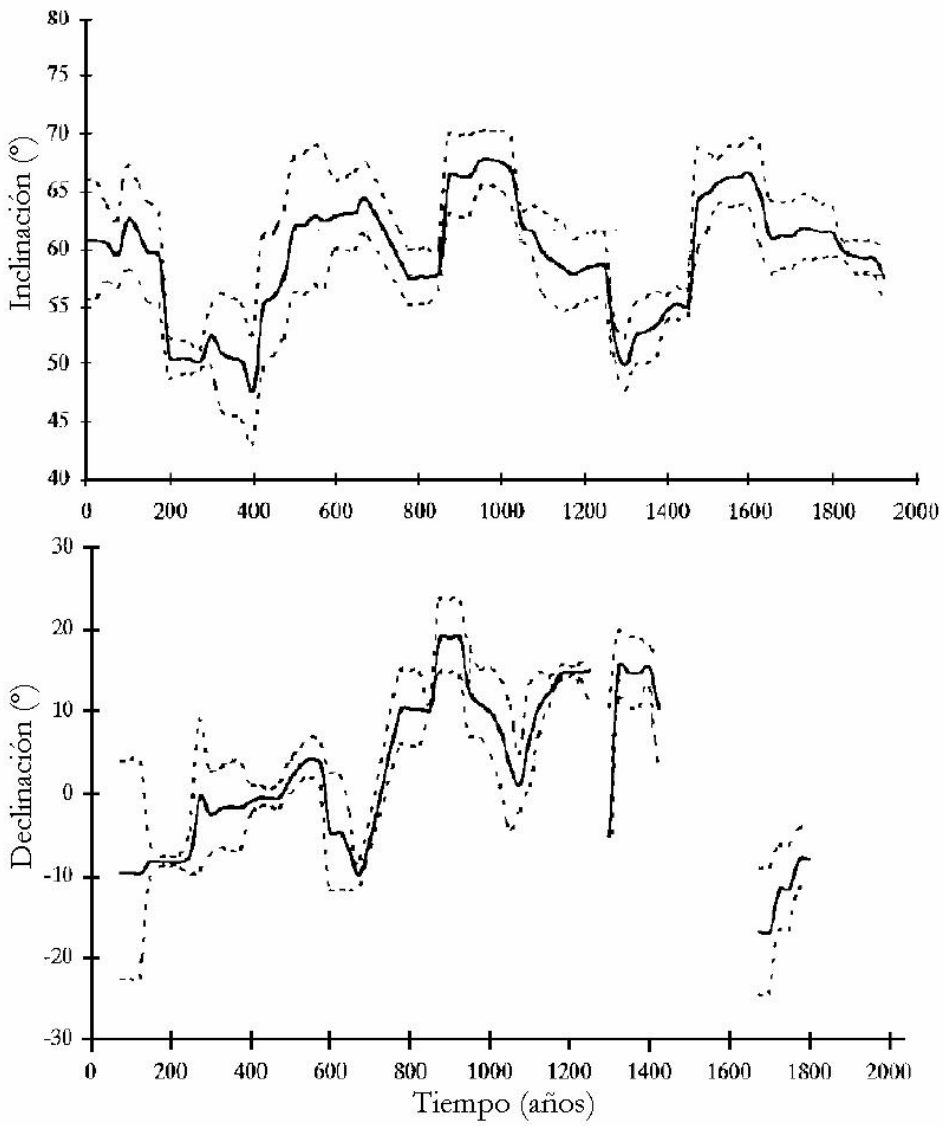


Figura 5.14. CVPS de Bulgaria (Kovacheva et al., 2001). Arriba: inclinación. Abajo: declinación en función del tiempo.

6. Modelización de componentes geomagnéticas en la Península Ibérica.

6_A Modelización de las componentes magnéticas y de su variación secular en Iberia mediante SCHA. Comparación de modelos regionales.

El inicio del uso de la técnica SCHA en España se debe al Dr. J. Miquel Torta (Torta, 1992; Torta et al., 1991, 1992, 1993, 1997, 1999, 2001, 2002; Haines y Torta, 1994; Torta y De Santis, 1996; De Santis y Torta, 1997ª, 1997b), Director del Observatorio del Ebro (Roquetes, Tarragona). Quien, además exploró en detalle las aplicaciones de esta técnica de análisis en diferentes áreas del geomagnetismo.

A continuación describiremos el análisis de la representación del campo magnético actual y su variación secular. Para ello haremos un breve repaso de su trabajo: "Modelización regional del campo geomagnético sobre España: campo anómalo, variación secular y campo de Referencia", publicado en 1992, trabajo pionero de la aplicación SCHA en España.

En este estudio se usaron datos de las tres componentes magnéticas dadas por los observatorios magnéticos (y estaciones seculares) y por el satélite MAGSAT, obteniéndose tres modelos del cmt, uno cortical o de anomalías magnéticas, otro de la variación secular del campo Principal y finalmente un modelo de referencia para España del campo Principal.

Para llevar a cabo el análisis del campo de anomalías magnéticas, se necesita tener una buena distribución espacial de los datos, para así poder representar las bajas longitudes de ondas que caracterizan a dicho campo (del orden de 250 km). Para ello se utilizaron más de 20300 valores por cada componente del campo X, Y y Z, obtenidas a través del satélite MAGSAT. Además se amplió el área de estudio, abarcando la zona del Atlántico y parte del Mediterráneo.

Debido a la densidad de datos la cobertura espacial se tomó $K_{máx}$ = 10 y dos semiángulos del casquete θ_0 = 6º y 16º. Usando éste segundo, se mejoró la representación de los datos, ya que proporcionó un mayor suavizado en ellos, pero generó un valor en las magnitudes relativas de las anomalías un poco menores al que daba el de 6º, debido al diferente contenido armónico SCHA en los dos casquetes. Teniendo en cuenta estos parámetros ($K_{máx}$ = 10 y θ_0 =16) y la expresión (3.27), el modelo permite generar longitudes de onda mínimas de 689 km.

En la figura 6.1 se representan los valores obtenidos para el modelo de 16º en el caso de anomalías escalares. El modelo SCHA ha permitido localizar y dar un valor relativo a la magnitud de las anomalías.

Con el estudio de estos modelos corticales se puso de manifiesto la utilidad de las medidas de satélite de las tres componentes para el análisis de anomalías con longitudes de ondas medias y altas debido a su gran cobertura espacial. En el caso de anomalías más localizadas o con longitudes de ondas menores no es posible, ya que los satélites miden el cmt en su órbita y a esas altitudes desaparece toda la contribución de baja longitud de onda.

En cuanto al estudio de la variación secular, utilizaron los datos que proporcionaban los observatorios de la península y países vecinos, así como los datos de estaciones seculares. Como la variación secular depende del tiempo es necesario considerar un modelo SCHA

espacio – temporal (técnica desarrollada en el apartado 4_{C1} del trabajo). Lo cual llevó a considerar un índice temporal $Q_{máx}$ = 2 para todo el intervalo temporal (desde 1970 hasta 1990). El índice máximo espacial considerado fue 4 debido a los altos valores de longitud de onda que posee la variación secular (comparables con las del campo Principal). En la figura 6.2 se muestran algunos mapas isopóricos (líneas de igual variación secular) para la península y áreas vecinas.

La dificultad de modelar la variación secular con la técnica SCHA reside en su contenido armónico bajo, pues las funciones de Legendre de grado no entero empiezan con valores mayores de n que el caso ordinario (SHA). Pero se puede llegar a una buena solución, ésta consiste en aumentar el tamaño del casquete con objeto de cubrir aquellos armónicos que son probablemente más significativos.

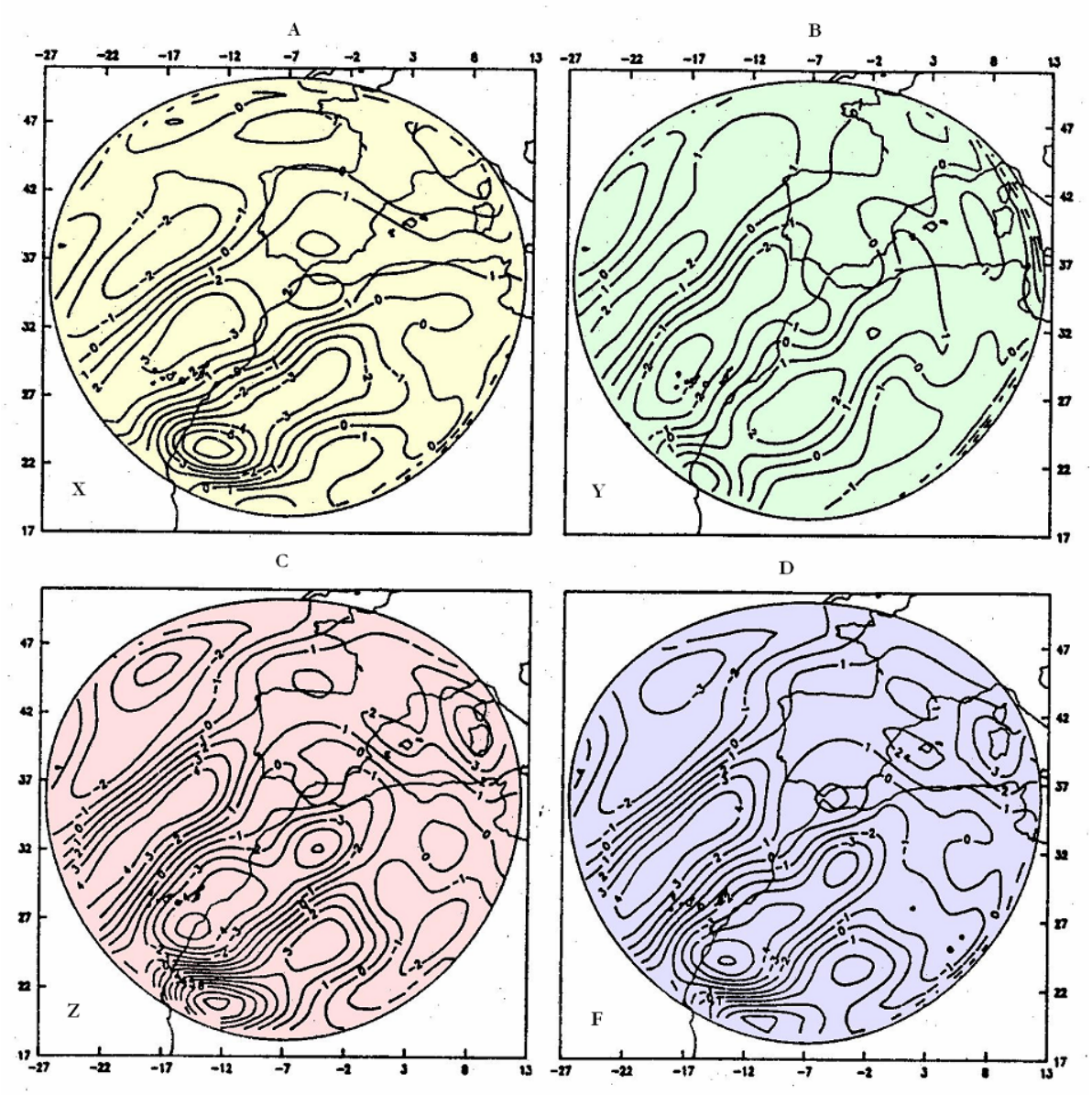


Figura 6.1. Mapas de campo anómalo: A) anomalías de la componente X, B) anomalías de la componente Y, C) anomalías de la componente Z y D) anomalías del campo total F. Todas en nT. Adaptado de Torta (1992).

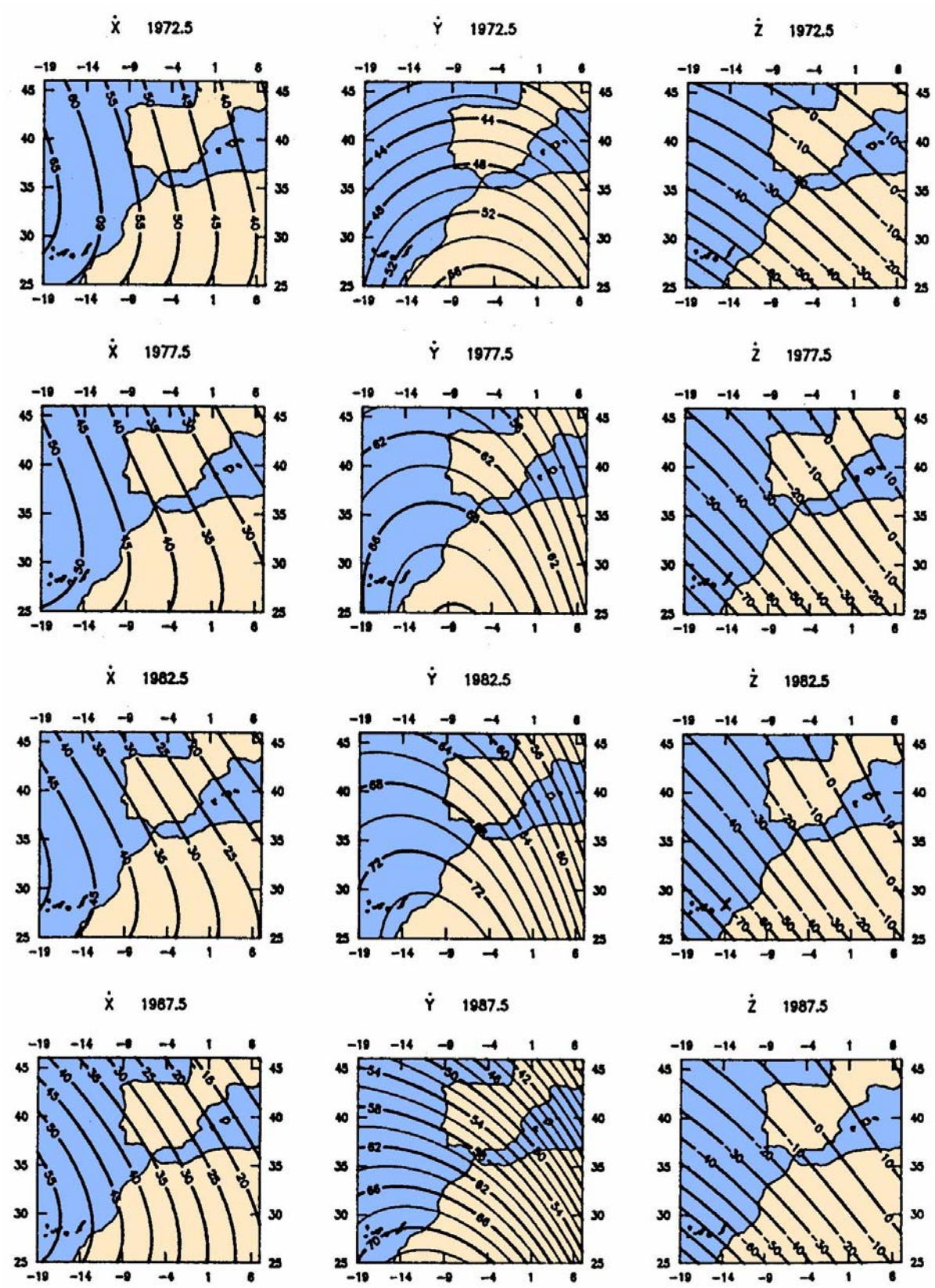


Figura 6.2. Mapas isopóricos (igual variación secular) de la península Ibérica. VS de las componentes X, Y y Z (de izquierda a derecha respectivamente). Para las épocas 1972.5, 1977.5, 1982.5 y 1987.5. Todas en nT/año. Figuras adaptadas de Torta (1992).

Y finalmente Torta (1992) utiliza el análisis SCHA para la construcción de un modelo de referencia para la península en 1990. Los datos usados fueron en conjunto los datos de satélite (ya usados para modelar el campo cortical) y los datos de observatorios y estaciones seculares usados para representar la variación secular. Tras varios análisis de los posibles valores del índice espacial máximo y del tamaño del casquete, los valores de $K_{máx}$ = 9 y θ_0 =8º fueron los elegidos, pudiendo así representar longitudes de onda mínimas de 409 km. Como resultado se obtuvieron los mapas de campo magnético para la península en 1990 y de su variación secular que se ilustran en la figura 6.3.

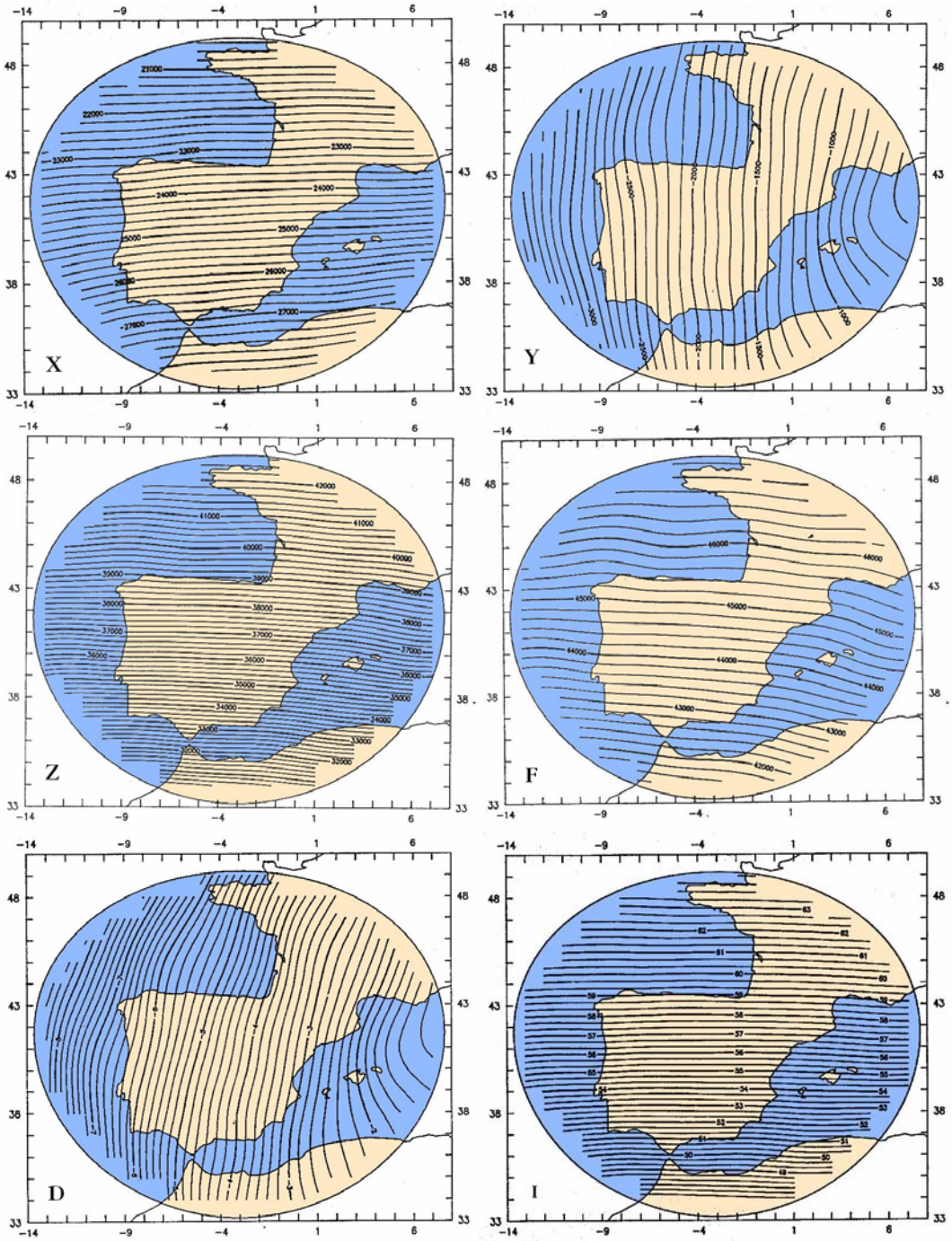


Figura 6.3. Mapas del campo geomagnético de Referencia para España en 1990.0 (componentes X, Y, Z, campo total F, declinación e inclinación). Las componentes en nT, y declinación e inclinación en grados. Figuras adaptadas de Torta (1992).

El trabajo realizado por J.M. Torta y los estudios que fueron expuestos en el apartado 4_C ha posibilitado tener un buen conocimiento del funcionamiento de la técnica SCHA, tanto de sus ventajas como de sus limitaciones. Pudiendo ser aplicada (mediante las modificaciones y cambios pertinentes) en los problemas que aborda en este Trabajo de Investigación.

El primer objetivo de este trabajo es el modelado de la variación secular (VS) de Iberia e Islas Baleares para la época 2005.0, mediante la técnica SCHA. Este análisis está enmarcado dentro de los trabajos que he desarrollado en el Instituto Geográfico Nacional (Servicio de Geomagnetismo, Madrid) para generar los mapas de las componentes magnéticas y de declinación parar la época 2005.0 (Servicio de Geomagnetismo, IGN, pendiente de publicación).

Desde hace 80 años, el IGN ha ido generando los mapas de campo geomagnético en España para su posterior uso público. Pero fue a partir de 1975 cuando se iniciaron los estudios de variación secular. Ésta es una herramienta necesaria para trasladar los datos desde unas épocas a otras. La técnica aplicada para el estudio de la variación secular que se lleva a cabo en el IGN es el ajuste polinomial (desarrollado en el punto 4_C), donde tras calcular la VS en cada estación de repetición se aplica (4.1) para obtener un modelo polinomial de dicha variación secular dependiendo de las coordenadas geográficas. Con estos modelos de VS de las componentes magnéticas y de la declinación se pueden trasladar los puntos del mapa magnético de unas épocas a otras sin necesidad de interpolación manual.

En 2005 - 2006 fueron necesarios hacer de nuevo los cálculos para la obtención de los mapas en 2005.0. En este contexto nos hemos planteado hacer un primer análisis de la técnica SCHA aplicada a la variación secular y compararla con la técnica polinomial. La ventaja de la técnica SCHA frente a la polinomial reside fundamentalmente en la aplicación conjunta a todas las componentes (X, Y y Z), mientras que en la técnica polinomial hay que hacerlo de forma independiente para cada componente, obteniéndose un conjunto de coeficientes distintos para cada componente y no relacionados entre sí. Además, como vimos anteriormente, la técnica polinomial no satisface la ecuación de Laplace en la región para la que está definida y no puede contemplar la coordenada radial, *r* (posición en altura de las estaciones seculares).

Como punto de partida, se ha modelado mediante SCHA valores de VS del IGRF (IAGA, 2005), considerando los valores de VS para 2005.0 en cada estación de medida. El ajuste se ha realizado de dos formas, considerando en conjunto todas las componentes XYZ y en un segundo caso, considerando por separado las componentes horizontales XY e independientes de la componente Z, para analizar cual de los dos casos introducen mayor discrepancia entre el modelo y los datos reales (Torta et al., 1992).

Los resultados vendrán determinados por el residuo cuadrático medio rms (desviación cuadrática media). El número de coeficientes usados en los modelos vienen dados por la expresión $(K_{máx}+1)^2$ -1 para los modelos de componentes horizontales XY y $(K_{máx}+1)^2$ para el modelo de componente vertical Z y el modelo conjunto XYZ (Haines, 1985a).

El valor de $K_{máx}$ tomado será de 2, 3 o 4, pues si se pretende modelar la variación secular, cuya longitud de onda mínima es del orden de 10^3 km, exige unos valores de $K_{máx}$ menores de 4 (aplicación de la expresión 3.28). Y el tamaño del casquete será mayor de 20º, pues a partir de estos tamaños los errores del modelo se minimizan (Torta et al., 1992). El polo o centro del casquete se tomó en las coordenadas 39.55º N y 4.35º W, que además de ser

un punto central en la península corresponde a la localización del observatorio de San Pablo, en Toledo.

Tras hacer varios análisis con los diferentes valores de $K_{máx}$ (2, 3 y 4) y de tamaños del casquete (desde 20º hasta 50º), los menores errores proporcionados por el modelo SCHA de la VS del IGRF eran dados para un modelo conjunto de XYZ y con valores de $K_{máx}$ = 3 y un tamaño del casquete de semiángulo θ_0 = 30º, siendo éste cuantificado en rms = 0.03 nT/año. Este error rms es pequeño debido a que los datos de entrada al modelo son datos del IGRF, que ya son solución de un modelo global en armónicos esféricos.

Posteriormente se aplicó la técnica a los datos de variación secular de la red de estaciones seculares que posee el Instituto Geográfico Nacional. En este caso, el error mínimo rms se obtiene para el modelo conjunto XYZ (rms = 1.7 nT/año) con un valor de $K_{máx}$ de 2, permaneciendo el tamaño del casquete en 30º.

Es muy importante ajustar adecuadamente los parámetros SCHA (el valor de $K_{máx}$ y el valor de θ_0). En primer lugar, al introducir un valor de $K_{máx}$ mayor al adecuado se generan longitudes de onda menores ficticias que distorsionan la realidad (figura 6.4a). Así mismo, introducir un casquete de tamaño más pequeño que 30º se generan distorsiones en la frontera del casquete que no representa la realidad (figura 6.4b). Por último, en la figura 6.4c, vemos cómo estas discrepancias desaparecen y se tiene un buen modelo de representación de la VS del campo geomagnético para la región y época descrita, al considerar los parámetros de ajuste adecuados.

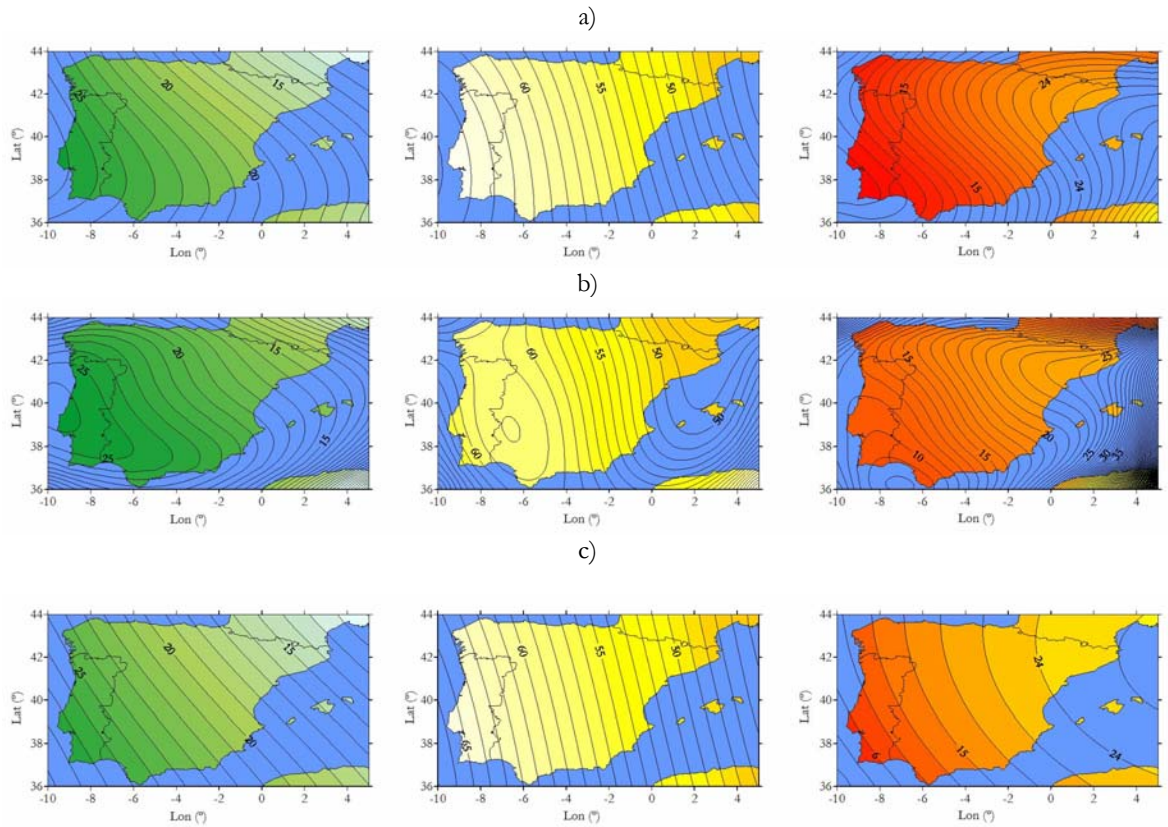


Figura 6.4. Mapas Isopóricos para Iberia de X, Y y Z (de izquierda a derecha). Las líneas isopóricas indican igual variación secular y las unidades son nT/año. a) Para valores de $K_{máx}$ mayor a 2 ($K_{máx}$ = 4); b) para un semiángulo menor de 30º (θ_0 = 10º) y c) mapas obtenidos por SCHA con $K_{máx}$ = 2, θ_0 = 30º.

Se comprobó además que el error rms global del modelo SCHA era menor que el polinomial. Hay que tener en cuenta, también, que el modelo SCHA representa las características del campo geomagnético con sólo 9 coeficientes para todas las componentes (XYZ); frente al modelo polinomial, definido con 6 coeficientes para cada componente, siendo necesario 18 coeficientes para un análisis total del campo análogo al SCHA.

En el *Anexo 4* se adjunta el artículo redactado a partir de dicho análisis: "*Modelización Isopórica del campo geomagnético para la época 2005.0. Península e Islas Baleares*", Marín y Pavón Carrasco, 2006; donde se desarrolla en detalle los pasos a seguir y las comparación entre ambos modelos (el SCHA y el polinomial).

7. Modelización de las CVPS para Europa en los últimos dos mil años.

7_A Tratamiento previo al modelado. El modelo CALS3K.2.

En el capítulo 4, se analizó la posibilidad de representar un modelo global en una cierta región de la superficie de la Tierra a través de un modelo regional, mediante la relación existente entre los coeficientes de Gauss globales y regionales.

En este apartado vamos a aplicar la técnica SCHA al modelo global de Korte et al. (CALS3K.2, 2005_1). Ello se hace con dos objetivos:

El primero consiste en investigar cómo comporta la técnica SCHA modelando la variación secular propuesta por un modelo global en armónicos esféricos a lo largo del período en el que será válido el modelo SCHA de las CVPSs de Europa. Este período se define entre el año 0 y el año 1900.

El segundo objetivo consiste en analizar la convergencia del método al considerar el mismo número de datos de entrada y en las mismas posiciones con la que posteriormente se abordará el problema con CVPSs de Europa. De las 21 localizaciones de los puntos de entrada, 5 corresponden a las posiciones de las curvas de variación secular de Europa (ver figura 7.1) y las 16 restantes corresponden a datos de contorno alrededor de la distribución anterior. Dicha distribución espacial se muestra en la figura siguiente.

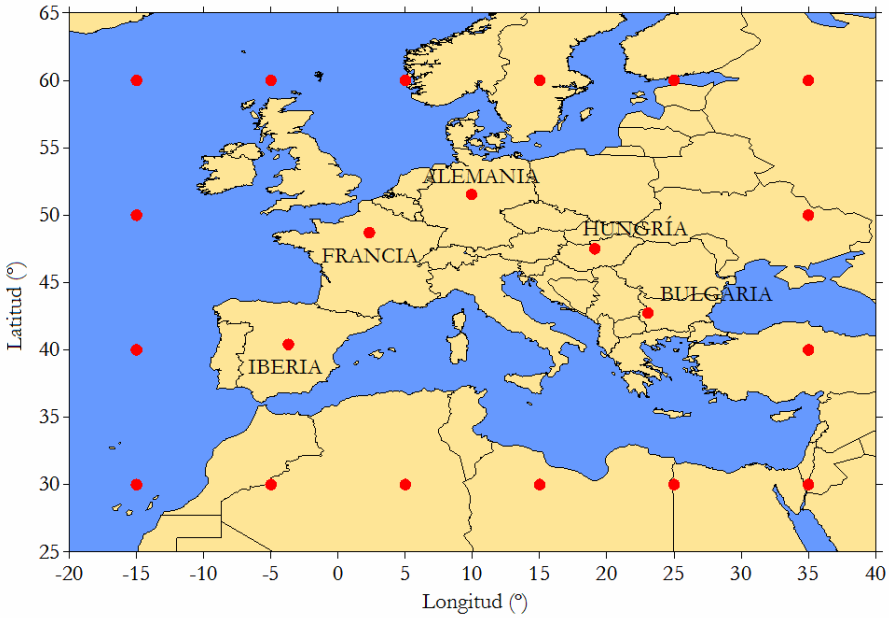


Figura 7.1. Mapa de localización de los datos de entrada. Los cinco puntos centrales corresponden a las posiciones de las CVPS que serán usadas posteriormente.

El modelo CALS3K.2 propuesto por Korte et al. (2005_1) es una mejora del modelo anterior CALS3K.1 (Korte et al., 2003). Con él, a través de la base de datos recopilada por Korte et al. (2005_2) aportan un modelo global espacio-temporal a lo largo de los últimos tres mil años. La técnica usada es la de armónicos esféricos para la parte espacial y los B-splines cúbicos para la temporal.

El uso de datos de intensidad en este modelo permite una descripción completa del campo, ya sea en términos de las componentes XYZ o de la declinación, inclinación e intensidad. Ello va a permitir aplicar la rutina SCHA al poder obtener las componentes del campo XYZ a través de los valores de declinación, inclinación e intensidad que proporcionan el modelo CALS3K.2.

Los datos de entrada se obtienen a partir de la aplicación del modelo CALS3K.2 a las coordenadas de los puntos dados en la figura 7.1. Tras ello, se obtienen, durante el intervalo de tiempo deseado (y con el paso de tiempo que se desee), los valores de declinación, inclinación e intensidad del campo. Estos valores pueden ser transformados en las componentes XYZ a través de (2.5).

Los parámetros de la técnica SCHA serán $K_{máx} = 4$ y $\theta_0 = 40º$ en cuanto a la parte espacial, mientras que en la temporal será usado el método de los B-splines cúbicos con un valor de $Q_{máx} = 3$.

Los resultados tras la aplicación de la técnica SCHA a los datos de entrada han sido satisfactorios, como puede verse en la figura 7.2, donde representamos en puntos rojos los valores de declinación e inclinación obtenidos cada 100 años por el modelo SCHA sobre las curvas de variación secular proporcionadas por el modelo CALS3K.2 en los cinco puntos centrales de la figura 7.1 (que corresponden a las localizaciones de Madrid, París, Göttingen, Budapest y Sofía). Dichos valores de declinación e inclinación se obtienen a través de los valores de las componentes XYZ modeladas mediante (2.6).

Para comprobar la validez del modelo SCHA en otros puntos que no han sido usados como datos de entrada, vamos a comparar los valores de declinación e inclinación obtenidos con el SCHA con las curvas que proporcionan el modelo CALS3K.2. Elegimos tres localizaciones, correspondiente a las coordenadas de Londres, Roma y Atenas. Los resultados se muestran en la Figura 7.3. De nuevo, el modelo SCHA (puntos rojos) se ajusta a los datos de entrada (curva verde).

El error *rms* permitirá cuantificar el ajuste del modelo SCHA frente a los datos de entrada. El error *rms* viene dado por:

$$\mathrm{rms} = \sqrt{\frac{\sum_i (x_i - x'_i)^2}{(n-m)}} \tag{7.1}$$

siendo x_i el dato real, x'_i el que da el modelo, *n* el número total de datos de entrada y *m* el número de coeficientes del modelo.

Dependiendo de los datos que usemos, declinación, inclinación o ambos, obtenemos los errores rms en cada caso respectivamente. Los errores rms calculados son de 0.08º para la declinación, 0.02º para la inclinación y 0.08º para el modelo en conjunto. Estos valores tan bajos del error *rms* son la muestra del buen ajuste del modelo SCHA como bien indican también las Figuras 7.2 y 7.3.

Creemos pues que la densidad espacial de los datos puede ser suficiente para poder aplicarse de nuevo la técnica SCHA a los datos de las CVPSs de Europa, fijando como datos de contorno los proporcionados por el modelo CALS3K.2.

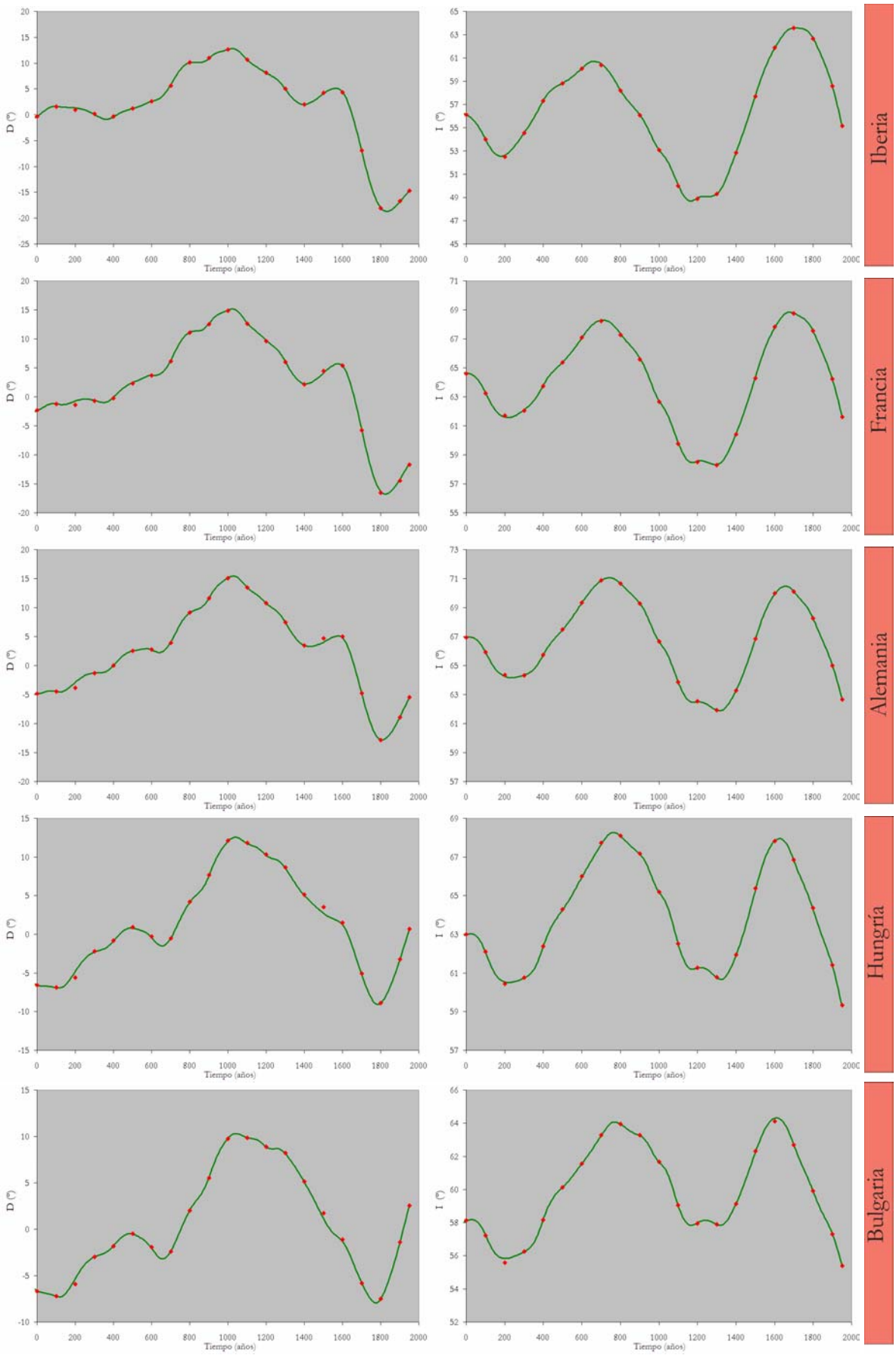


Figura 7.2. Comparación del modelo SCHA obtenido con los datos de entrada en las posiciones de las CVPS de Europa. Curvas verdes: CVPS dadas por CALS3K.2. Puntos rojos: valores obtenidos a través del modelo SCHA.

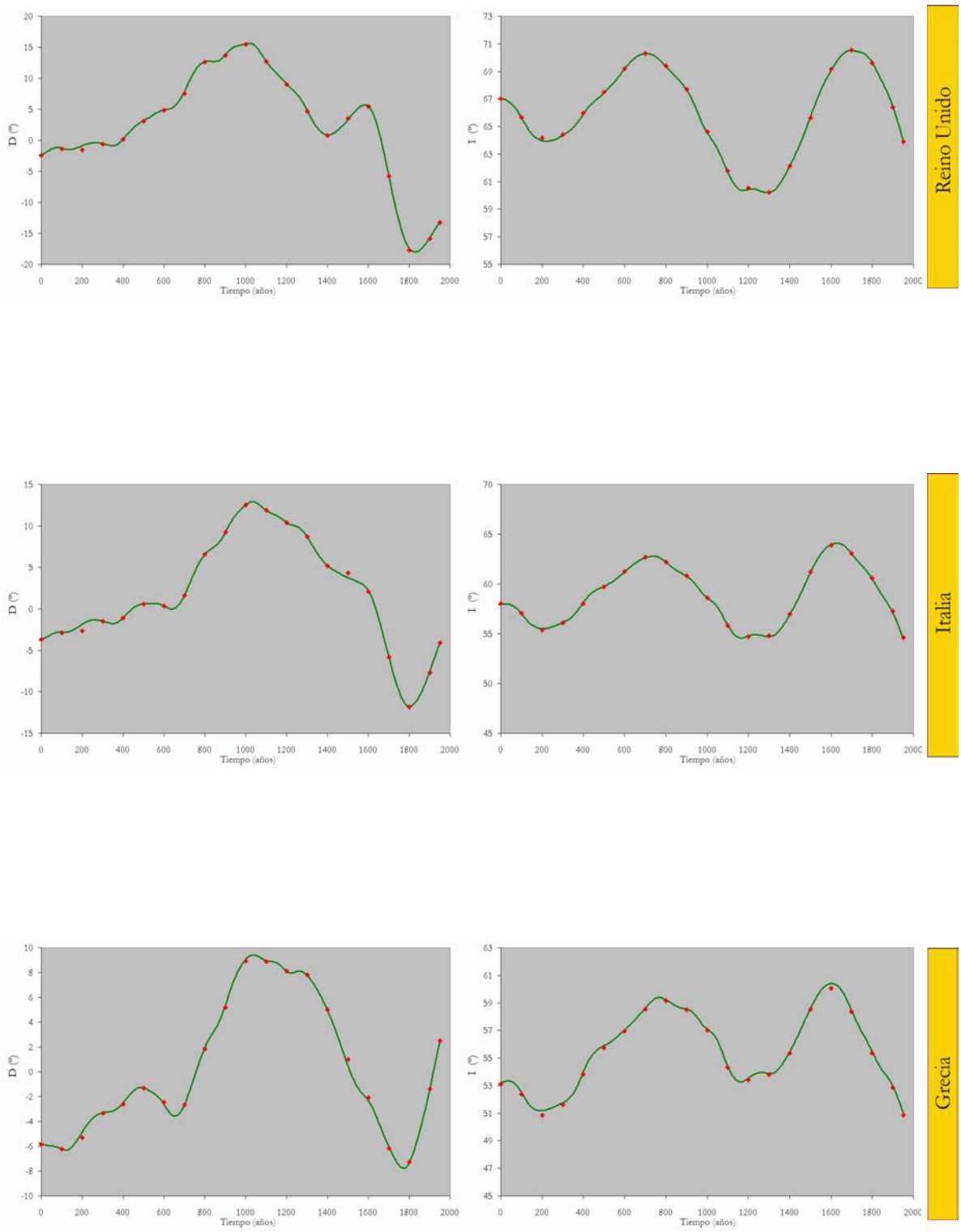


Figura 7.3. Comparación del modelo SCHA con el modelo CALS3K.2 en puntos no dados como imputs. Curva verde: modelo CALS3K.2, puntos rojos: modelo SCHA cada 100 años.

7_B Modificación de la técnica SCHA a SCHA - DI.

En el apartado anterior vimos como la técnica SCHA reproduce perfectamente el modelo global CALS3K.2 en Europa. A partir de los datos de entrada que nos proporciona el modelo CALS3K.2 (declinación, inclinación e intensidad) hemos podido obtener las tres componentes del campo, XYZ. A través de ellas se ha procedido a aplicar la técnica SCHA, obteniendo un modelo regional de XYZ, que mediante las expresiones (2.6), han podido transformarse en un modelo de declinación e inclinación.

Pero ¿qué ocurre si los datos de entrada no tienen valores de intensidad?, es decir, que solo contemplan valores de declinación e inclinación, como es el caso de los datos arqueomagnéticos. En este caso, la técnica SCHA descrita por Haines (1988) no puede ser usada, pues requiere conocer tres componentes del campo geomagnético para así obtener los valores de X, Y y Z.

En este Trabajo proponemos una modificación de la técnica SCHA para que puedan ser considerados sólo dos datos de entrada: la declinación y la inclinación. La modificación que proponemos basada en el método de Bauer (Barraclough, 1974), consiste básicamente en relacionar las componentes del campo X, Y y Z con los valores de declinación e inclinación.

A continuación describiremos brevemente los pasos que se han seguido para dicha modificación de la técnica SCHA.

Teniendo en cuenta la expresión (2.5), las componentes del c.m.t. pueden ser expresadas en función de la intensidad del campo, F, la declinación, D y la inclinación I.

A partir de ellas, podemos establecer tres nuevas ecuaciones en función de la declinación y la inclinación, haciendo desaparecer la intensidad, F:

$$\begin{aligned} X \sin D &= Y \cos D \\ X \sin I &= Z \cos D \cos I \\ Y \sin I &= Z \sin D \cos I \end{aligned} \tag{7.2}$$

De las tres ecuaciones solo dos son independientes, pero serán usadas las tres para que el sistema a resolver esté sobredeterminado. Si sustituimos los valores de las componentes magnéticas por sus expresiones dadas en (3.29), tenemos:

$$\begin{aligned} X &= \sum_{j=0}^{J} \alpha_j \cdot g_j \\ Y &= \sum_{j=0}^{J} \beta_j \cdot g_j \\ Z &= \sum_{j=0}^{J} \gamma_j \cdot g_j \end{aligned} \tag{7.3}$$

Y aplicándolo a 7.2:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{J} \alpha_j \cdot g_j \sin D = \sum_{j=0}^{J} \beta_j \cdot g_j \cos D \\
&\sum_{j=0}^{J} \alpha_j \cdot g_j \sin I = \sum_{j=0}^{J} \gamma_j \cdot g_j \cos D \cos I \\
&\sum_{j=0}^{J} \beta_j \cdot g_j \sin I = \sum_{j=0}^{J} \gamma_j \cdot g_j \sin D \cos I
\end{aligned} \tag{7.4}$$

donde se han simplificado las expresiones de X, Y y Z, teniendo en cuenta que α_j, β_j y γ_j agrupan todos los términos de la parte radial, de las funciones de Legendre y los términos del índice *m*; y el coeficiente g_j corresponde a los coeficientes de Gauss *g* y *h*.

Si extraemos de los sumandos el primer coeficiente g_0, y dividimos todas las expresiones por el mismo, obtenemos:

$$\begin{aligned}
&\alpha_0 \sin D + \sum_{j=1}^{J} \alpha_j \cdot \frac{g_j}{g_0} \sin D = \beta_0 \cos D + \sum_{j=1}^{J} \beta_j \cdot \frac{g_j}{g_0} \cos D \\
&\alpha_0 \sin I + \sum_{j=1}^{J} \alpha_j \cdot \frac{g_j}{g_0} \sin I = \gamma_0 \cos D \cos I + \sum_{j=1}^{J} \gamma_j \cdot \frac{g_j}{g_0} \cos D \cos I \\
&\beta_0 \sin I + \sum_{j=1}^{J} \beta_j \cdot \frac{g_j}{g_0} \sin I = \gamma_0 \sin D \cos I + \sum_{j=1}^{J} \gamma_j \cdot \frac{g_j}{g_0} \sin D \cos I
\end{aligned} \tag{7.5}$$

Pero el primer término del desarrollo en armónicos esféricos de las componentes X e Y son nulos, ello implica que: $\alpha_0 = \beta_0 = 0$. Y si denotamos como $G_j = g_j / g_0$, podemos rescribir (7.5) como:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{J} G_j (\alpha_j \cdot \sin D - \beta_j \cdot \cos D) = 0 \\
&\sum_{j=1}^{J} G_j (\alpha_j \cdot \sin I - \gamma_j \cdot \cos D \cos I) = \gamma_0 \cos D \cos I \\
&\sum_{j=1}^{J} G_j (\beta_j \cdot \sin I - \gamma_j \cdot \sin D \cos I) = \gamma_0 \sin D \cos I
\end{aligned} \tag{7.6}$$

Obtenemos de nuevo un sistema de ecuaciones donde, tanto las funciones base como los observables, dependen de los valores de la declinación e inclinación. Este nuevo sistema de ecuaciones puede ser introducido en la rutina SCHA de Haines (1988).

Para este nuevo sistema, los datos de entrada: declinación e inclinación, tiene que sufrir las mismas modificaciones que las que se establecieron para las componentes XYZ (ver apartado 4_{C1}), es decir, que hay que hay que transformarlas de geodésicas a geocéntricas y después girarlas hasta referirlas al centro del casquete.

El valor de la inclinación solo cambiará con la transformación de geodésico a geocéntrico, pero en el giro será invariante, ya que su valor depende de la componente Z y la horizontal H, ambas invariantes a giros horizontales. En cuanto a la declinación además del leve cambio al pasar a geocéntrica, si que se modificará al girarla al nuevo sistema de referencia.

Hay que tener en cuenta algunas consideraciones al aplicar este método:

1. Estamos considerando el primer término del desarrollo en armónicos en un casquete esférico ($g_0 = g_0^0$) con valor unitario. Ello no implica que no se puedan obtener los valores de la declinación e inclinación, pues ambos valores no dependen del valor numérico de dicho coeficiente.

2. No es posible obtener una visión completa del campo geomagnético, pues para ello son necesario conocer tres componentes, y en este caso solo conocemos la declinación y la inclinación.

3. Todo ello es consecuencia del valor unitario de g_0^0. Si se conociese este valor por otros medios, podríamos generalizar el modelo obtenido de declinación e inclinación a uno que presente cualquier otra componente del c.m.t.

4. Como es lógico, los coeficientes de Gauss que proporcionan este modelo están todos normalizados al valor de g_0^0. Y con estos coeficientes normalizados podemos obtener cualquier componente del campo, teniendo en cuenta que si son las componentes X, Y, Z, H o F, todas estarán normalizadas también al valor de g_0^0, pero no para el caso de D e I.

En el *Anexo 5* se dan las rutinas que se han incluido en la original de Haines (1988). Al nuevo método lo hemos denominado SCHA – DI (ya que son declinación e inclinación los parámetros del campo geomagnético a modelar).

7$_{B1}$ Aplicación de la técnica SCHA – DI al modelo CALS3K.2.

Vamos a usar de nuevo el modelo CALS3K.2 para validar la modificación que se ha realizado sobre la técnica SCHA. Para ello, se seguirán los mismos pasos que en el apartado 7A, pero teniendo en cuenta que ya no serán utilizados los valores de intensidad.

El modelo SCHA - DI en declinación e inclinación resultante se ha representado frente a los datos de entrada al igual que el caso anterior (ver las figuras siguientes), obteniéndose también los errores *rms* en todo el intervalo temporal para la declinación, inclinación y ambas juntas. También se ha evaluado el ajuste en aquellos puntos que no han sido considerados como datos de entrada dando resultados satisfactorios en todos los casos.

Los valores del error *rms* son 0.07º, 0.03º y 0.07º para la declinación, inclinación y ambas en conjunto respectivamente. De nuevo el bajo error *rms* indica un buen ajuste del modelo SCHA – DI.

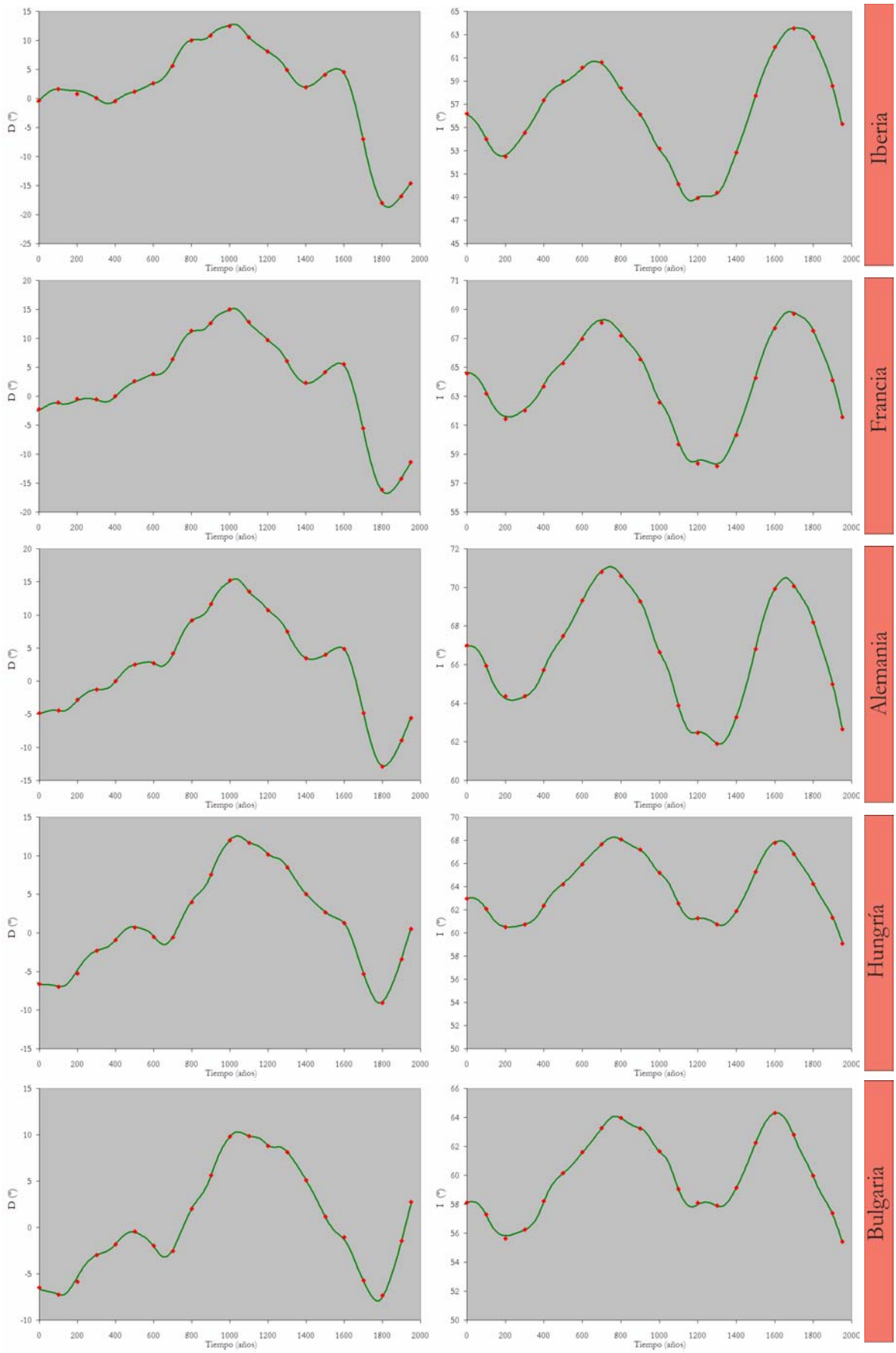


Figura 7.4. Comparación del modelo SCHA-DI con los datos de entrada (CALS3K.2) en las localizaciones de las CVPS. Puntos rojos: modelo SCHA-DI. Curvas verdes: modelo CALS3K.2.

7C Modelización de las Curvas de Variación Paleosecular de Europa.

En este apartado se centra la mayor parte del trabajo desarrollado, pues se procede a la modelización del campo geomagnético europeo en el pasado a través de las Curvas de Variación Paleosecular que se encuentran disponibles en la actualidad en Europa. En los siguientes apartados se describirá detalladamente todos los pasos seguidos así como los resultados obtenidos.

7C1 Curvas de Variación Paleosecular. Períodos característicos. Datos de entrada.

Los datos de entrada del modelo serán los aportados por las CVPS de Bulgaria (Kovacheva et al., 1998), Francia (Gallet et al., 2002), Alemania (Schnepp et al., 2005), Hungría (Marton et al., 2006) e Iberia (Gómez-Paccard et al., 2006), y cuyas características hemos desarrollado en capítulos anteriores. A partir de ahora llamaremos a dichas curvas "bayesianas", ya que corresponde al método aplicado para su construcción.

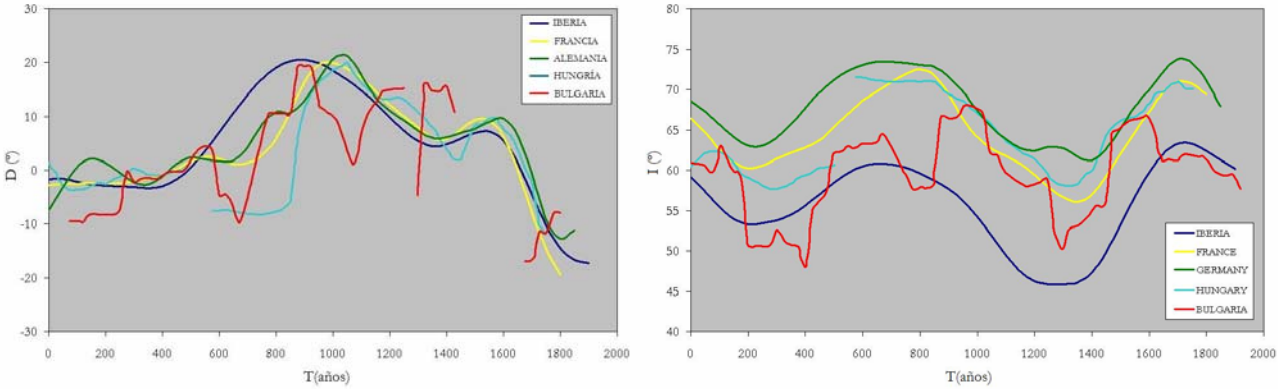


Figura 7.5. CVPS de Europa. Declinación a la izquierda e inclinación a la derecha.

En la figura anterior mostramos las curvas digitalizadas, dadas en el intervalo temporal que vamos a usar: desde el año 0 al año 1900 d.C. Vemos que las curvas pertenecientes al oeste de Europa (Iberia, Francia y Alemania) aportan datos continuos en el tiempo, sin embargo, las de Europa oriental (Bulgaria y Hungría) tienen lagunas en algunos intervalos temporales. Los intervalos temporales para los que están definidas las CVPS vienen dados en la siguiente tabla.

Tabla 7.1. *Valores temporales para los que están definidas las CVPS.*

País	Intervalo temporal de D (años)	Intervalo temporal de I (años)
Iberia	0 – 1900	0 – 1900
Francia	0 – 1800	0 – 1800
Alemania	0 – 1850	0 – 1850
Hungría	0 – 400 ; 650 – 1750	0 – 400 ; 650 – 1750
Bulgaria	100 – 1250 ; 1350 – 1400 ; 1700 - 1800	0 – 1900

Es necesario hacer un análisis temporal de la curvas para poder determinar cual será el intervalo de tiempo mínimo de muestreo. Para ello, vamos a aplicar a cada una de las curvas bayesianas la transformada rápida de Fourier discreta en la coordenada temporal. Las

separaremos de nuevo en declinaciones e inclinaciones, lo que nos permitirá establecer las similitudes y diferencias entre ellas.

1. Análisis de los períodos característicos de la declinación.

Se observa (ver figura adjunta) en las curvas de declinación correspondientes a Iberia, Francia, Alemania y Bulgaria un período principal que se sitúa entorno a los 1700 años. Para el caso de Hungría es ligeramente inferior, de unos 1450 años.

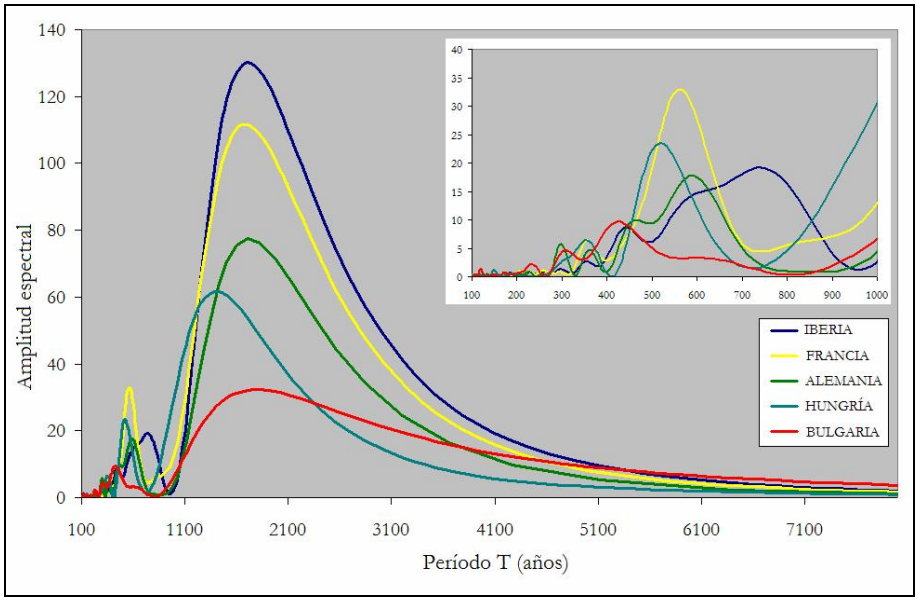


Figura 7.6. Períodos característicos de la declinación.

Podemos ver también períodos menores de 1000 años. En Iberia corresponden a 730, 600, 450, 350 y 300 años de mayor a menor contribución en espectral (en períodos) en la curva. En el caso de la curva francesa, aparece otra gran contribución temporal con período de 550 años y otro de menor amplitud entorno a 350 y ya casi insignificante uno más de período 300 años. El comportamiento de Alemania es análogo al de Iberia, con períodos característicos de 600, 450, 350 y 300 años.

En Hungría, vuelve a ocurrir lo mismo que para el período característico principal, y es que los períodos menores de 1000 años son ligeramente inferiores al resto de países. Éstos son de mayor a menor contribución espectral: 520, 350 y 300 años. Finalmente la curva de Bulgaria tiene períodos análogos al resto de curvas de 600, 450 y 300 años. Pero hay contribución de períodos inferiores, en torno a los 120 años. Este puede ser generado ficticiamente debido a la discontinuidad de la curva bayesiana.

Si hacemos una evaluación en conjunto, podemos ver que la variación secular de la declinación en los últimos dos mil años en Europa está marcada en gran medida por una periodicidad de 1700 años. Con variaciones periódicas en menor grado de 550 – 600, 450 y 350 años.

2. Análisis de los períodos característicos de la inclinación.

En cuanto a la inclinación vemos que a pesar de ser una componente del campo geomagnético cuya magnitud cambia poco en el tiempo (como se observa en la baja amplitud

del espectro en comparación con los de la declinación) presenta también unos períodos característicos que representamos en la figura siguiente (figura 7.7).

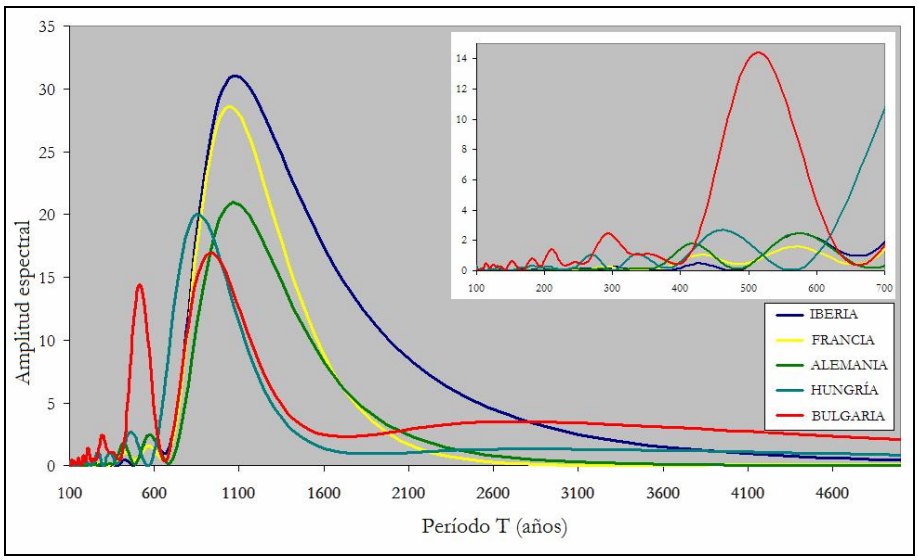


Figura 7.7. Períodos característicos de la inclinación.

Se observa un período entorno a 1100 años para las curvas de Iberia, Francia y Alemania y un poco menor para el caso de Bulgaria y Hungría, de unos 950 y 850 años respectivamente.

En cuanto a períodos menores destacar los de Bulgaria, vemos que se caracteriza por otra gran contribución periódica entorno a los 550 años, y otras de menor amplitud de 300, 200, 180 y 150 años. Los períodos característicos comunes al resto de las curvas se encuentran entorno a 550 y 400 años.

Si hacemos un análisis de la variación secular en conjunto (declinación más inclinación), esta presenta cambios más rápidos en la inclinación (con períodos entorno a los 1000 años) que en la declinación, que lo hace más lentamente con períodos de 1700 años. Sin embargo es la declinación la que tiene una mayor contribución de variaciones rápidas (periodos pequeños). Este análisis permite elegir el tiempo característico de muestreo de las curvas bayesianas, el cual se ha elegido en 100 años para un modelo previo y en 50 años para el modelo definitivo, ya que creemos que tomando este intervalo temporal se puede reproducir las curvas bayesianas con diferencias insignificantes.

3. Datos de entrada al modelo SCHA – DI.

Tras aplicar el muestreo a todas las curvas cada 50 años, hemos obtenido los valores de declinación e inclinación que serán usadas para la modelización del campo geomagnético, adjuntados en la Tabla 7.2.

Los gaps de datos a partir de 1800 han sido cubiertos con los datos que aportan el modelo CALS3K.2, ya que a partir de esta época las diferencia entre las curvas bayesianas y las dadas por el modelo CALS3K.2 son mínimas. Ello hace que podamos ampliar el número de datos de entrada hasta el año 1900 en todos los países.

Sin embargo la ausencia de datos en tiempos anteriores (como es el caso del intervalo temporal entre los años 450 y 600 en Hungría, y los datos de declinación de 1300 y del intervalo entre 1450 y 1650 en Bulgaria) no ha sido remplazada, prefiriendo utilizar el del resto de países; ya que las discrepancias entre las curvas bayesianas y las del modelo CALS3K.2 son apreciables en estas épocas.

Tabla 7.2. *Datos de declinación e inclinación de las CVPS cada 50 años (Los huecos indican épocas sin datos).*

Tiempo (años)	Iberia		Francia		Alemania		Hungría		Bulgaria	
	D (º)	I (º)	D (º)	I (º)	D (º)	I (º)	D (º)	I (º)	D (º)	I (º)
0	-1.67	59.18	-2.77	66.44	-7.44	68.54	1.35	60.48		60.85
50	-1.60	57.38	-2.54	64.68	-3.13	67.28	-2.82	62.11		60.59
100	-2.18	55.42	-2.51	62.68	0.62	65.69	-3.63	62.27	-9.27	62.55
150	-2.69	53.94	-2.40	61.00	2.12	64.06	-2.93	60.92	-7.99	59.76
200	-2.86	53.31	-2.47	60.20	1.31	63.03	-2.59	59.09	-8.34	51.49
250	-2.98	53.42	-2.41	60.59	-0.47	63.03	-1.22	58.09	-7.03	50.64
300	-3.17	53.77	-1.99	61.43	-2.25	64.02	0.39	57.70	-2.32	52.43
350	-3.31	54.48	-1.59	62.13	-2.67	65.70	-0.87	58.36	-1.50	50.61
400	-2.99	55.59	-1.08	62.83	-1.16	67.70	-1.08	59.34	-0.92	47.68
450	-1.72	57.05	0.20	63.76	1.23	69.67			-0.93	55.74
500	0.53	58.51	1.56	65.33	2.42	71.20			2.02	61.30
550	3.57	59.69	2.51	67.08	2.05	72.29			4.16	62.91
600	7.04	60.46	2.22	68.63	1.62	73.07			-3.94	62.90
650	10.63	60.80	1.13	69.76	1.76	73.42	-7.67	71.14	-7.22	63.01
700	14.02	60.73	1.26	70.85	4.37	73.44	-8.12	70.96	-5.82	63.32
750	16.91	60.32	2.81	71.95	8.54	73.25	-8.30	71.00	5.06	60.07
800	19.10	59.62	5.94	72.49	10.75	73.05	-7.50	71.00	10.40	57.39
850	20.31	58.75	10.92	71.80	10.73	72.83	-6.42	70.95	10.17	57.82
900	20.57	57.70	16.49	69.44	12.91	71.59	11.45	69.45	18.81	66.53
950	19.87	56.21	19.58	66.42	16.89	69.73	16.16	68.61	12.39	67.64
1000	18.51	54.16	19.89	64.06	20.60	67.32	18.54	67.04	10.06	67.76
1050	16.76	51.81	18.79	62.62	21.19	65.30	20.05	65.63	3.89	63.84
1100	14.78	49.44	17.05	61.77	17.63	63.83	16.17	63.61	5.93	60.37
1150	12.49	47.45	14.71	60.82	13.38	62.73	13.90	62.34	12.24	58.35
1200	9.89	46.23	12.15	59.41	11.02	62.42	13.15	61.35	14.98	58.01
1250	7.35	45.80	9.97	57.92	9.23	62.89	13.14	59.25	14.93	59.05
1300	5.38	45.83	7.92	56.68	7.32	62.73	10.76	58.15		50.19
1350	4.45	46.12	6.01	56.07	5.99	61.68	8.02	58.27	14.85	52.77
1400	4.77	47.28	5.79	57.00	6.15	61.21	3.88	59.89	15.45	54.29
1450	5.87	49.85	7.56	59.31	6.93	62.61	1.98	64.24		54.58
1500	6.95	53.23	9.38	62.02	7.73	65.13	8.31	66.14		65.77
1550	7.21	56.63	9.27	64.66	9.01	67.85	9.49	66.61		66.36
1600	5.53	59.73	6.20	67.32	9.65	70.03	7.65	68.26		66.76
1650	1.30	62.10	-0.01	69.74	6.31	72.25	3.86	69.80		63.03
1700	-4.60	63.31	-7.91	70.95	-0.75	73.75	-2.37	70.99	-16.94	61.00
1750	-10.33	63.25	-14.65	70.72	-9.26	73.27	-11.80	70.17	-11.74	62.02
1800	-14.54	62.37	-19.49	69.45	-12.73	71.10			-7.81	62.01
1850	-16.69	61.26			-11.19	67.89				59.62
1900	-17.31	60.18								59.50

Además de los datos proporcionados por las curvas bayesianas, es necesario establecer unas condiciones de regularidad para que los resultados sean realistas. En algunos casos se establecen técnicas estadísticas de regularización que actúan sobre los coeficientes del modelo

para establecer cuales son más o menos significativos (Korte y Holme, 2003). En otros casos se aplican condiciones de contorno que obligan al campo geomagnético a cumplir una serie de requisitos en la discontinuidad entre manto inferior y núcleo externo (discontinuidad CMB). Aplicadas por ejemplo en el modelo de Jackson et al. (2000), Korte et al. (2003) y en el propio modelo CALS3K.2 (Korte et al., 2005_2).

En nuestro caso las condiciones que vamos a imponer (aparte de la regularización estadística indicada en el apartado 4_{C1}) es que en el contorno del casquete los valores tiendan a los establecidos por el modelo CALS3K.2., para ello definiremos una red de datos entorno a la posición de las curvas bayesianas que sirvan como datos "reguladores" del modelo.

Las localizaciones de estos datos se muestran en la figura 7.8. Las posiciones son análogas a las dadas en el apartado anterior para la evaluación del modelo CALS3K.2. Y se debe, como indicamos anteriormente, a que estas coordenadas fueron establecidas con el interés de ver como se comportaba la técnica SCHA, aplicada al modelo CALS3K.2, con la futura distribución de datos que será aplicada para el modelo de las curvas bayesianas.

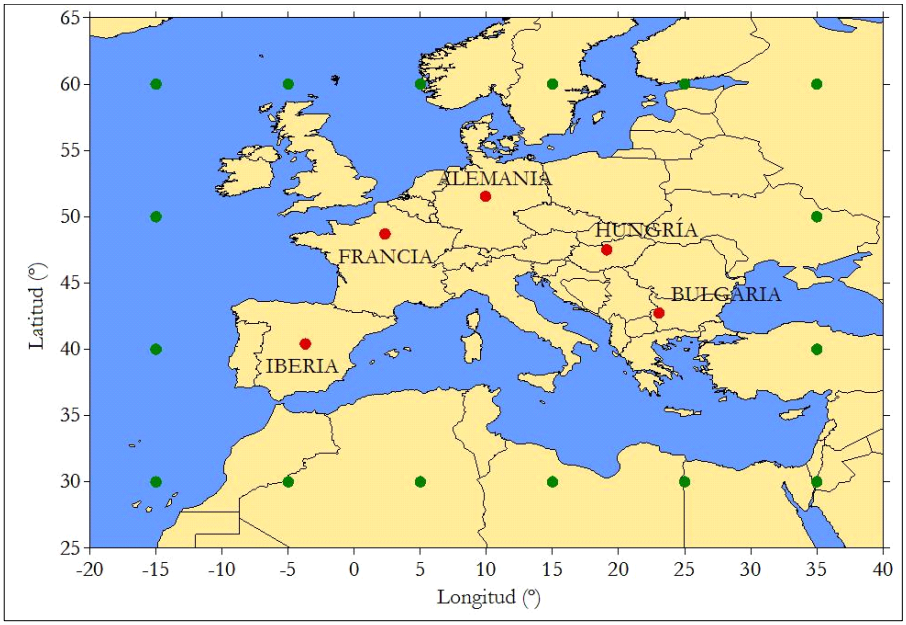


Figura 7.8. Coordenadas de los datos de entrada al modelo SCHA. Puntos rojos: CVPSs Europa. Puntos verdes: datos de contorno de CALS3K.2 (Korte et al., 2005_2)

7_{C2} Aplicación de la técnica SCHA – DI para la modelización de las CVPS.

Antes de aplicar la técnica SCHA a los datos de entrada es necesario establecer unos adecuados parámetros del modelo, ya que como vimos en 6_A una mala elección de éstos pueden generar distorsiones irreales en los datos de salida del modelo. Para ello, vamos a realizar una serie de pruebas para finalmente decidir cual será el mejor valor de $K_{máx}$ y θ_0 usados en la modelización.

En primer lugar, vamos a calcular el error *rms* total del modelo para una serie de valores de $K_{máx}$ = 2, 3, 4 y 5. Se toman estos valores, ya que debido a la escasez de datos de entrada y de la gran longitud de onda espacial que caracteriza la variación secular (del orden de 10^3 km), éstos son los valores adecuados para la modelización.

Para este análisis previo, basta con considerar un modelo estático que contemple los años 0, 500, 1000, 1500 y 1900. Fijamos un casquete lo suficientemente grande para que los resultados sean más realistas (Torta, 1992) y calcularemos el error *rms* total para cada modelo obtenido con los diferentes valores de $K_{máx}$, teniendo en cuenta que el número de datos de entrada es el mismo para los cuatro modelos (46 en total) y el número de coeficientes viene dado por $(K_{máx} + 1)^2 - 1$.

Los resultados se indican gráficamente en la figura 7.9. Para un valor de $K_{máx} = 3$, se minimiza el error *rms*, por tanto el valor de $K_{máx}$ que se usará en la modelización será de 3, que equivale a 15 coeficientes más el coeficiente de normalización g_0^0.

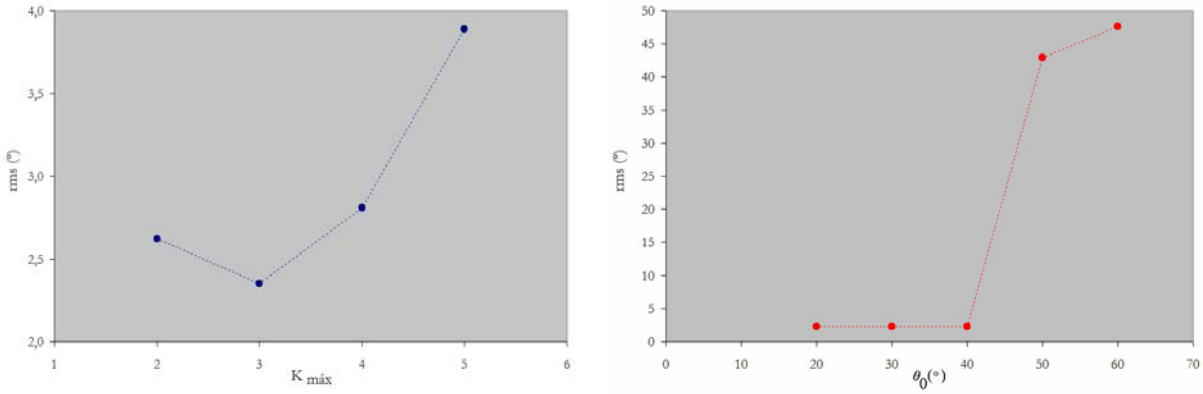


Figura 7.9. Izquierda: error *rms* vs parámetro $K_{máx}$, para un θ_0 fijo (30º); derecha, error *rms* vs θ_0 para $K_{máx}$ fijado en 3.

De forma análoga, fijado ya el valor de $K_{máx}$ en 3, se ha calculado varios modelos cambiando el tamaño del casquete en valores de 20º, 30º, 40º, 50º y 60º. En la misma figura se indica el resultado gráfico, vemos que a partir de 40º aumenta el error *rms*, mientras que entre 20º y 40º el error es prácticamente constante, por ello, vamos a tomar como parámetro $\theta_0 = 30º$.

Fijado los parámetros del modelo, $K_{máx} = 3$ y $\theta_0 = 30º$ para la parte espacial, vamos a proceder a aplicar la técnica SCHA a los datos de entrada. Estableceremos el centro del casquete en el punto de coordenadas geodésicas: 45ºN y 10º E.

La rutina informática, desarrollada en Fortran, se basa en la proporcionada por Haines (1988) más posteriores modificaciones. Más la modificación que hemos añadido para poder considerar solo datos de declinación en inclinación (ver *Anexo 5*). En el diagrama de flujo (figura 7.10) se simplifica los pasos que ejecuta la rutina hasta obtener el modelo:

Hay que establecer el valor del intervalo y paso temporal. El intervalo temporal será aquel en el que es aplicado la rutina, mientras que el paso es el incremento de tiempo entre un intervalo a otro. En la figura 7.11 se ilustra el proceso, siendo T el intervalo temporal y t el paso.

Establecido un intervalo temporal *T*, será dentro de este intervalo donde se aplica la técnica SCHA en el espacio y en el tiempo. Para ajustarla en el tiempo usaremos la técnica de los B-splines cúbicos (de Boor, 1978), que son funciones polinómicas cúbicas en función del tiempo, como indicamos ya anteriormente en el apartado 4_C. Tras el ajuste avanzamos en el tiempo a través del paso *t* para obtener un nuevo intervalo de aplicación. En el desarrollo temporal tomaremos el parámetro $Q_{máx} = 3$.

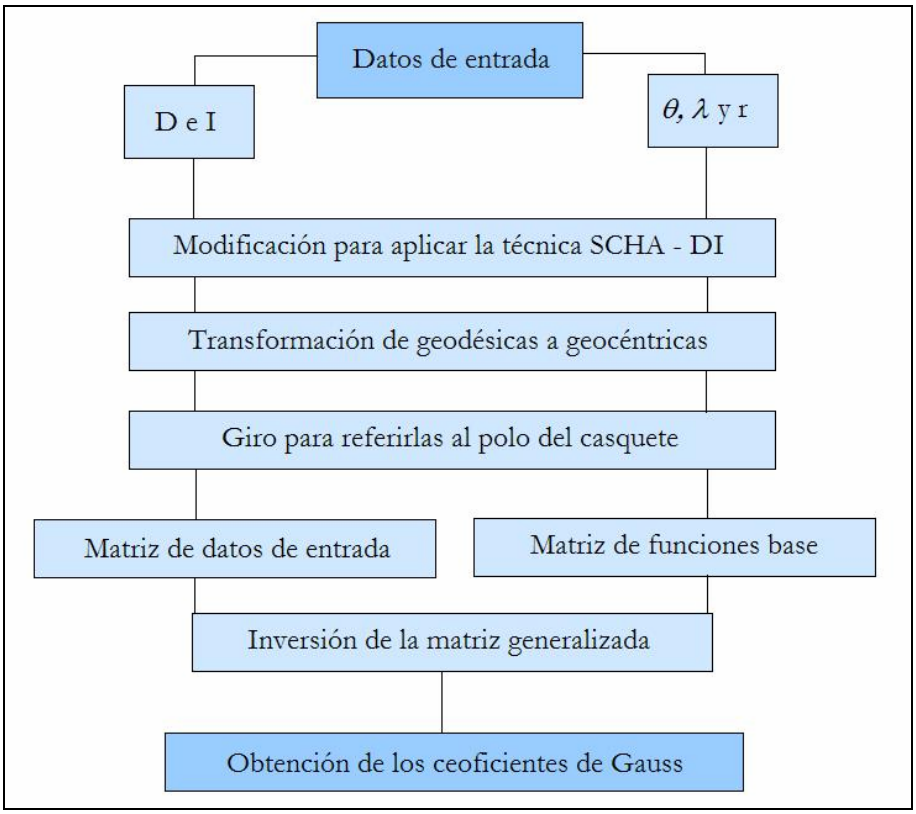


Figura 7.10. Diagrama de flujo para la rutina SCHA (modificada con SCHA – DI).

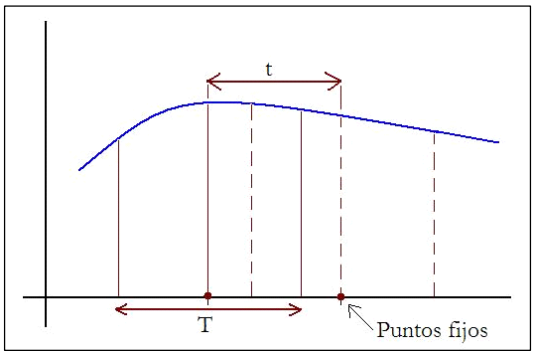


Figura 7.11. Esquema del intervalo T y paso temporal t.

1. Modelo previo SCHA de los datos.

Para analizar un comportamiento previo del modelo SCHA de las curvas bayesianas vamos a considerar intervalos temporales de 300 años y pasos de 100 años (sin sobrepasar los períodos característicos de las curvas bayesianas). Donde además tomamos los datos de entrada cada 100 años.

Los modelos SCHA – DI obtenidos se ilustran a continuación (curvas en rojo), junto con las curvas bayesianas (curvas azules), ver figura 7.12.

Vamos a seguir a partir de ahora y en adelante la siguiente notación en colores: las curvas bayesianas serán siempre azules, las curvas que generan el modelo SCHA serán rojas, las curvas que proporciona el modelo global de Korte et al. (CALS3K.2, 2005_1) serán amarillas y las dadas por el modelo global de Hongre et al. (1998) en verde.

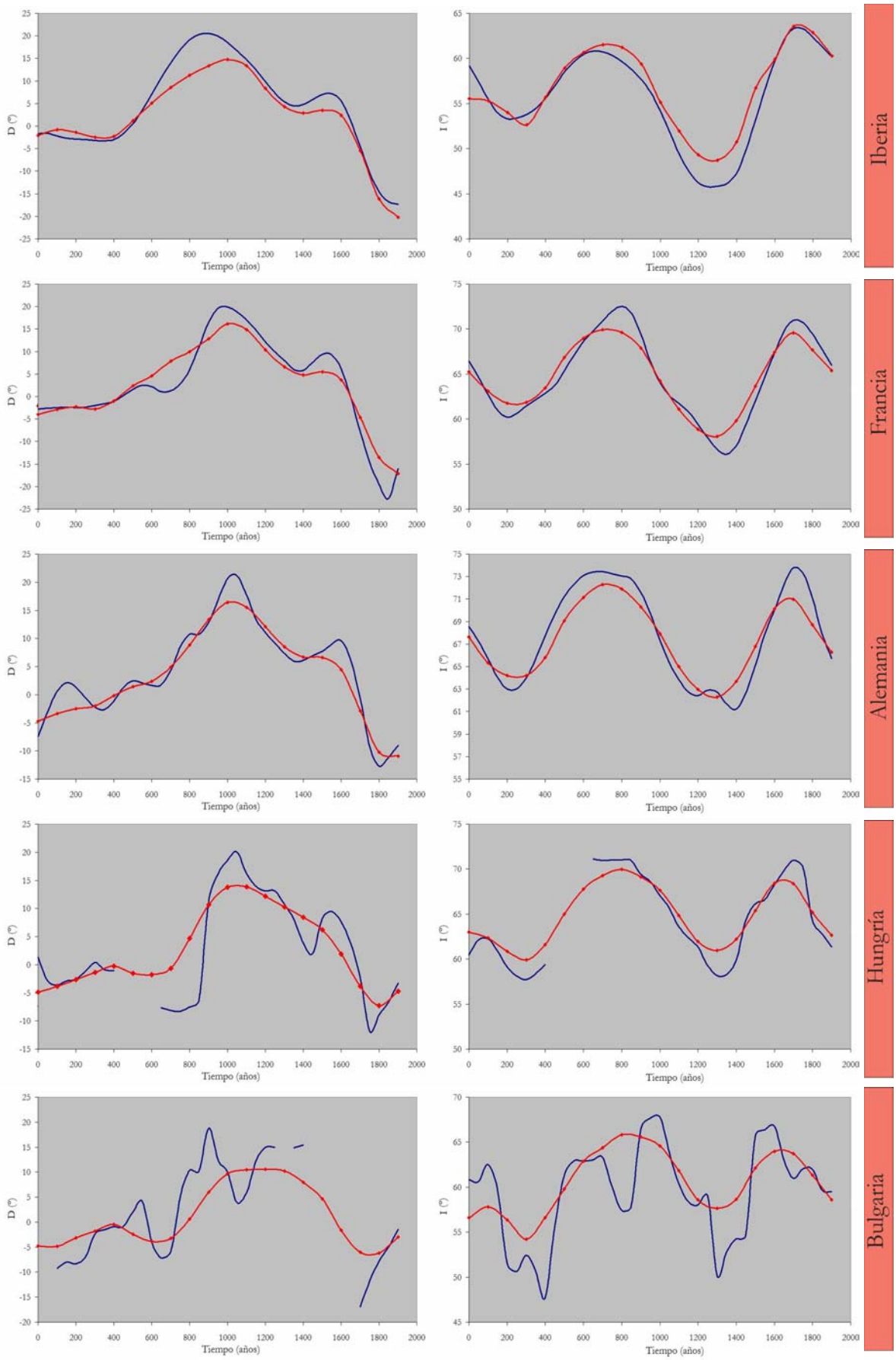


Figura 7.12. Comparación de las curvas bayesianas con las proporcionadas por el modelo SCHA.

Vemos como las curvas generadas por el modelo SCHA reproducen las bayesianas en buena medida para el caso de Iberia, Francia y Alemania. En el caso de Hungría y Bulgaria, las curvas que generan el modelo son "un filtrado" en frecuencias de las bayesianas, permitiendo el paso de los períodos altos, mientras que no reproducen aquellas variaciones de corto período, como podemos ver claramente en la inclinación y declinación de la curva búlgara.

Tras hacer un análisis espectral, efectivamente el período de mayor contribución en declinación (1700 años) e inclinación (1000 años) se mantiene en las curvas dadas por el modelo SCHA, mientras que la contribución debida a períodos menores desaparece. Esto es consecuencia de tomar un valor del intervalo y paso temporal de 300 y 100 años respectivamente, pues se hace un filtrado de la señal eliminando los bajos períodos.

2. Modelo SCHA de las curvas de variación secular (CVPS).

Para eliminar el efecto de filtrado, vamos a densificar el número de datos temporales, estableciendo un intervalo temporal de 100 años y un paso de 50 años. Creemos que un paso menor no mejorará los resultados, ya que 50 años es inferior a cualquier período característico de las curvas bayesianas.

Aplicamos de nuevo la técnica SCHA a los intervalos de 100 años, mediante ajuste espacial por armónicos esféricos y el temporal por B-splines, avanzando en el tiempo a través del paso *t* cada 50 años. El resultado como vemos a continuación es una mejora sustancial de las curvas dadas por el modelos SCHA. Mostramos de nuevo en la figura 7.13, para cada país, las curvas bayesianas y las generadas por el modelo SCHA, así como las obtenidas en el modelo previo.

Con este nuevo modelo con paso cada 50 años hemos mejorado el anterior (en la figura 7.13: curva continua roja frente a la curva roja punteada). Se mejoran además los resultados en aquellos intervalos de tiempo caracterizados por períodos cortos, como es el caso de la curva de Bulgaria.

Pero al ser analizadas en conjunto las cinco curvas de variación Paleosecular mediante SCHA, los cortos períodos que existen en alguna de ellas, como es el caso de Bulgaria, se transmiten al resto de curvas. Además el hecho de modelar las cinco curvas en conjunto (que en realidad son 10, pues separamos declinación e inclinación) hace que el ajuste sea el más adecuado para las cinco curvas, lo que puede hacer que en alguna de ellas el ajuste no sea tan bueno como se esperaba.

Este hecho se pone de manifiesto en una ocasión, como podemos ver en las gráficas de las curvas de la figura 7.13. Concretamente se da para el intervalo temporal 800 – 850, donde la mayoría de las curvas presenta una pequeña perturbación que es causada por la caída y subida brusca de la inclinación y declinación, respectivamente, en Bulgaria. Un estudio de los espectros en frecuencia (ver figura 7.14) ha afirmado dicha hipótesis, pues coinciden esas perturbaciones con las características del periodo de 550 años de Bulgaria que vimos en el apartado 7_{C1}. Destacar también que la curva que genera el modelo SCHA para Francia tiene el mismo contenido espectral en frecuencias que la bayesiana original.

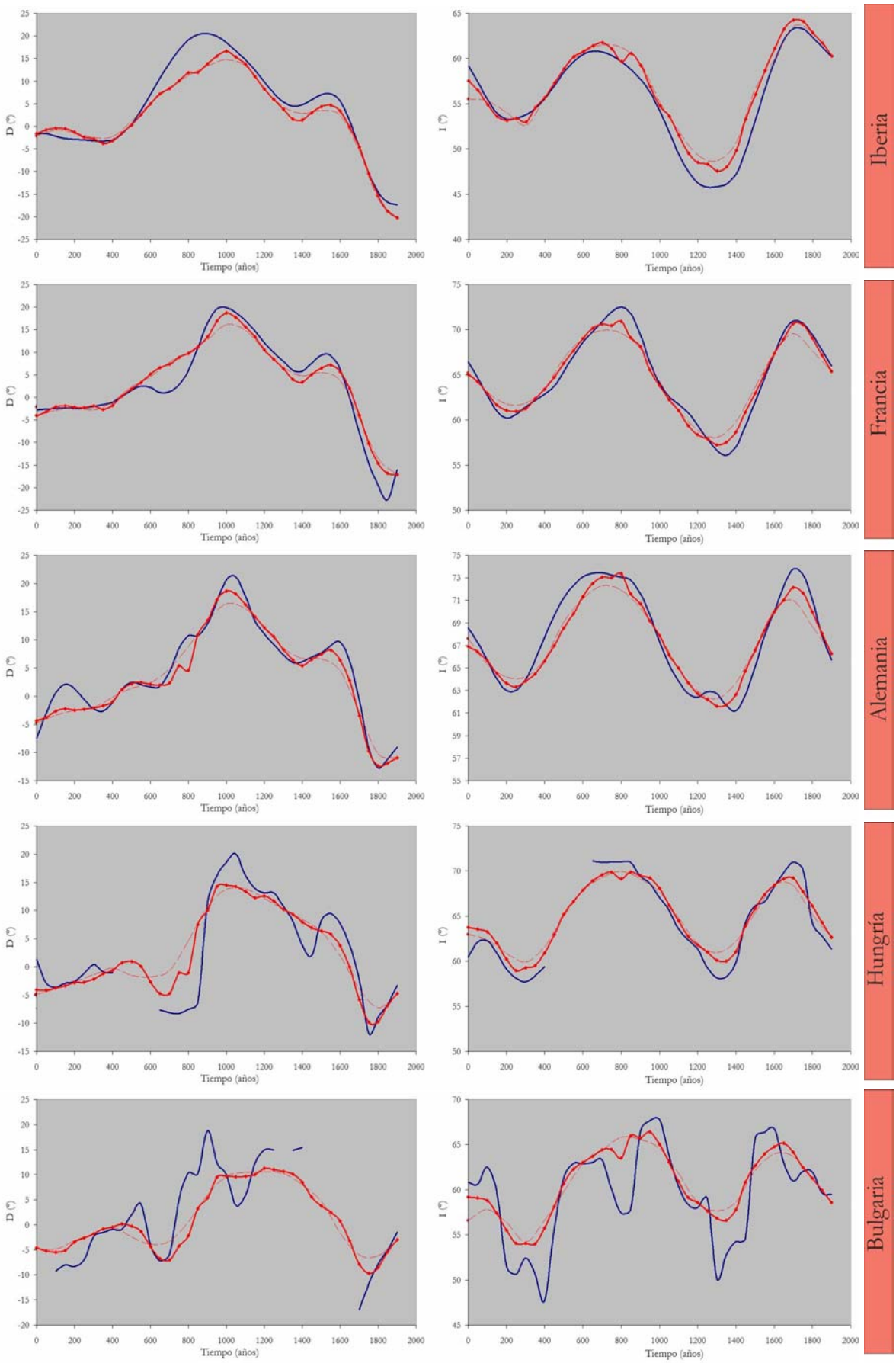


Figura 7.13. Comparación de las curvas bayesianas con las proporcionadas por el modelo SCHA. Curva roja discontinua: modelo SCHA anterior. Curva roja continua: modelo actual SCHA.

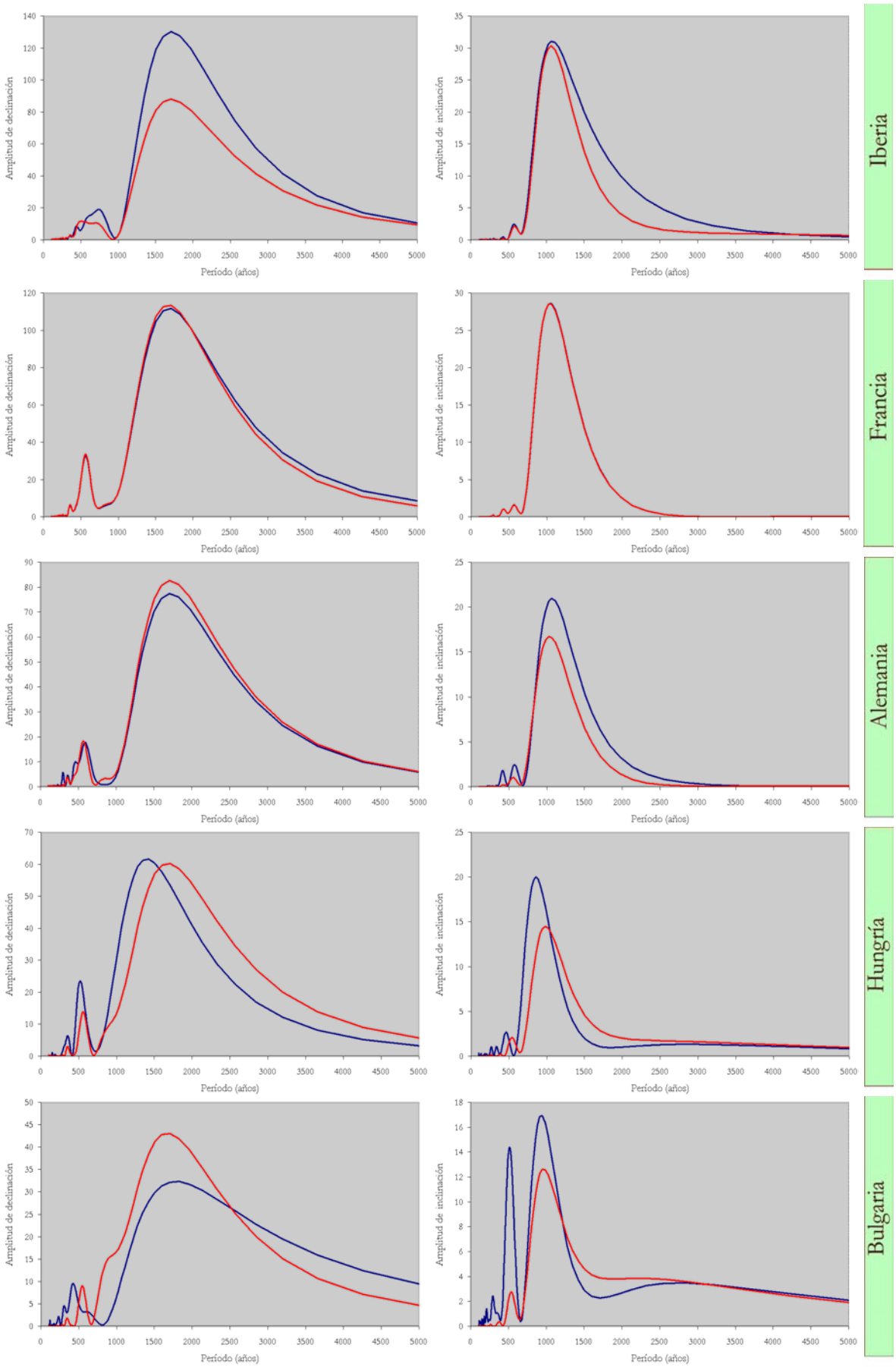


Figura 7.14. Espectro en frecuencias de las curvas SCHA (rojo) junto con las bayesianas (azul).

3. Primer modelo arqueomagnético SCHA en Europa para los últimos dos mil años

Con los resultados obtenidos podemos establecer un nuevo modelo SCHA aplicado a Europa para los últimos dos mil años. Ya que a partir de los coeficientes del modelo se pueden generar curvas de variación Paleosecular en cualquier par de coordenadas para las que está definido el modelo; o una representación de mapas de declinación e inclinación para cualquier época entre el año 0 y 1900 de nuestra Era.

En la tabla 7.3 recopilamos la serie de coeficientes de Gauss que ha generado la modelización SCHA. Todos ellos normalizados por el valor del coeficiente g_0^0. Además, en el Anexo 7, se analizan en detalle las características de los primeros coeficientes.

Tabla 7.3. *Coeficientes de Gauss generados por el modelo SCHA. Cada 50 años.*

T	g_1^0	g_1^1	h_1^1	g_2^0	g_2^1	h_2^1	g_2^2	h_2^2	g_3^0	g_3^1	h_3^1	g_3^2	h_3^2	g_3^3	h_3^3
0	0.0000	-0.2928	-0.0179	0.0390	0.0200	0.0000	0.0637	0.0141	-0.0120	0.0000	0.0007	-0.0180	-0.0036	0.0000	0.0000
50	0.0000	-0.2928	-0.0179	0.0390	0.0200	0.0000	0.0682	0.0168	-0.0120	0.0000	0.0022	-0.0180	-0.0036	0.0000	0.0000
100	0.0000	-0.2991	-0.0089	0.0373	0.0193	-0.0096	0.0747	0.0191	-0.0114	0.0000	0.0086	-0.0184	-0.0029	0.0000	0.0000
150	0.0000	-0.3046	-0.0073	0.0324	0.0173	-0.0109	0.0819	0.0190	-0.0097	0.0000	0.0093	-0.0191	-0.0032	0.0000	0.0000
200	0.0000	-0.3225	-0.0150	0.0292	0.0314	0.0000	0.0818	0.0148	-0.0093	-0.0081	0.0022	-0.0185	-0.0038	0.0000	0.0000
250	0.0602	-0.3764	-0.0140	-0.0118	0.0562	0.0000	0.0772	0.0111	0.0000	-0.0178	0.0000	-0.0159	-0.0046	0.0000	0.0041
300	0.0929	-0.3869	-0.0120	-0.0406	0.0606	0.0000	0.0782	0.0000	0.0094	-0.0209	0.0000	-0.0179	0.0000	0.0038	0.0035
350	0.0274	-0.3297	-0.0096	0.0000	0.0455	0.0000	0.0756	0.0000	0.0000	-0.0179	-0.0015	-0.0204	-0.0029	0.0066	0.0051
400	0.0307	-0.3235	-0.0059	0.0000	0.0488	0.0000	0.0677	-0.0063	0.0000	-0.0186	-0.0012	-0.0186	0.0000	0.0063	0.0049
450	0.0368	-0.3130	0.0000	0.0000	0.0466	0.0000	0.0599	-0.0080	0.0000	-0.0156	0.0000	-0.0172	0.0000	0.0050	0.0045
500	0.0463	-0.3074	0.0000	0.0000	0.0464	0.0027	0.0513	-0.0115	0.0000	-0.0124	0.0000	-0.0152	0.0022	0.0026	0.0031
550	0.0564	-0.3046	0.0000	0.0000	0.0459	0.0054	0.0439	-0.0127	0.0000	-0.0096	-0.0017	-0.0123	0.0029	0.0000	0.0026
600	0.1040	-0.3112	0.0000	-0.0292	0.0411	0.0044	0.0432	-0.0128	0.0104	-0.0053	-0.0014	-0.0112	0.0033	0.0000	0.0026
650	0.1076	-0.2971	0.0043	-0.0287	0.0312	0.0000	0.0432	-0.0106	0.0122	0.0000	0.0000	-0.0104	0.0027	0.0000	0.0030
700	0.0690	-0.2769	0.0059	0.0000	0.0287	0.0000	0.0419	-0.0090	0.0047	0.0000	0.0000	-0.0103	0.0025	0.0000	0.0024
750	0.0000	-0.2228	0.0135	0.0409	0.0000	0.0000	0.0520	-0.0052	-0.0048	0.0082	0.0000	-0.0164	0.0000	0.0042	0.0000
800	0.0000	-0.2232	0.0000	0.0357	0.0000	0.0250	0.0568	-0.0070	0.0000	0.0058	-0.0154	-0.0196	0.0000	0.0056	0.0000
850	-0.1069	-0.1897	0.0282	0.1151	0.0000	0.0000	0.0459	-0.0037	-0.0280	0.0067	0.0000	-0.0153	0.0000	0.0000	0.0000
900	-0.0579	-0.2142	0.0394	0.0816	0.0000	0.0000	0.0464	-0.0040	-0.0197	0.0102	0.0000	-0.0145	0.0000	0.0000	0.0000
950	0.0000	-0.2806	0.0559	0.0479	0.0341	0.0000	0.0362	-0.0090	-0.0138	0.0000	0.0033	-0.0087	0.0043	-0.0058	-0.0039
1000	0.0647	-0.3264	0.0679	0.0000	0.0419	0.0000	0.0408	-0.0106	0.0000	0.0000	0.0042	-0.0075	0.0036	-0.0071	-0.0033
1050	0.0560	-0.3371	0.0670	0.0000	0.0420	0.0000	0.0485	-0.0080	0.0000	0.0000	0.0042	-0.0087	0.0000	-0.0063	0.0000
1100	0.0394	-0.3325	0.0547	0.0000	0.0348	0.0083	0.0624	-0.0091	0.0023	0.0000	0.0000	-0.0142	0.0000	-0.0031	-0.0027
1150	0.0826	-0.3936	0.0538	-0.0323	0.0631	0.0092	0.0647	-0.0062	0.0098	-0.0121	0.0000	-0.0143	0.0000	-0.0039	-0.0042
1200	0.0283	-0.3664	0.0430	0.0000	0.0596	0.0102	0.0682	-0.0048	0.0000	-0.0147	0.0000	-0.0173	0.0018	-0.0019	-0.0058
1250	0.0205	-0.3616	0.0346	0.0000	0.0589	0.0104	0.0716	0.0000	0.0000	-0.0163	0.0000	-0.0189	0.0000	0.0000	-0.0059
1300	0.0674	-0.4054	0.0298	-0.0351	0.0787	0.0104	0.0691	0.0055	0.0078	-0.0242	0.0000	-0.0169	0.0000	0.0000	-0.0070
1350	0.0080	-0.3524	0.0179	0.0000	0.0620	0.0100	0.0729	0.0065	0.0000	-0.0212	0.0000	-0.0201	0.0000	0.0034	-0.0074
1400	0.0112	-0.3449	0.0114	0.0000	0.0620	0.0104	0.0685	0.0076	0.0000	-0.0199	0.0000	-0.0179	0.0000	0.0029	-0.0072
1450	0.0231	-0.3349	0.0170	0.0000	0.0627	0.0000	0.0606	0.0074	0.0000	-0.0167	0.0069	-0.0143	0.0000	0.0000	-0.0053
1500	0.0320	-0.3194	0.0158	0.0000	0.0583	0.0000	0.0571	0.0043	0.0000	-0.0137	0.0074	-0.0134	0.0000	0.0000	-0.0037
1550	0.0393	-0.3040	0.0139	0.0000	0.0552	0.0000	0.0532	0.0000	0.0000	-0.0125	0.0072	-0.0139	0.0000	0.0000	-0.0020
1600	0.0446	-0.2925	0.0000	0.0000	0.0539	0.0080	0.0459	-0.0032	0.0000	-0.0116	0.0022	-0.0132	0.0000	0.0000	0.0000
1650	0.0466	-0.2825	-0.0075	0.0000	0.0500	0.0000	0.0358	-0.0037	0.0000	-0.0080	0.0058	-0.0104	0.0000	0.0000	0.0019
1700	0.0353	-0.2567	-0.0261	0.0000	0.0319	0.0000	0.0345	0.0000	0.0043	0.0000	0.0047	-0.0129	-0.0022	0.0029	0.0042
1750	0.0642	-0.2868	-0.0510	-0.0240	0.0496	0.0080	0.0232	0.0000	0.0111	-0.0068	0.0000	-0.0103	-0.0023	0.0024	0.0056
1800	0.0717	-0.3100	-0.0597	-0.0332	0.0612	0.0073	0.0149	-0.0023	0.0116	-0.0108	0.0000	-0.0089	0.0000	0.0022	0.0070
1850	0.0204	-0.3019	-0.0562	0.0000	0.0625	0.0056	0.0146	0.0000	0.0000	-0.0138	0.0000	-0.0096	-0.0013	0.0031	0.0082
1900	0.0275	-0.3147	-0.0562	-0.0081	0.0625	0.0056	0.0146	0.0000	0.0000	-0.0138	0.0000	-0.0096	-0.0013	0.0031	0.0082

Hay que tener en cuenta que estos coeficientes no pueden ser usados con cualquier expansión en armónicos esféricos, si no que sólo puede ser usada en aquella que se caracteriza por los parámetros de entrada: $K_{máx}$ = 3, con un casquete centrado en 45º N, 10º E y con semiángulo θ_0 = 30º. Los armónicos esféricos se caracterizan por estar sometidos a la normalización de Schmidt y tener grado no entero. Además de ser generados mediante B-splines en intervalos de 100 años cada 50 años.

Se ha considerado un valor arbitrario de g_0^0, que hemos establecido en -10000 nT. A partir de él hemos reescalado el resto de los coeficientes. Aunque como indicamos anteriormente el valor numérico de dicho coeficiente no afecta a los valores de declinación e inclinación.

Tras la obtención del modelo se ha procedido al cálculo de errores, para establecer la bondad de ajuste del modelo frente a los datos de entrada y para establecer los errores de incertidumbre para los valores de declinación e inclinación.

Se ha comparado con modelos globales. En primer lugar con el modelo global CALS3K.2 que se ha utilizado para obtener los valores de contorno para el modelo SCHA. También lo compararemos con el modelo de Hongre et al. (1998) definido en el intervalo de 0 hasta 1700 años.

Estos temas serán tratados en los apartados siguientes.

4. Cálculo de errores y error rms.

La rutina de la técnica SCHA permite obtener el error de los coeficientes de Gauss. Error que será usado para el cálculo en la incertidumbre de la declinación e inclinación del modelo SCHA. Para ello aplicaremos el método de propagación de errores, hasta relacionar el error de la declinación y la inclinación (ΔD e ΔI) en función de los errores de los coeficientes de Gauss: Δg y Δh.

Si tenemos en cuenta las expresiones (2.6), (4.10) y (7.3) y siguiendo su nomenclatura, tras aplicar el método de propagación de errores, se puede demostrar que el error de la declinación y la inclinación vienen dados por:

$$\Delta D = \chi \frac{\sqrt{\Delta X^2 \cdot Y^2 + \Delta Y^2 \cdot X^2}}{(X^2 + Y^2)}$$
$$\Delta I = \chi \frac{\sqrt{\Omega^2 \cdot Z^2 + \Delta^2 Z \cdot H^2}}{(X^2 + Y^2 + Z^2)} \qquad (7.7)$$

donde:

$$\Omega = \sqrt{\frac{\Delta X^2 \cdot X^2 + \Delta Y^2 \cdot Y^2}{X^2 + Y^2}} \quad \text{y} \quad \chi = \frac{180^o}{\pi} \qquad (7.8)$$

Siendo, X, Y y Z los valores de las componentes del campo geomagnético que se obtienen con los coeficientes de Gauss del modelo SCHA; e ΔX, ΔY y ΔZ sus errores respectivos.

Estos errores de las componentes (ΔX, ΔY y ΔZ) están expresados en coordenadas geodésicas. Por tanto, para relacionarlos con los errores de los coeficientes de Gauss, hay que tener en cuenta tanto la transformación de coordenadas geodésicas a geocéntricas, como el giro para referirlos al centro del casquete.

Al pasar de coordenadas geodésicas a geocéntricas, la relación entre los errores de las componentes antes y después de la transformación viene dada en función del ángulo β, que es la diferencia entre latitudes geodésicas y geocéntricas (ver figura 4.6):

$$\begin{aligned} \Delta X^2 &= \cos^2\beta \cdot \Delta X'^2 + \sin^2\beta \cdot \Delta Z'^2 \\ \Delta Y^2 &= \Delta Y'^2 \\ \Delta Z^2 &= \sin^2\beta \cdot \Delta X'^2 + \cos^2\beta \cdot \Delta Z'^2 \end{aligned} \tag{7.9}$$

Donde $\Delta X'$, $\Delta Y'$ y $\Delta Z'$ son los errores de las componentes dadas en coordenadas geocéntricas. Al aplicar el giro de las coordenadas geocéntricas para referirlas al centro del casquete, las relaciones entre los errores antes y después del giro vienen dadas por:

$$\begin{aligned} \Delta X'^2 &= \cos^2\alpha \cdot \Delta X_g{}^2 + \sin^2\alpha \cdot \Delta Y_g{}^2 \\ \Delta Y'^2 &= \sin^2\alpha \cdot \Delta X_g{}^2 + \cos^2\alpha \cdot \Delta Y_g{}^2 \\ \Delta Z'^2 &= \Delta Z_g{}^2 \end{aligned} \tag{7.10}$$

siendo α, el ángulo medido entre los meridianos referidos al polo norte geográfico y al nuevo polo (ver figura 4.7). E ΔX_g, ΔY_g y ΔZ_g son los errores de las componentes ya giradas y referidas al centro del casquete esférico.

Finalmente, los errores de las coordenadas transformadas y giradas están relacionados con los errores de los coeficientes de Gauss, mediante:

$$\begin{aligned} \Delta X_g^2 &= \sum_{j=0}^{J} \alpha^2{}_j \cdot \Delta g^2{}_j \\ \Delta Y_g^2 &= \sum_{j=0}^{J} \beta^2{}_j \cdot \Delta g^2{}_j \\ \Delta Z_g^2 &= \sum_{j=0}^{J} \gamma^2{}_j \cdot \Delta g^2{}_j \end{aligned} \tag{7.11}$$

Con las expresiones dadas desde (7.7) hasta (7.11), podemos relacionar el error en declinación e inclinación con el error proporcionado por el modelo SCHA (errores de los coeficientes de Gauss). Este error se calcula para cualquier punto dentro del área del casquete y para un determinado tiempo (dentro del intervalo temporal que hemos establecido).

La comparación de las curvas bayesianas (con banda de error incluida) y las del modelo SCHA con sus correspondientes bandas de error vienen dadas en la figura 7.15.

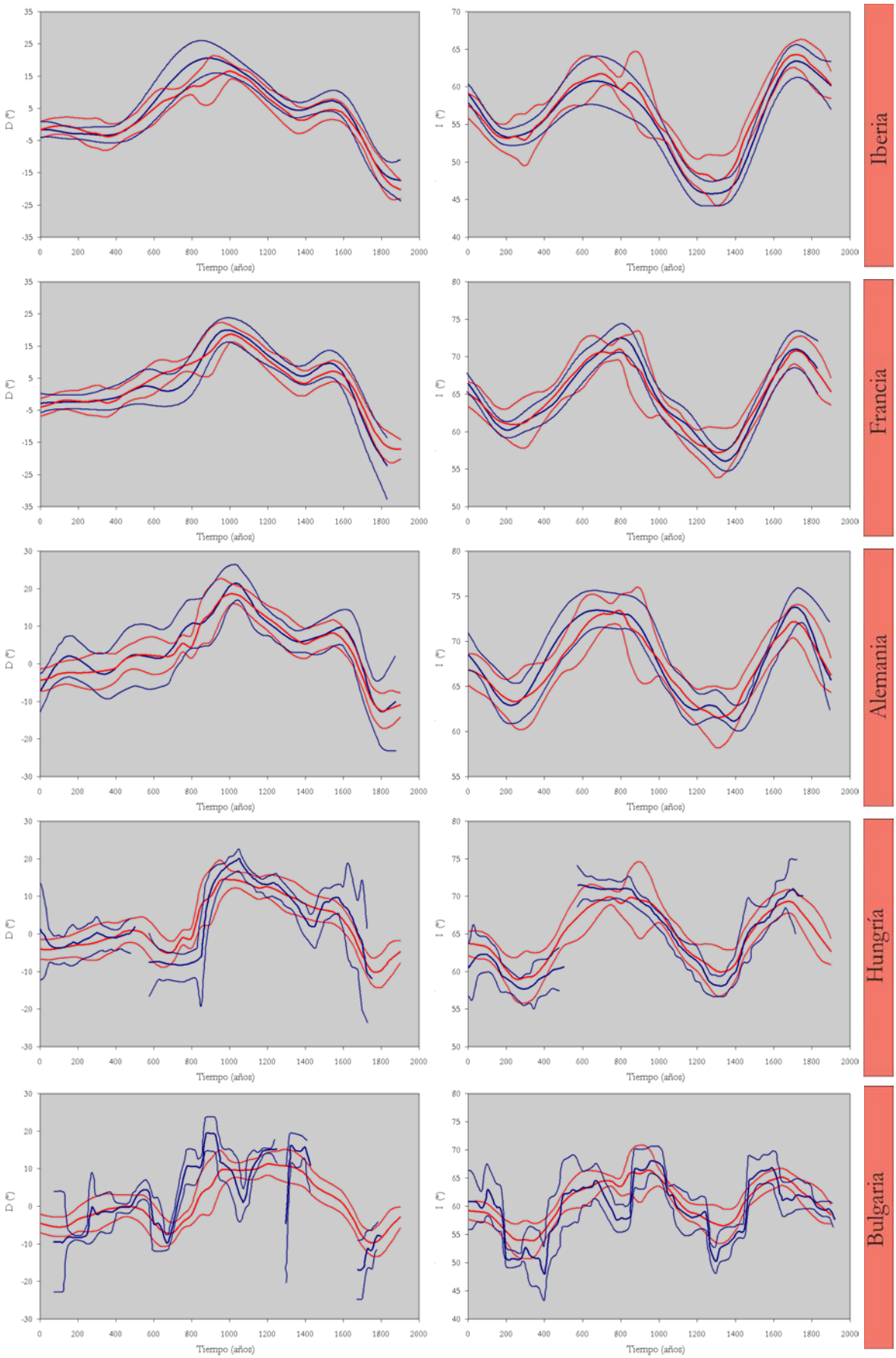


Figura 7.15. Comparación de las curvas bayesianas con las proporcionadas por el modelo SCHA, junto con las bandas de error correspondientes. Azul: bayesianas. Rojas: modelo SCHA.

Debido al carácter espacio–temporal del modelo podemos analizar el error global en el espacio e independientemente en el tiempo. El error global espacial queda reflejado en la figura 7.16. En cuanto a la declinación, el error espacial fluctúa entorno a los 2.5º, aumentando en la zona central del casquete esférico y a altas latitudes. El error espacial global de la inclinación es menor que la declinación (en general 1º menos) y éste aumenta en el centro del casquete y para bajas latitudes.

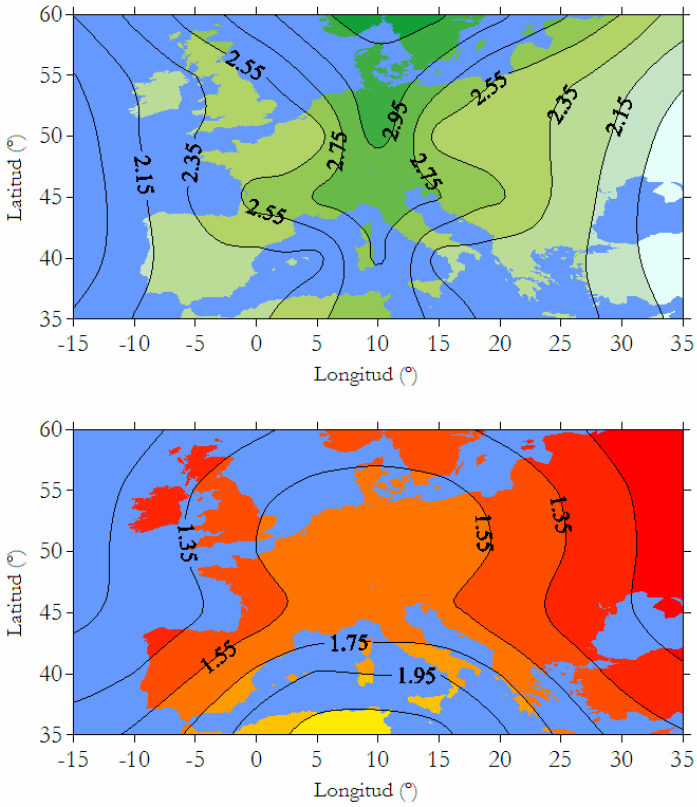


Figura 7.16. Error espacial global del modelo SCHA. Arriba: error en declinación. Abajo: error en inclinación.

En el error temporal domina principalmente el generado por las curvas bayesianas con períodos más cortos (cambios bruscos), como ocurre en la curva de Bulgaria. Vemos como el error está modulado por los cambios en declinación e inclinación de la curva de Bulgaria en los años 300, 600, 900, 1300 y 1800, donde el modelo se desvía de los datos reales (curva bayesiana).

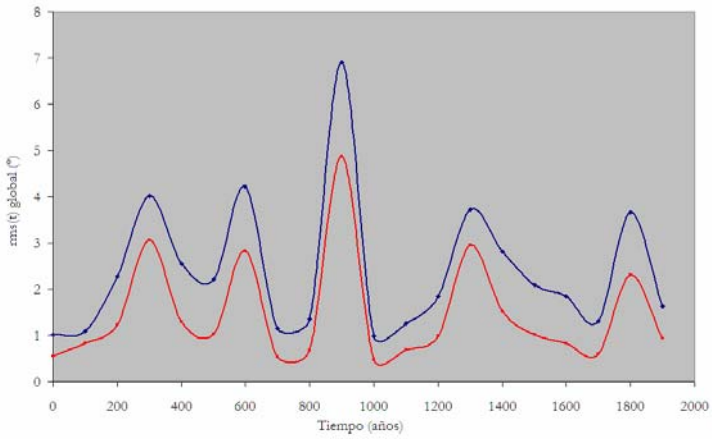


Figura 7.17. Error temporal global del modelo SCHA, para declinación (curva azul) e inclinación (curva roja).

Un análisis de error *rms* global del modelo da valores de 2.5º para la declinación, de 1.3º para la inclinación y un error de 2.8º para el conjunto declinación-inclinación.

7D Comparación con modelos globales de campo geomagnético.

Vamos a comparar el modelo SCHA obtenido con los modelos globales de Korte et al. (2005_2) CALS3K.2 y de Hongre et al. (1998). Comparamos cada modelo (SCHA, CALS3K.2 y Hongre) con las curvas de variación paleosecular (asumidas como datos reales), calculando el error rms en cada caso.

En Hongre et al. (1998) hemos generado una rutina informática para poder obtener la variación secular en las coordenadas a las que están referidas las CVPS, a partir de los coeficientes que se dan en la publicación del modelo. Hay que tener en cuenta, también, que este modelo está definido para el intervalo temporal de 0 a 1700 años.

En la tabla 7.4 se dan los valores del error rms obtenido para el modelo SCHA y los dos modelos globales. El error se ha calculado para las componentes angulares declinación e inclinación independientemente y en conjunto. El modelo SCHA se ajusta mejor a los datos reales (curvas de variación paleosecular) que ambos modelos globales, tanto en declinación, en inclinación, como en el conjunto global declinación-inclinación.

Tabla 7.4. *Errores rms del modelo SCHA y los modelos globales.*

Modelo	Componente c.m.t.	rms (º)
SCHA	Declinación	2.5º
	Inclinación	1.3º
	Declinación + Inclinación	2.8º
CALS3K.2 Korte et al. (2005_2)	Declinación	3.1º
	Inclinación	1.8º
	Declinación + Inclinación	3.6º
Hongre et al. (1998)	Declinación	3.2º
	Inclinación	1.9º
	Declinación + Inclinación	3.7º

A continuación representamos las curvas bayesianas junto con los modelos SCHA, CALS3K.2 y el de Hongre et al. (1998). Tanto las curvas bayesianas como el modelo SCHA poseen bandas de error, sin embargo el modelo CALS3K.2 y el de Hongre et al. (1998) no, ya que no las proporcionan.

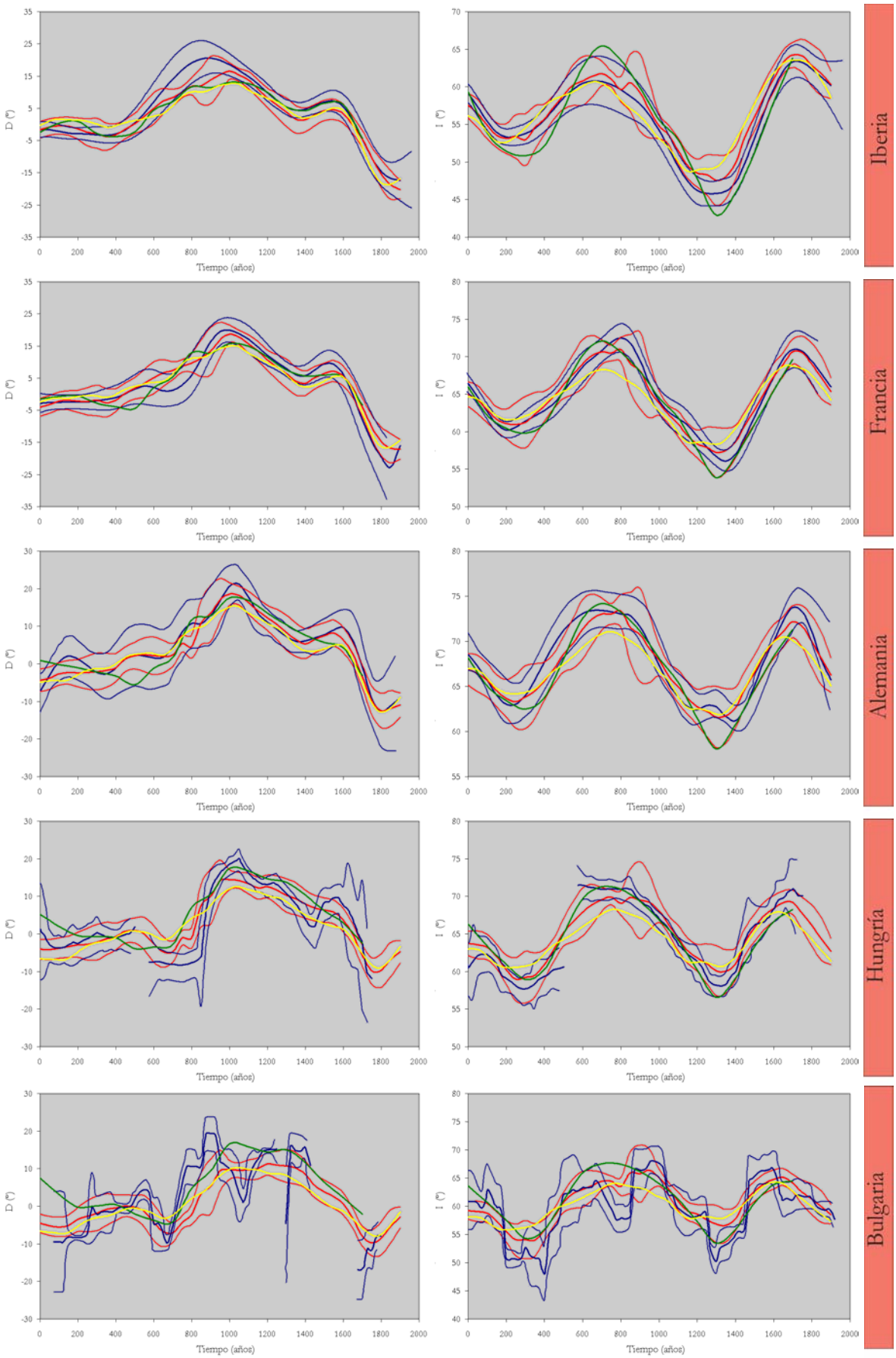


Figura 7.18. CVPS bayesianas (azul), modelo SCHA más error (roja), modelo CALS3K.2 (amarillo) y modelo de Hongre et. al (1998) (verde).

7E CVPSs y mapas de declinación e inclinación del modelo SCHA.

Tras la obtención del modelo SCHA válido en Europa para los últimos dos milenios, se ha generado dos programas informáticos, los programas *SCHACOEF* y *SCHACVPS*, incluidos en un CD que se adjunta al final del trabajo.

1. *SCHACOEF*: Este programa informático desarrollado en lenguaje Matlab® 6.5 permite la representación de los mapas de declinación e inclinación para cualquier año (perteneciente al intervalo temporal 0 – 1900 d.C.) generados a partir del modelo SCHA. Los mapas están delimitados por las coordenadas 15º W / 35º E en longitud y 35º N / 60º N en latitud.

Junto con los mapas de isógonas (igual declinación) e isoclinas (igual inclinación) se proporcionan, también, el conjunto de coeficientes SCHA que definen al campo geomagnético para esa época. E incluso se permite la comparación de dichos mapas SCHA con los dados por el modelo CALS3K.2 de Korte et al. (2005_2) y el de Hongre et al. (1998).

Además, se genera dos ficheros: *dimap.dat y schacoef.dat*. El primero contiene las coordenadas y los valores de declinación e inclinación de los mapas; y el segundo los coeficientes SCHA para la época dada. En la figura 7.19 se muestra una imagen del visualizador que genera el programa *SCHACOEF* tras introducir un año determinado (se ha elegido el año 1492.0). Dichos coeficientes se obtienen mediante interpolación por B-splines cúbicos de los coeficientes dados en la Tabla 7.3.

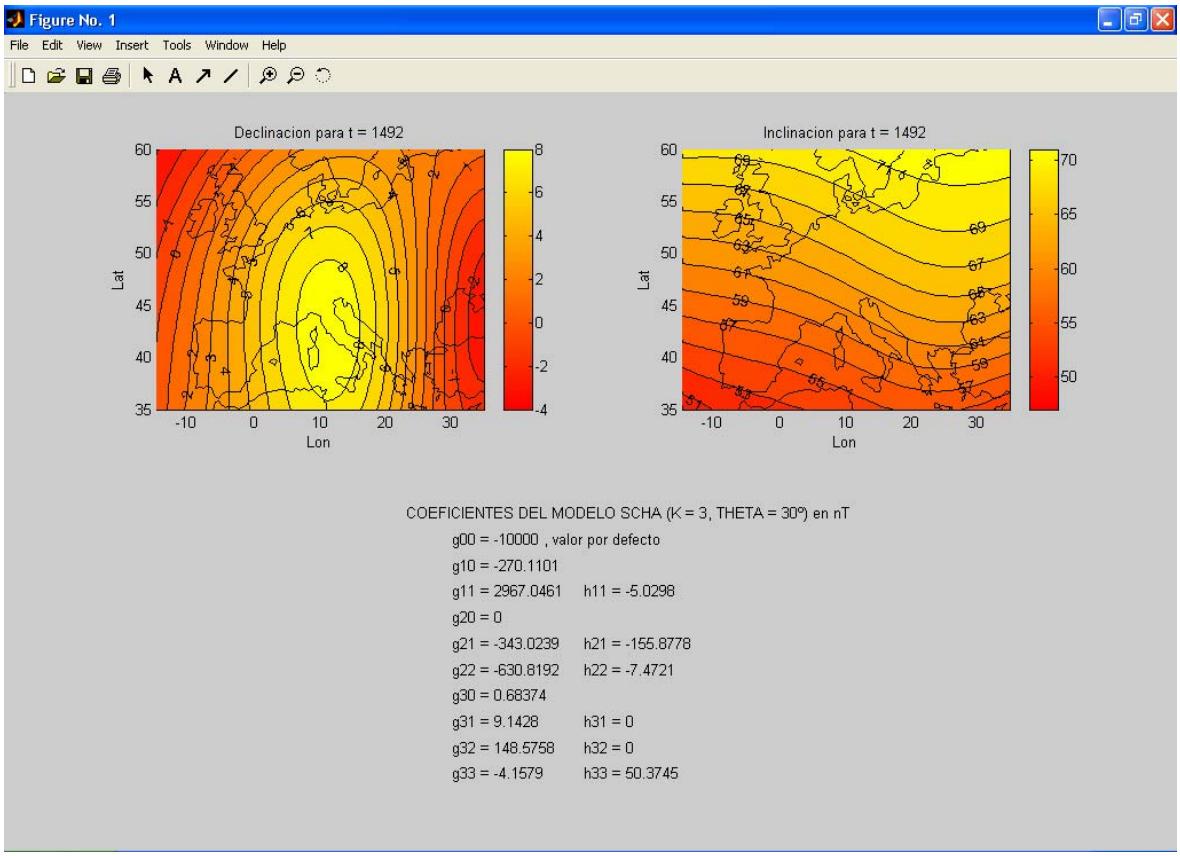


Figura 7.19. Visualizador del programa SCHACOEFF. Arriba izquierda: mapa de declinación para la época 1492.0. Arriba derecha: mapa de inclinación. Abajo: coeficientes del modelo SCHA para dicha época.

2. *SCHACVPS*: Esta rutina, desarrollada también en Matlab® 6.5, genera las curvas de variación paleosecular para todo el intervalo de validez del modelo SCHA. Los datos de entrada al programa son las coordenadas del punto al que se refiere la CVPS. Dichas coordenadas están delimitadas por los valores que se han dado anteriormente.

El visualizador del programa, representa la variación paleosecular en declinación, en inclinación y en ambas conjuntas, proporcionando el intervalo de error de las mismas. Los datos de declinación e inclinación en función del tiempo, así como sus errores, son almacenados en el fichero *cvps_scha.dat*.

En la figura siguiente se muestra una captura del visualizador tras introducir un par de coordenadas en el programa *SCHACVPS*. Las coordenadas son 45.0º N, 10º E.

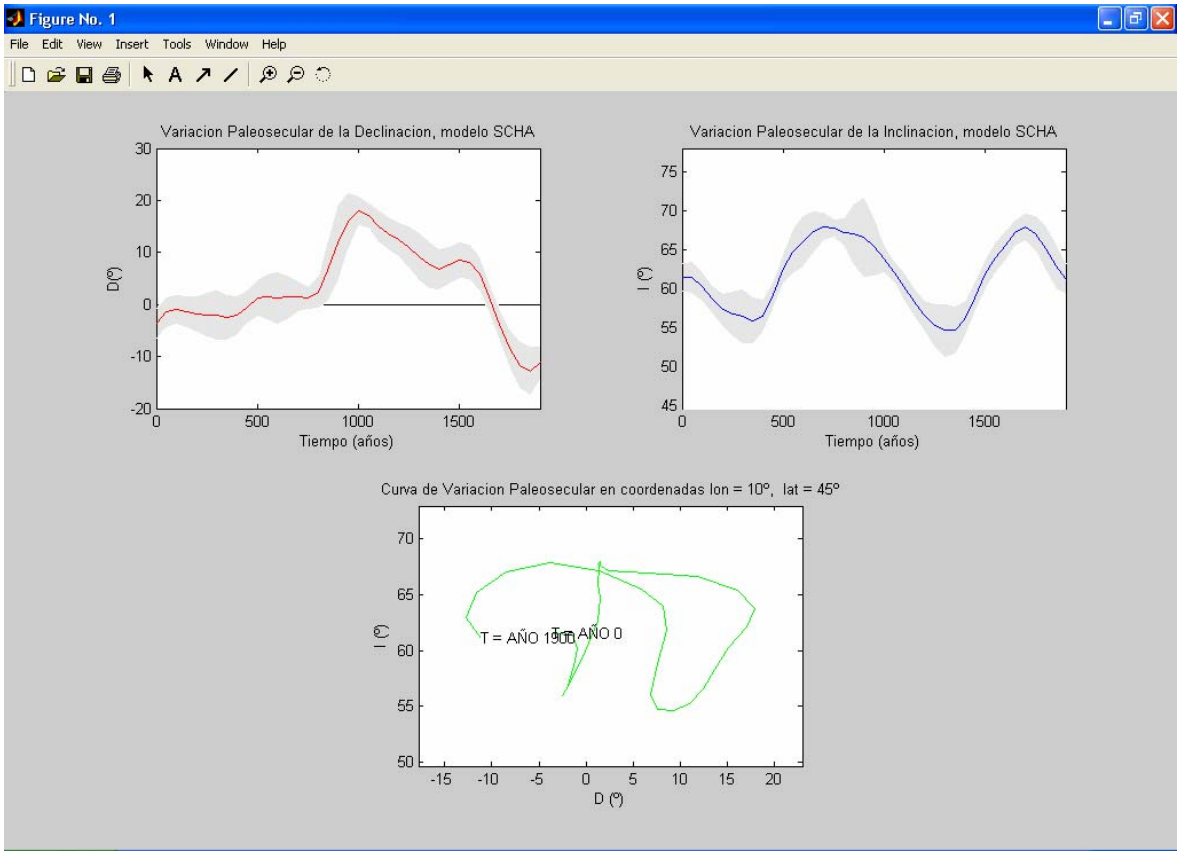


Figura 7.20. Visualizador del programa SCHACVPS. Arriba izquierda: declinación con banda de error en función del tiempo. Arriba derecha: inclinación con banda de error en función del tiempo. Abajo: diagrama de declinación – inclinación.

Este programa, al igual que el anterior, permite la comparación de las CVPS generada con las dadas por los modelos globales de Korte et al. (CALS3K.2, 2005_2) y Hongre et al. (1998) en el mismo par de coordenadas.

En el *Anexo 6* se aportan los mapas de declinación e inclinación generados por el programa SCHACOEF a intervalos temporales de 100 años (desde el año 0 hasta el año 1900). Con estos mapas se representa la evolución espacio-temporal del campo geomagnético en Europa para los últimos dos mil años. Alcanzando, así, el objetivo final de este Trabajo de Investigación.

8. Conclusiones y futuros trabajos.

En este trabajo se ha obtenido el primer modelo regional de campo geomagnético para Europa con validez temporal en los dos milenios de nuestra Era, a partir de datos arqueomagnéticos.

El continente europeo es la región de la superficie de la Tierra que cuenta con un mayor número de estudios arqueomagnéticos. Especialmente denso es el número de datos arqueomagnéticos de los últimos dos milenios. Consecuentemente, Europa es, también, la región que cuenta con una mayor densidad y calidad de curvas de Variación Paleosecular. Todo ello hace que esta región sea un área idónea para realizar modelizaciones regionales del c.m.t. En este trabajo se aborda por primera vez este problema.

Como primera fase del trabajo se investiga la solución que ofrece el método de inversión elegido (SCHA) utilizando como datos de entrada los que ofrece el modelo global de Korte et al. (2005) en los puntos en los que se tienen datos de variación paleosecular (París, Madrid, Sofía, Budapest y Göttingen). Para a continuación utilizar como datos de entrada las curvas de variación paleosecular de los últimos dos milenios de Bulgaria (Kovacheva et al., 1998), Francia (Gallet et al., 2002), Alemania (Schnepp et al., 2005), Hungría (Marton et al., 2006) e Iberia (Gómez-Paccard et al., 2006).

Tras analizar los diferentes métodos analíticos que pueden representar el campo geomagnético, se ha elegido la técnica SCHA porque se ajusta a las necesidades que se han buscado:

- Ser aplicable a una región de la superficie de la Tierra, ya que los datos a analizar se encuentran distribuidos en cinco países del continente Europeo.

- Que dicha técnica satisfaga las condiciones físicas que debe de cumplir un campo magnético en ausencia de cargas magnéticas: la ecuación de Laplace.

- Que permita una representación parcial del campo geomagnético a través del análisis de las componentes angulares del campo (declinación e incitación) y que además dicha representación aporte una evolución espacio-temporal del c.m.t.

- A través del modelo obtenido se pueda evaluar el campo geomagnético en cualquier otro punto dentro de la región establecida, a través de los coeficientes del modelo.

Como las CVPSs de Europa solo proporcionan (en la mayoría de los casos) valores de declinación e inclinación, se ha modificado la técnica SCHA para poder considerar sólo datos de declinación e inclinación. Esta nueva modificación ha actualizado la rutina original de Haines (1988), permitiendo elegir una opción más en el modelado de las componentes del campo geomagnético.

Un análisis previo de los datos de las CVPSs permite caracterizar a la variación paleosecular del c.m.t. en Europa con períodos temporales de 1700 años para la declinación y de 1100 años para la inclinación. Además de otros períodos característicos inferiores. Este análisis ha permitido establecer un intervalo temporal mínimo de muestreo en las curvas originales para poder obtener los datos de entrada del modelo SCHA.

La elección de los parámetros que definen el modelo SCHA es fundamental para un buen funcionamiento de método. Para ello, se han considerado varios conjuntos de parámetros eligiendo aquellos que minimizaban las discrepancias entre los datos de entrada y los generados por el modelo.

Hemos aplicado previamente la técnica SCHA a las componentes XYZ del campo geomagnético en la península Ibérica así como en datos proporcionados por el modelo global CASL3K.2, dando buenos resultados. Y tras la modificación de la técnica se ha vuelto a validar a través de modelo global CALS3K.2.

Los resultados del modelo SCHA indican un buen ajuste. Esto puede verse tanto en la comparación del modelo con las CVPSs o con el error *rms* global del mismo. Además se ha reducido el error *rms* entre las CVPSs y los modelos globales CALS3K.2 (Korte et al., 2005) y Hongre et al. (1998).

Los coeficientes del modelo permiten generar cualquier valor de declinación e inclinación en el área de estudio, pudiendo obtener mapas de declinación e inclinación para cualquier época dentro del intervalo temporal considerado. Esto ha permitido observar simultáneamente la evolución espacial y temporal del campo.

Como indica el título del trabajo, con este modelo regional se da el primer paso en la modelización del campo geomagnético a través de datos arqueomagnéticos mediante la técnica SCHA. Debido a los resultados, que creemos satisfactorios, se abren nuevas expectativas de futuros trabajos. El siguiente paso sería la aplicación de la técnica a los datos direccionales *in situ*, para así eliminar el error que se comente al desplazar éstos a los puntos de referencia donde se construyen las curvas.

i. Anexos.

Anexo 1

Propiedades de las funciones de Legendre y de los armónicos esféricos.

El potencial magnético escalar viene expresado en función de los armónicos esféricos. Y éstos se definen a través de las funciones asociadas de Legendre con normalización de Schmitd.

1. Funciones asociadas de Legendre de primera especie.

Las funciones asociadas de Legendre vienen dadas por:

$$P_n^m(z) = (1-z^2)^{m/2}\frac{d^m P_n}{dz^m} \tag{A1.1}$$

donde el polinomio de Legendre puede ser generado por la relación:

$$P_n(z) = \sum_{j=0}^{k}(-1)^j\frac{(n-2j)!z^{n-2j}z^{n-2j}}{2^n j!(n-j)!(n-2j)!} \quad , \quad k = \text{entero} = \begin{cases} n/2 \\ (n-1)/2 \end{cases} \tag{A1.2}$$

En general la variable z se toma por cosθ. En la tabla siguiente se da las primeras funciones de Legendre de primera especie en función del grado n y el orden m.

Tabla A1.1. *Primeras funciones asociadas de Legendre de primera especie.*

n	m	$P_n^m(\cos\theta)$
1	0	$\cos\theta$
1	1	$\sin\theta$
2	0	$(\cos^2\theta-1)/2$
2	1	$3\sin\theta\cos\theta$
2	2	$3\sin^2\theta$
3	0	$(5\cos^3\theta-3\cos\theta)/2$
3	1	$\sin\theta(15\cos^2\theta-3)/2$
3	2	$15\sin^2\theta\cos\theta$
3	3	$15\sin^3\theta$

Estas funciones son ortogonales en la esfera, es decir, que verifican:

$$\int_{-1}^{1} P_n^m(\cos\theta)\cdot P_k^m(\cos\theta)d\Omega = \begin{cases} 0 & \text{for } k \neq n \\ \dfrac{2}{2n+1}\dfrac{(n+m)!}{(n-m)!} & \text{for } k = n \end{cases} \tag{A1.3}$$

En la figura A.1 se representan las funciones de Legendre de primera especie de grado 3 dadas en la tabla A.1.

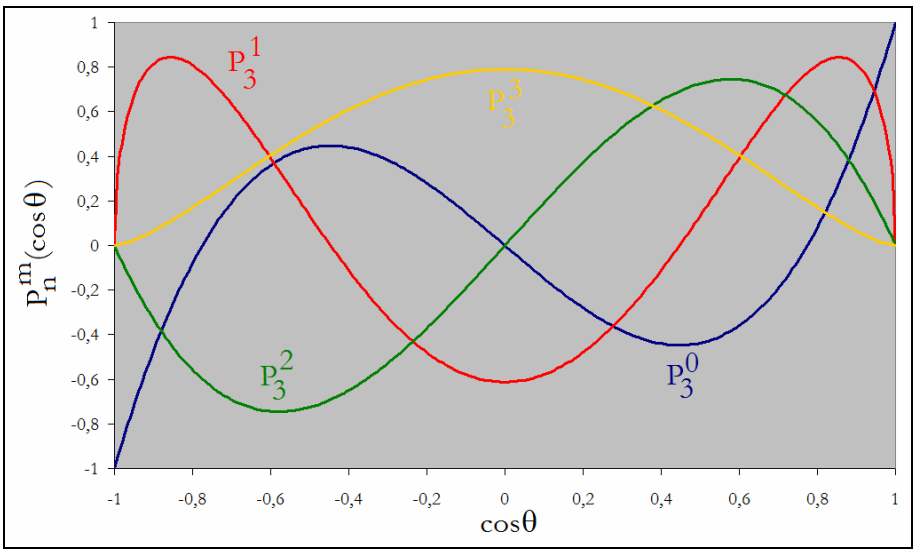


Figura A.1. Funciones de Legendre de grado 3 en función de la colatitud.

2. Armónicos esféricos.

Si añadimos la coordenada longitudinal a las funciones de Legendre tenemos los armónicos esféricos:

$$\begin{aligned} S_n(\theta,\lambda) &= P_n^m(\cos\theta)\cos m\lambda \\ S_n(\theta,\lambda) &= P_n^m(\cos\theta)\sin m\lambda \end{aligned} \qquad \text{(A1.4)}$$

Estas funciones bidimensionales también son ortogonales sobre la esfera. Esta ortogonalidad implica que los coeficientes del desarrollo en armónicos esféricos de una función arbitraria puedan determinarse independientemente, es decir:

$$f(\theta,\lambda) = \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{n} c_n^m S_n^m(\theta,\lambda) \qquad \text{(A1.5)}$$

y el coeficiente se puede obtener como:

$$c_n^m = \int_0^{2\pi} d\lambda \int_0^{\pi} d\Omega (S_n^m(\theta,\lambda))^* f(\theta,\lambda) \qquad \text{(A1.6)}$$

Los armónicos esféricos tienen n – m ceros a lo largo de los paralelos de la esfera (debido a las funciones de Legendre) y a lo largo de un meridiano, 2m ceros (debido a las funciones trigonométricas en longitud). Ello hace que la esfera quede dividida en sectores dependiendo de los valores de m y n. tenemos así los armónicos zonales, teserales y sectoriales.

Armónicos zonales. En este caso m = 0, es decir, equivalen a los polinomios de Legendre. Son de grado n en $\cos\theta$ por lo que tienen n ceros, lo que implica n cambios de signos y n + 1 zonas diferentes con signo alternante. Estos ceros son reales y están en el intervalo $1 \geq \cos\theta \geq -1$, que equivale a $0 \leq \theta \leq \pi$.

Armónicos teserales. Para estos armónicos $m \neq 0$ y $n \neq m$. cambian de signo n – m veces ene el intervalo $0 \leq \theta \leq \pi$ lo que implica la existencia de n – m paralelos y (n – m + 1) zonas distintas en cada cuña. Además las funciones $\cos m\lambda$ y $\sin m\lambda$ tienen 2m ceros en $0 \leq \lambda \leq 2\pi$ luego habrá m meridianos dividiendo la esfera en m + 1 cuñas con signos alternantes.

Armónicos sectoriales. Aquí el valor m y n coinciden, pero son distinto de cero, por lo que las cuñas no están divididas por paralelos. El número de cuñas con signo alternante es m + 1 como en el caso anterior, ya que el número de ceros es 2m.

En la figura siguiente se representa un ejemplo de cada tipo de armónicos descritos anteriormente.

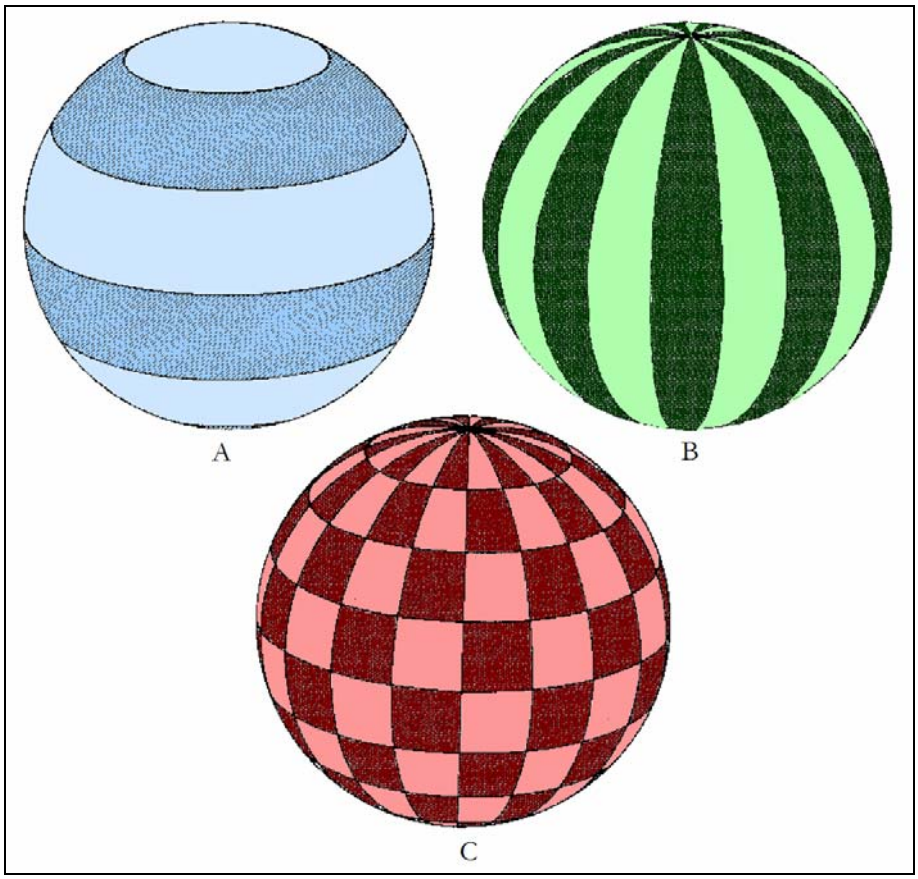


Figura A.2. Armónicos esféricos sobre la esfera. A: armónicos zonales. B: armónicos sectoriales. C: armónicos teserales. Imagen adaptada de Heiskanen y Moritz (1996)

Anexo 2

Bibliografía SCHA hasta 2006. Publicaciones hasta 2004 tomada de Gaya-Piqué (2004) Solo textos en inglés.

Sobre la técnica.

Haines, J. Geophys. Res., 90, 2583, 1985
Haines, HHI-Rep., 21, 27, 1987
Haines, Comput. & Geosc., 14, 413, 1988
Haines, J. Geomag. Geoelectr., 42, 1001, 1990
Haines, Phys. Earth Planet. Inter., 65, 231, 1991
De Santis, Geophys. J. Int., 106,253. 1991
De Santis, Geophys. Res. Lett., 19, 1065, 1992
Torta et al., Phys. Earth Planet. Inter., 74, 209, 1992
Haines, Geophys. J. Int., 114, 490, 1993
De Santis & Falcone, Proc. II Hot.-Marus. Symp., 1994
Torta & De Santis, Geophys. J. Int., 127, 441, 1996
De Santis et al., Phys. Earth Planet. Inter., 97, 15, 1996
De Santis et al., J. Geomag. Geoelectr., 49, 359, 1997
De Santis & Torta, J. Geodesy, 71, 526, 1997
De Santis et al., Annali di Geofisica, 40, 1161, 1997
Lowes, Geophys. J. Int., 136, 781, 1999
De Santis et al., Phys. Chem. Earth, A24, 935, 1999
Düzgit & Malin, Geophys. J. Int., 141, 829, 2000
Korte & Holme, Geophys. J. Int., 153, 253, 2003
Thébault et al., Geophys. J. Int., 159, 83 – 103, 2004
Thébault et al., J. Geophys. Res., 111 (B01102, doi:10.1029/2005JB003836), 2006.

Modelos de campo de referencia.

Haines & Newitt, J. Geomag. Geoelectr., 38, 895, 1986
Nevanlinna et al., Deut. Hydro. Zeits., 41, 177, 1988
Newitt & Haines, J. Geomagn. Geoelectr., 41, 249, 1989
De Santis et al., J. Geomagn. Geoelectr., 42, 1019, 1990
Newitt & Haines, Curr. Res. E, G.S.C., 275, 1991
Nevanlinna & Rynö, HHI-Rep., 22, 106, 1991
Torta et al., J. Geomag. Geoelectr., 45, 573, 1993
An et al., J. Geomag. Geoelectr., 46, 789, 1994
An et al., Geomagn. Aeron., 34, 581, 1995
Haines & Newitt, J. Geomag. Geoelectr., 49, 317, 1997
Kotzé & Barraclough, J. Geomag. Geoelectr., 49, 452, 1997
Chiappini et al., Phys. Chem. Earth, 24, N.5, 433, 1999
Kotzé, Earth Planets Space, 53, 357, 2001
De Santis etal., Geophys. Res. Lett., 29, N. 8, 33-1, 2002
Gaya-Piqué, PhD Thesis, Observatori de l'Ebre, URL, 162 pp., 2004.

Modelos de variación secular.

Haines, J. Geophys. Res. 90, 12563, 1985
García et al., Phys. Earth Planet. Inter. 68, 65, 1991
Miranda et al., J. Geomag. Geoelectr. 49, 373, 1997
Torta et al., Tectonophysics, 347,179, 2002
Kotzé, Earth Planets Space, 55, 111, 2003

Determinación del polo norte magnético.

Newitt & Niblett, Can. J. Earth Sci., 23, 1062, 1986
Newitt & Barton, J. Geomag. Geoelectr., 48, 221, 1996
Newitt et al., EOS, 83, 381, 2002

Anomalías y modelos de campo.

Haines, J. Geophys. Res., 90, 2593, 1985
De Santis et aL, NATO ASI Series C, 261, 1, 1989
Torta et al., Cahi. Cent. Eur. Geod. Seis.4, 179, 1991
An et al., J. Geomag. Geoelectr., 44, 243, 1992
Duka, Annali di Geofisica, 41, 49, 1998
Zhen-chang et al., Chin. J. Geophys., 41,42,1998
Rotanova & Odintsov, Phys. Chem. Earth, A24, 455-459, 1999
Rotanova et al., Acta Geophys. Pol., 48, 223-240, 2000
Korte & Haak, Phys. Earth Planet. Inter., 122, 205-220, 2000
Kotzé, Geophys. Res. Lett., 29, 10.1029/2001GL013868, 2002
Thébault et al., Submitted to J. Geophys. Res, 2006.

Variaciones geomagnéticas de origen externo

Walker, J. Atmos. Terr. Phys., 51, 67, 1989
Newitt & Walker, J. Geomag. Geoelectr., 42, 937, 1990
Haines & Torta, Geophys. J. Int., 118, 499, 1994
Torta et al., J. Geophys. Res., 102, 2483, 1997
Walker et al., J. Atmos. SoL Terr. Phys., 59, 1435, 1997
Amm, Ann. Geophys., 16, 413, 1998

Parámetros ionosféricos.

De Santis et al., Ann. Geophys., 9, 401, 1991
De Santis et al., Adv. Space Res., 12, (6)279, 1992
De Santis et al., Comput. & Geosc., 20, 849, 1994
EI-Arini et al., Proc. Int. Beacon Sat. Symp., 358, 1994
Dremukhina et al., J. Atmos. Sol. Terr. Phys., 60, 1517, 1998

Geodesia.

Jiancheng et al., Manuscr. Geod., 20, 265, 1995
Hwang & Chen, Geophys. J. Int., 129, 450, 1997

Anexo 3.

Estudio arqueomagnético de seis estructuras en el castro de Chao Samartín, Asturias.
Archaeomagnetic study of six structures from Chao Samartin Fort, Asturias.

F.J. Pavón Carrasco [1,2], V.C. Ruiz-Martínez [1], G. Catanzariti [1], R. Montes López [3] y A. Villa Valdés [3*]

[1] Dpto. Física de la Tierra I: Geofísica y Meteorología. Universidad Complutense de Madrid, 28040 Madrid, fjpavon@fis.ucm.es
[2] Instituto Geográfico Nacional, C/General Ibáñez de Ibero, 3, 28003 Madrid.
[3] Plan Arqueológico Cuenca del Navia. Servicio de Patrimonio Histórico y Cultural. Consejería de Cultura del Principado de Asturias. [3*] Director.

SUMMARY

This study addresses the absence of archaeomagnetic directional data from the NW of Iberia in the Secular Variation Curve for Iberia (SVC-I). The lithology of the archaeological structures from this zone also differs from those of the rest of the Peninsula. An archaeomagnetic study has been conducted in Castro Chao Samartín (concejo de Grandas de Salime, Asturias). Archaeological considerations indicate the site was occupied from the 8th centuries BC up until the 2nd century AD. A total of 52 samples from 7 different structures (one oven, four hearths and one sauna with two unknown different periods of use). The objectives of the study are; (i) to compare the results with those of the same age from the southern part of the Peninsula and with the radiometric dating, and (ii) to study the properties of the different lithologies (adobe, quartzites and slates) before similar heatings. Laboratory analysis includes stepwise demagnetisation of NRM, susceptibility vs temperature and rock magnetic studies. Site-mean characteristic directions have calculated following the hierarchical structure, applying fisherian distribution tests. Besides resolving the sense of the thermal gradient in one of the hearths, comparison of the results obtained with SVC-I has served to detect problems of magnetic anisotropy in slates (due to their high foliation, mainly affecting inclination records) and to validate the archaeological dating of the remaining lithologies. The results provide the first archaeomagnetic directions for the SVC-I from the northwestern Iberian Peninsula.

1. INTRODUCCIÓN

El arqueomagnetismo, o como podría llamarse también paleomagnetismo "Histórico", analiza las variaciones del campo geomagnético basándose en el análisis de estructuras arqueológicas. Para ello es necesario que estas estructuras cumplan condiciones arqueomagnéticas, es decir, que hayan sufrido un calentamiento y posterior enfriamiento durante o después de su formación; y que a lo largo del tiempo hasta su muestreo haya permanecido "in situ", ya que un basculeo de las mismas pueden producir cambios importantes en la dirección del campo magnético.

El hecho de que sean estructuras calentadas se debe a que en su mayoría los materiales de interés arqueomagnético contienen trazas de minerales ferromagnéticos (óxidos de hierro) que se imanan en la dirección del campo geomagnético que existe durante su último enfriamiento. Son de interés lugares que por su construcción o utilidad hayan sufrido calentamientos, como es el caso de hornos, hogares, termas… o lugares calentados de forma accidental, como incendios en paredes y suelos.

La forma de adquisición de dicha imanación es de origen térmico (termorremanencia), pues al calentarse la estructura a temperaturas superiores de la Curie, se elimina cualquier resto de orientación magnética y al enfriarse en presencia del campo geomagnético hasta una temperatura inferior de la de bloqueo, se reorientan en la dirección del mismo, quedando ésta "grabada" en la estructura.

La variación espacio-temporal del campo geomagnético (de origen interno) de largo período se denomina variación secular (VS), que en el caso de ser analizada durante períodos Históricos, se llama curva de variación Paleosecular (CVPS). Para la construcción de esta curva además de verificarse las condiciones arqueomagnéticas expuestas anteriormente, es necesario que las estructuras estén datadas cronológicamente.

En este trabajo se pretende aportar nuevos datos al catálogo de direcciones arqueomagnéticas en la Península Ibérica (Gómez-Paccard et al., 2006a), construyéndose así la CVPS para Iberia, que será de utilidad para la datación de yacimientos arqueológicos. La obtención de nuevas direcciones arqueomagéticas en el norte peninsular intentará apaliar la ausencia de datos a estas latitudes.

2. SITUACIÓN GEOGRÁFICA Y MUESTREO

El castro Chao Samartín, habitado desde el siglo VIII a.C. hasta la segunda mitad del siglo II de nuestra Era y situado en el concejo de Grandas de Salime (Principado de Asturias), ha sido objeto de estudio. En el se ha encontrado tres tipos de estructuras de interés arqueomagnético: hornos, hogares y termas. Para ello, se han muestreado en siete lugares distintos un total de 52 muestras. Corresponden a cuatro hogares: dos pétreos (C-4B y C-10B), uno latericio (C-15B) y otro mixto (C-22B); un horno de uso doméstico (C-18B) y a una sauna (Figura 1) con dos períodos temporales de uso distinto (T y TFE), ver Tabla 1.

Figura 1* – Sauna. *(Sauna)

El último uso de todas estas estructuras (a excepción del hogar mixto C-22B y la sauna TFE) se ha podido datar, según criterios arqueológicos, en torno a la segunda mitad o tercer cuarto del siglo II d.C. Del hogar C-22B se piensa que su último uso pudo ser anterior a las demás estructuras. En cuanto a la sauna TFE, podríamos situar el inicio de su uso en la segunda Edad de Hierro (Siglos IV-II a.C) y tras el análisis de material orgánico encontrado en la misma, se ha aportado fechas calibradas (radiométricamente) entre el 62 a.C. y el 84 d.C. (al 90.5 %) (C.S.I.C. 1776) para su último uso.

Tabla 1 **– Estructuras muestreadas *(Samples)***

Sitios	Nº muestras
Hogar C-22B	10
Hogar C-15B	3 + ladrillo
Horno C-18B	8
Hogar C-4B	8
Hogar C-10B	8
Sauna T	7
Sauna TFE	8

La litología encontrada corresponde a adobes, cuarcitas y a pizarras, siendo estas dos últimas muy poco usual en el estudio arqueomagnético.

Para mantener la posición original de las muestras cilíndricas, éstas se han orientado "in situ" mediante la brújula magnética, a la que se aplicó la posterior corrección por declinación magnética del lugar, una brújula solar y un inclinómetro.

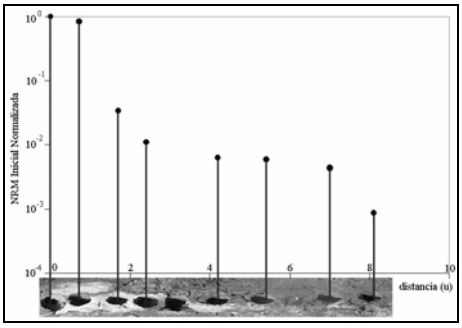
3. METODOLOGÍA.

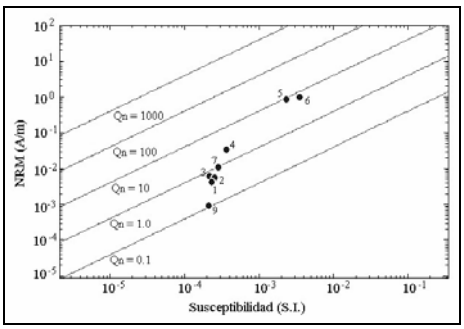
Tras el preparado de los especimenes se ha iniciado su estudio en el laboratorio de Paleomagnetimo de la UCM y de la Universidad de Burgos. En un primer análisis, se ha medido su imanación remanente natural (NRM) inicial, mediante un magnetómetro Molspin JR5, y la susceptibilidad de las mismas (mediante el medidor Kappabridge, KLY3) con el objetivo de evaluar la termorremanencia y obtener los coeficientes de Koenigsberger (Stacey, 1967) que indican el nivel de calentamiento al que han sido sometido las muestras.

Los hogares pétreos C-4B y C-10B presentan un gradiente térmico, debido a la posición, de menor a mayor distancia, de las muestras respecto al foco de calor. Ello hace que las muestras más cercanas al foco presenten una termorremanencia total, mientras que a medida que nos alejamos, aparece una termorremanencia parcial, que posteriormente será analizada. Ello queda reflejado en la caída exponencial de la NRM inicial a medida que nos alejamos del foco de calor (Figura 2a) o también en los valores de los coeficientes de Koenigsberger (Q_n), donde se observa que las muestras más quemadas tienen un valor de Q_n mayor que las menos afectadas por la termorremanencia (Figura 2b).

Se ha visualizado la NRM inicial, representándola en diagramas de igual área, para analizar la dispersión de las mismas y elegir unas muestras pilotos.

Dichas muestras piloto se han tomado de cada sitio y de cada litología, para analizarlas de forma detallada. Se han desimanado la mayoría térmicamente (calentadas con horno desimanador térmico Schonstedt TSD-1) y el resto por campos alternos decrecientes. Tras el estudio de las caídas de intensidad frente a la temperatura, de los diagramas ortogonales (diagramas de Zijderveld) y de igual área, se han establecido unos pasos de desimanación térmica para el resto de las muestras hasta un máximo de temperatura entorno a los 600ºC, donde el 85-90% de la NRM es eliminada. Durante la desimanación se han realizado medidas de la susceptibilidad para detectar posibles cambios mineralógicos en las muestras, con resultado negativo.





Figuras 2a y 2b **– NRM inicial *vs* distancia (2a, abajo izquierda) y coeficientes de Koenigsberger (2b, arriba) para el hogar C-4B. *(Initial NRM vs distance (2a, left down) and Koenigsberger ratio (2b, up) for the hearth C-4B)***

En la Figura 3 podemos ver los diagramas ortogonales para tres de los sitios analizados:

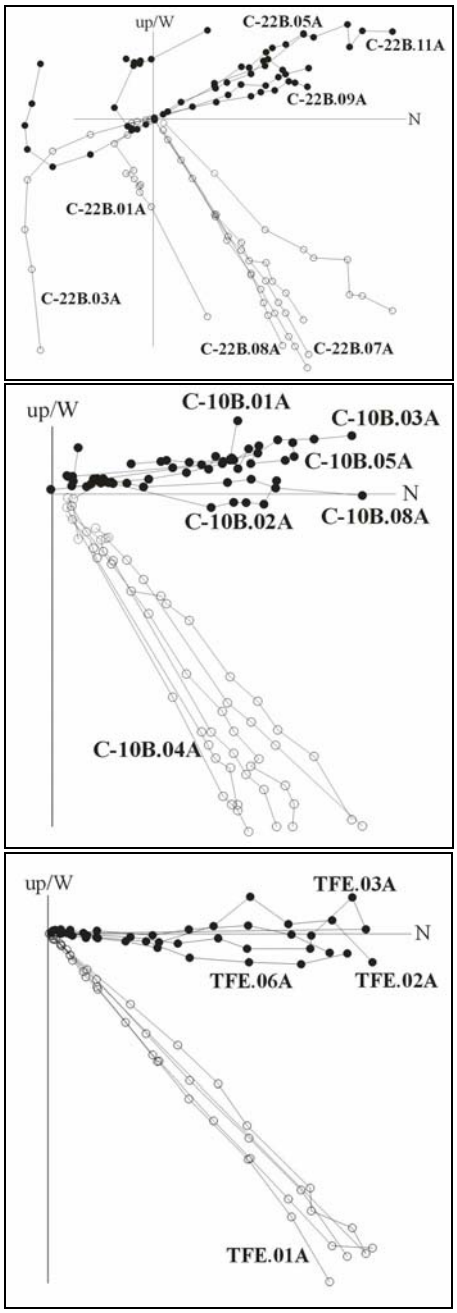


Figura 3 **– Diagramas ortogonales para los hogares C-22B (superior), C-10B (medio) y la sauna TFE (inferior), puntos sólidos/huecos: proyecciones en el plano horizontal/vertical. *(Ortogonal plots for the hearths C-22B (up), C-10B (middle) and the sauna TFE (down), solid/open points: projections in the horizontal/vertical plane).***

Tras la representación de los diagramas de desimanación térmica (NRM *vs* temperatura) se observa dos tipos de termorremanencia adquirida por las muestras:

En primer caso, vemos que en la mayoría de las muestras se presenta una termorremanencia total caracterizando a la caída de intensidad en una sola fase (Figura 4, a) o componente. En estos casos las temperaturas de desbloqueo rondan los 570ºC, indicando la presencia de magnetita en dichas muestras; mientras que para el hogar C-15B ha sido necesario calentarla a más de 600ºC para que su NRM disminuya en más del 90% de la inicial, debido a posibles trazas de hematites. Se observa en algunos casos una componente de baja temperatura debida a reimanaciones viscosas.

El segundo tipo de termorremanencia térmica lo presentan los hogares C-4B y C-10B, donde aparece una termorremanencia parcial, con un solapamiento de fases en torno a los 320ºC (Figura 4, b), cuya componente arqueomagnética (la componente de interés) es la de baja temperatura, siendo la de alta temperatura, una imanación adquirida en momentos anteriores. En el caso de la sauna T, algunas muestras presentan una componente de baja temperatura en la que la NRM decae en un 80% a temperaturas inferiores a los 200ºC, debido a la presencia de goethita en ellas (Figura 4, c).

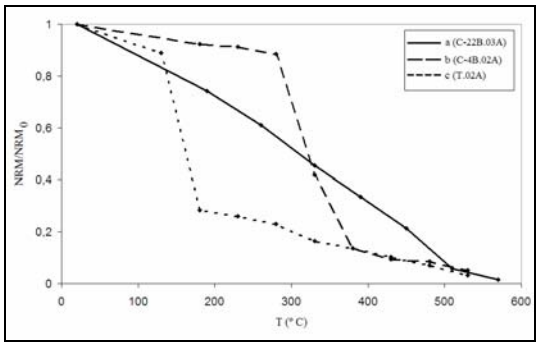


Figura 4* – Ejemplos de la caída de intensidad normalizada durante la desimanación: a) termorremanencia total, b) y c) termorremanencia parcial.** ***(Examples of thermal demagnetization: a) total thermoremanent, b) and c) partial thermoremanent)

Se ha realizado medidas de ciclos de histéresis, obteniendo buenos resultados para el caso de materiales latericios (como son los adobes, Figura 5), pero no tan buenos para los otros dos tipos de litologías (cuarcitas y pizarras) debido a que las medidas son del orden de la precisión del aparato de medida.

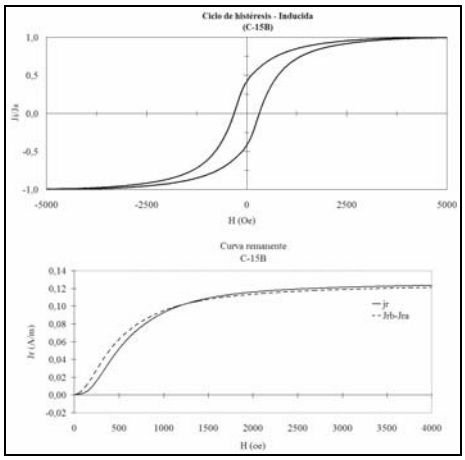


Figura 5* – Ciclo de histéresis inducido y remanente para una muestra de adobe del hogar C-15B.** ***(Induced and remanent hysteresis cycle for an adobe simple of hearth C-15B)

Los parámetros obtenidos en dichas muestras representativas han sido trasladados a un diagrama de Day (Day et al., 1977) donde en el caso de los adobes, se obtienen valores coherentes con granos monodominio (SD) – multidominio (MD) de la curva teórica TM60 (Dunlop et al., 2002); mientras que para el caso de pizarras nada puede decirse respecto a curvas teóricas ya que se evidencia la presencia simultánea de distintas fases magnéticas.

4. DIRECCIONES MEDIAS.

A través del análisis de la componente principal (en este caso, arqueomagnética) de las muestras (Kirchvinsk, 1980), o de su uso conjunto con círculos de reimanación (McFadden and McElhinny, 1988), se ha calculado la dirección media en cada sitio (ver figura 6), según la estadística de Fisher (Fisher, 1953). Para ello se ha seguido un orden jerárquico de espécimen – muestra independientemente orientada – estructura. Obteniéndose por tanto, para cada sitio el valor de la declinación e inclinación magnética y el semiángulo de confianza α_{95} y el parámetro de precisión k, ver Tabla 2, donde se añade también los valores de n/N, siendo n el número de especimenes y N el número de muestras independientemente orientadas que se incluyen en el cálculo de la dirección media.

Tabla 2* – Direcciones medias de cada sitio con los parámetros de confianza de la estadística de Fisher** ***(Mean directions for each site and parameters of the Fisher' statistic)

Sitios	D º	I º	α_{95}	n/N	k
Hogar C-22B	340.7	55.4	5.2	8/10	250
Hogar C-15B	350.5	51.1	8.1	3/3	131
Horno C-18B	350.7	49.7	4.3	8/8	181
Hogar C-4B	351.1	53.0	6.5	6/8	109
Hogar C-10B	355.7	52.9	4.6	7/8	173
Sauna T	357.3	59.9	7.3	5/7	107
Sauna TFE	356.7	48.2	6.1	6/8	99

Los resultados direccionales de cada muestra pertenecientes a un sitio, han sido evaluados mediante el test de fisherianidad (simultáneamente para los valores de declinación e inclinación) para verificar si cumplen o no las condiciones establecidas por dicha distribución estadística, dando positivos en los siete sitios.

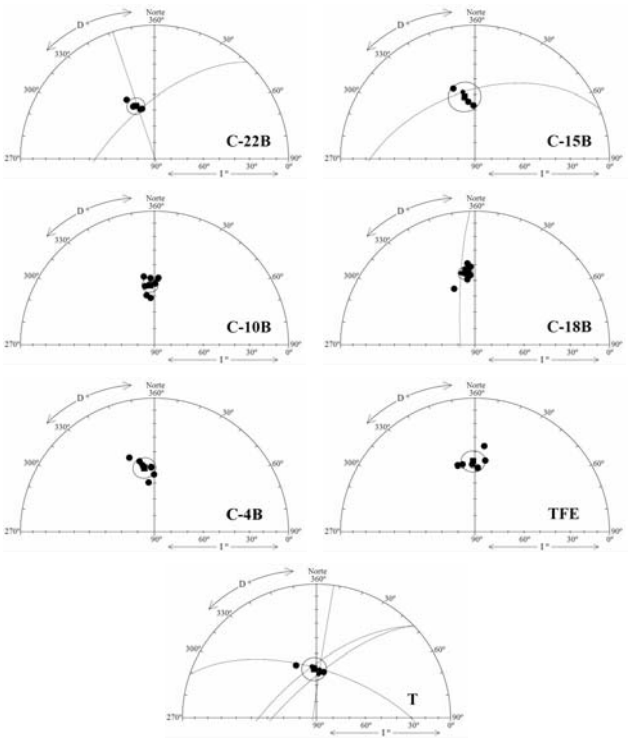


Figura 6* – Representación de igual área de las direcciones medias de cada sitio muestreado, declinaciones positivas hacia el Este, inclinaciones de 0 a 90º del exterior hacia el centro.** ***(Equal-area projection plots of the mean directions for each site, positive declinations to the East and inclinations of 0 to 90 º of the outside towards the center)

7. COMPARACIÓN CON LA CVPS DE IBERIA.

Conociendo las direcciones medias de los diferentes sitios y sus edades cronológicas, podemos evaluar dichos datos con la CVPS de Iberia (Gómez-Paccard et al., 2006b). Para ello es necesario trasladar los datos direccionales desde su posición geográfica (Chao Samartín: 43.20º N, 6.93º W) hasta las coordenadas donde se ha definido dicha curva, que es Madrid (40.4º N, 3.7º W). Para ello hay que aplicar la conversión vía polo (Noel y Batt, 1990), donde se supone un modelo dipolar del campo geomagnético, permitiendo trasladar coordenadas dentro de un área no mayor a los 10^6 km^2 a través del "polo geomágnético virtual" del dipolo.

Tras dicha conversión, se han calculado los errores en inclinación y declinación; el primero viene dado directamente por el valor del semiángulo de confianza α_{95}, mientras que el error en declinación se obtiene a través de la expresión (Butler, 1992):

$$\Delta D = \arcsin\left(\frac{\sin \alpha_{95}}{\cos I}\right) \qquad (1)$$

Se ha considerado en esta comparación que las estructuras muestreadas han tenido su último uso en el tercer cuarto del s. II d.C. (incluido el hogar mixto C-22B), menos la sauna TFE, con un rango temporal entre el 62 a.C. y el 84 d.C.

Los resultados se muestran en la Figura 7. En general se observa que las declinaciones e inclinaciones de las estructuras son coherentes con la gráfica de la curva de variación paleosecular de Iberia y su rango de incertidumbre.

En el caso del hogar C-22B, tenemos un valor de declinación más oeste del esperado, lo que da lugar a dos supuestos: si realmente es coetánea con el resto de estructuras, ésta no ha permanecido in situ a lo largo del tiempo hasta el muestreo; o bien, que su último enfriamiento, como indican los criterios arqueológicos, haya sido anterior al del resto de las estructuras del Chao.

Para la sauna TFE, observamos un valor de inclinación menor del que indica la CVPS, puede ser debido a la propia construcción de la estructura, ya que la alta foliación en las pizarras general un aplanamiento, *"flattening"*, en la inclinación.

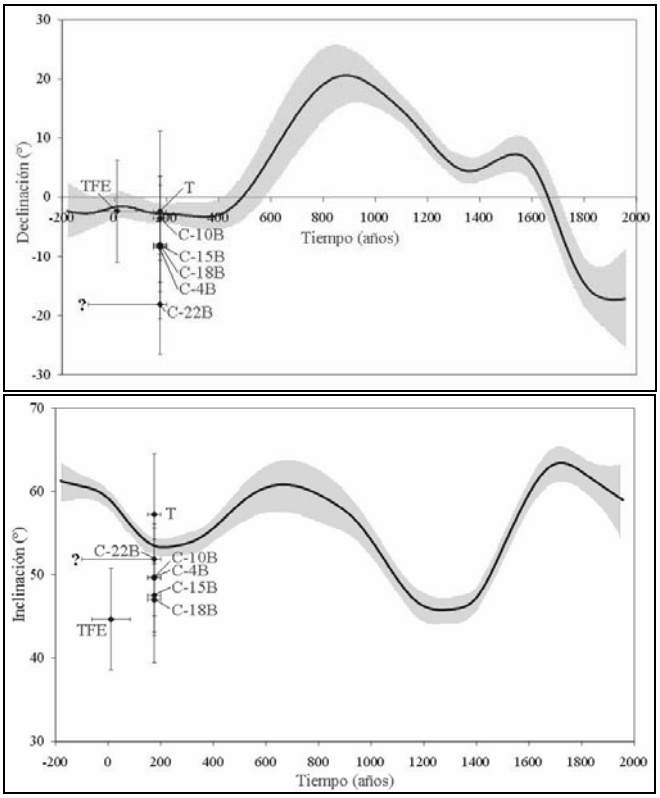


Figura 7* – Comparación de las direcciones medias con la CVPS de Iberia. *(Comparison of the main directions with the Iberian PSVC)

5. CONCLUSIONES.

Para evaluar el efecto de la remanencia a altas temperaturas de materiales no usuales en arqueomagnetismo, se ha muestreado cerca del Chao estructuras de análogas litologías, mostrando que éstas presentan valores de intensidad de la imanación remanente natural y de susceptibilidad dos órdenes de magnitud menores a las quemadas.

Los minerales portadores de dicha termorremanencia en las estructuras latericias son magnetitas y titanomagnetitas, acumuladas en granos monodominio y multidominio. Mientras que en el caso de las pizarras y cuarcitas aparecen otras fases magnéticas. Hay que tener una atención especial a estructuras construidas con pizarras (o litologías con alto grado de foliación) ya que la anisotropía asociada puede generar desviaciones en la dirección del campo geomagnético.

Con este trabajo se aportan 6 nuevas direcciones en el período romano en el norte de Iberia, donde son escasos, para la construcción de la curva Paleosecular.

6. REFERENCIAS.

Butler, R.F. (1992): "Paleomagnetism". *Blackwell Scientific Publications, Cambridge*, 315pp.

Day, R., M. Fuller and V.A. Schmidt (1977): "Hysteresis properties of titanomagnetites: grain-size and compositional dependence". *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, **13**, 260 – 266.

Dunlop, D.J. (2002): "Theory and application of the Day plot (Mrs/Ms versus Hcr/Hc). 1. Theoretical curves and tests using titanomagnetite data". *Journal of Geophysical Research*, **107**, B3, doi:10.1029/2001JB000487.

Fisher, R.A. (1953): "Dispersion on a sphere". *Proc. Roy. Soc. London A*, **271** (295)

Gómez-Paccard, M., G. Catanzariti, V.C.Ruiz-Martínez, G. McInstosh, J.I. Núñez, M.L. Osete, Ph. Lanos, A. Chauvin, D.H. Tarling, D. Bernal-Casasola, J. Tiritó and archeological working group (A. Sáez-Espligares, I. García-Villanueva, J.A. Gisbert-Santona, M.A. Hervás, P. Jiménez-Castillo, M. Mesquida-García, I. García-Ramírez González, M. Retuerce, D. Urbina and C. Urquijo) (2006a): "A cathalogue of Spanish archaeomagnetic data". *Geophysics Journal International,* **accepted.**

Gómez-Paccard, M., Ph. Lanos, A. Chauvin, G. McInstosh, M.L. Osete, G. Catanzariti, V.C.Ruiz-Martínez and J.I. Núñez (2006b): "The first Archaeomagnetic secular variation curve for the Iberian Peninsula. Comparison with other data from Western Europe and with global geomantetic field models". *Geochemistry, Geophysics, Geosystem,* **submitted.**

Kirchvisnsk, J.L. (1980): "The least-square line and plane and the analysis of paleomagnetic data". *Geophys. J. Roy. Astron. Sc.,* **62**, 699 – 718.

McFadden, P.L. and M.W. McElhinny (1988): "The combined analysis of remagnetization circles and direct observations in paleomagnetism". *Earth and Planetary Science Letters,* **87**, 161 – 172.

Noel M. and C.M. Batt (1990): "A method for correcting geographically separated remanence directions for the purpose of archeomagnetic dating". *Geophysics Journal International*, **102**, 753 – 756.

Stacey, F.D. (1967): "The Koenigsberger ratio and the nature of thermoremanence in ignous rocks". *Earth and Planetary Science Letters*, **2**, 67 – 68.

Villa Valdés, A. (2000): "Saunas castreñas en Asturias". *II Coloquio de Arqueología en Gijón. Termas Romanas en el Occidente del Imperio, Fernández Ochoa, C. y García Entero, V., Editoras.*

Villa Valdés, A. (2005): "El Castro Chao Samartín (Grandas de Salime, Asturias). Guía para su interpretación y visita, Grandas de Salime". *Ediciones de la Conserjería de Cultura, Principado de Asturias*, 136pp.

Anexo 4

Modelización Isopórica del campo geomagnético para la época 2005.0. Península e Islas Baleares

Isoporic modelling of the geomagnetic field at the epoch 2005.0. Peninsula and Balearic Islands.

V.M. Marín[(1)] y F.J. Pavón Carrasco[(1, 2)]
[(1)] Servicio de Geomagnetismo. Instituto Geográfico Nacional. C/General Ibáñez de Ibero, 3. 28003 Madrid, vmmarin@fomento.es
[(2)] Dpto. Física de la Tierra I: Geofísica y Meteorología. UCM. 28040 Madrid, fjpavon@fomento.es

SUMMARY

The Earth's magnetic field suffer temporary variations of diverse periods and amplitude. If we considered only the variations of long period, they are related to the internal origin field and receive the name of Secular Variation (SV). The SV can be separated in first approach in a temporary part and another space one. The temporary part in a station and during a short period of time adjusts to a polynomial of second degree. This variation also has a space character, reason why, if it is tried to study this phenomenon, it is necessary to determine his characteristics in the zone, from the data collected in a network of repeat stations.

The achievement of the geomagnetic cartography, published by the IGN, components D, H, Z and F at epoch 2005,0, Spain Mainland and Balear's Islands, from the obtained points of map in the 1986-1993 surveys, needs the values of the coefficients of the isoporics models of each component, to be able to make the transferring of such.

These coefficients be made of two different ways. First, it consist of the resolution for each repeat station of the development of Taylor, truncating this series until second degree, surroundings to the reference station that we denominated isoporic equation. And a second method that applies the spherical cap harmonic analysis (SCHA) to a cap that sufficiently covers the zone in study. In this work, the results obtained with both methods are exposed, as well as a comparative study among them.

1. INTRODUCCIÓN

El campo geomagnético es un campo potencial resultante de la contribución de varios campos: unos internos, como son el campo Principal (cuyo origen es el núcleo externo), el campo local causante de las anomalías magnéticas y los campos inducidos en la corteza. Además se suman los campos externos, debidos principalmente a la interacción Tierra – Sol. Estos campos magnéticos, sufren variaciones temporales de diversos periodos y amplitudes. Si consideramos sólo las variaciones de largo periodo, éstas están relacionadas con el campo Principal, y reciben el nombre de Variación Secular (VS). Esta variación también es espacial, por lo que, si se pretende estudiar este fenómeno, es necesario determinar sus características en la zona a través de los datos obtenidos en estaciones seculares.

La variación secular puede ser separada en primera aproximación en una parte temporal y otra espacial, que pueden ser analizadas independientemente.

Para la parte temporal, se puede asumir que en una estación y durante un corto período de tiempo, la variación de las componentes magnéticas o angulares se ajusta a un polinomio de la forma (De Miguel, 1980):

$$E = E_0 + A \cdot t + B \cdot t^2 \qquad (1)$$

Donde E_0 es el valor de la componente en el tiempo origen y los coeficientes A y B se determinarían en su mejor ajuste, estando éstos relacionados con la variación secular.

Para su estudio espacial, vamos a usar dos métodos, el primero consistirá en un desarrollo de Taylor entorno a una estación de referencia, truncando dicha serie hasta grado segundo (ajuste polinomial), mientras que el segundo será un análisis armónico en un casquete esférico que cubra la zona de interés

Los valores de campo geomagnético se han obtenido de la red de estaciones seculares que posee el IGN en la Península e Islas Baleares y del Observatorio de San Pablo Toledo.

2. AJUSTE POLINOMIAL

El primer modelo considera que la variación secular en cada estación secular viene dada por la expresión (De Miguel, 1980):

$$\Delta E_i = A_0 + A_1(\varphi_i - \varphi_0) + A_2(\lambda_i - \lambda_0) + A_3(\varphi_i - \varphi_0)(\lambda_i - \lambda_0) + \\ + A_4(\varphi_i - \varphi_0)^2 + A_5(\lambda_i - \lambda_0)^2 \qquad (2)$$

que es la llamada ecuación isopórica, siendo φ_i y λ_i, la longitud y latitud del punto y ΔE_i su variación secular, obtenida por la expresión (1). Y φ_0, λ_0 las coordenadas de la estación de referencia, que en nuestro caso será SPT (San Pablo Toledo). Los coeficientes A_0 al A_5 se calculan al modelo que mejor ajuste a los datos.

Esta técnica de ajuste polinomial ofrece validez para regiones pequeñas de la superficie de la Tierra (Ardizone, 1998). Dicho método se aplica desde 1975 en la obtención de los mapas magnéticos de la Península e Islas Baleares en el Instituto Geográfico Nacional.

Para ello se ha calculado la VS en cada estación por medio del ajuste de la expresión (1) y posteriormente mediante el método de mínimos cuadrados se ajusta al modelo que indica la expresión (2). En dicho ajuste se incluye una matriz de pesos, donde el peso asignado a cada estación se ha establecido en 0.5 para las estaciones seculares (se asume el mismo error en todas las estaciones seculares) y en 1.0 para la estación de referencia (SPT), ya que se trata de un observatorio de medida continua.

Obteniéndose los valores de los coeficientes A_i del modelo, su bondad mediante el cálculo del coeficiente de regresión R^2 y el error RMS, se ha calculado los valores de la VS en una malla regular para su posterior representación mediante isolíneas en un mapa.

Tras la revisión de todos los datos de las estaciones, se tienen valores de las componentes magnéticas en 43 estaciones seculares más la de SPT (ver Figura 2).

En cada estación y para cada componente, se ha determinado la VS mediante el ajuste de la expresión (1) con datos obtenidos en la serie temporal de 1996 a 2004. Vemos un ejemplo en la Figura 1, donde se muestra la variación de la componente horizontal en la estación SPT.

Al hacer dicha selección temporal se han eliminado tres de las estaciones seculares por poseer valores insuficientes en el intervalo temporal y no ser válidas para el cálculo de la VS del lugar.

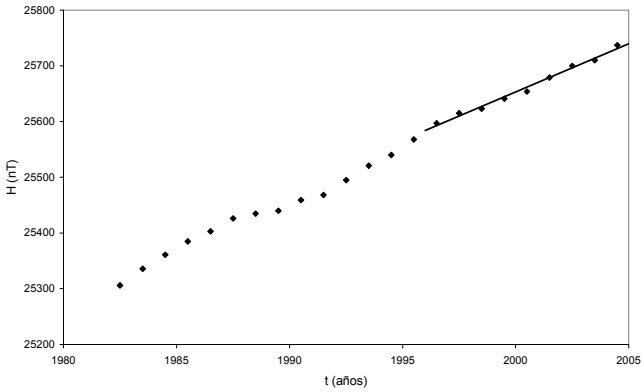


Figura 1*– Componente Horizontal. Ajuste a una recta de la VS en el intervalo 1996 – 2004. .*(Horizontal component. SV fitting for1996-2004)

Posteriormente tras la obtención de la VS en cada estación, se ha obtenido un modelo de VS mediante ajuste por mínimos cuadrados de la expresión (2), pudiéndose comparar los valores del modelo con los medidos en cada estación y hacer un estudio del error RMS. Tras este estudio, se ha considerado eliminar dos estaciones seculares más debido a la gran desviación que introducían en el modelo (mayor que tres veces el error medio). Por tanto se usa un total de 37 estaciones seculares más la de referencia.

Figura 2*– Red de Estaciones Seculares del Instituto Geográfico Nacional*. (Network Repeat Stations of the IGN)

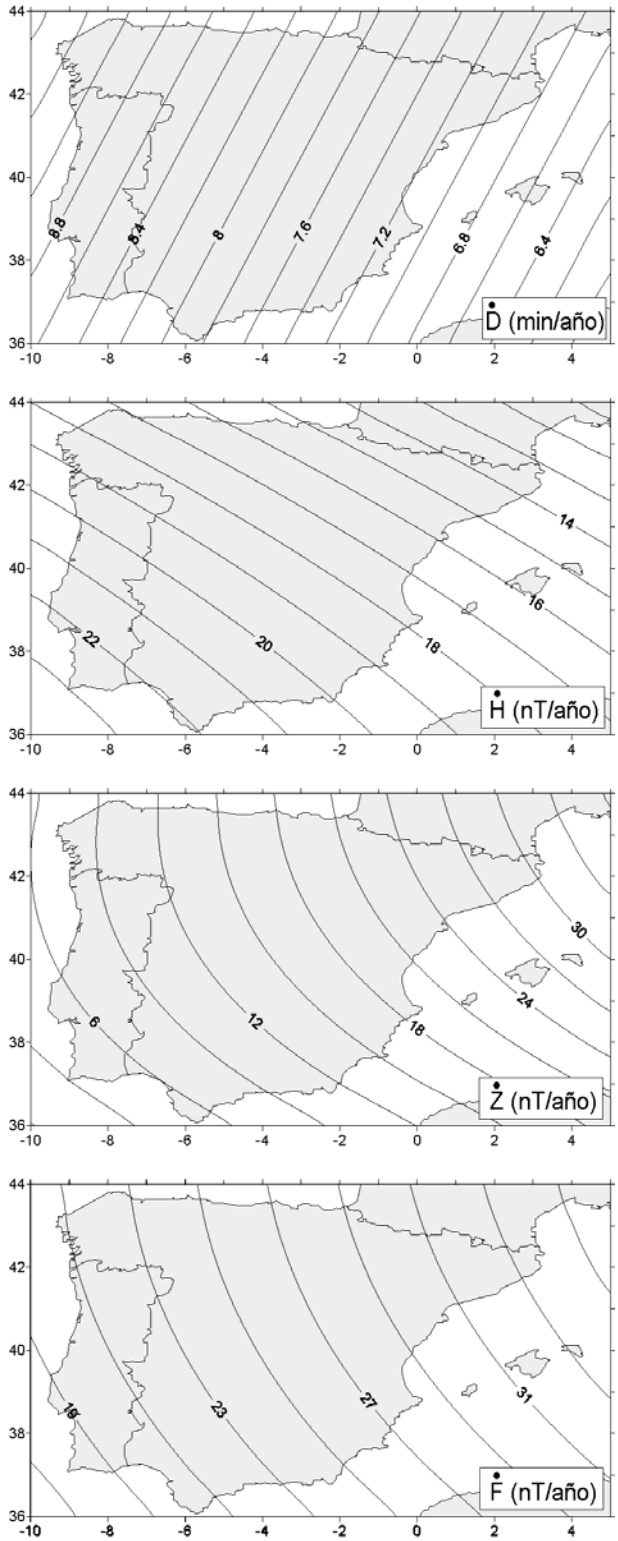
3. MAPAS ISOPÓRICOS.

Tras el ajuste de la variación secular calculada para cada componente, se han obtenido los siguientes coeficientes del modelo y sus datos estadísticos.

Tabla 1* – Coeficientes del ajuste y datos estadísticos *(Fitting coefficients and statistical information)

VS de la componente	Datos de ajuste polinomial		
Declinación, D (min/año)	$A_0 = 7.50$	$A_3 = -2.6\cdot10^{-3}$	Error rms = 1.1
	$A_1 = 0.12$	$A_4 = 5.7\cdot10^{-3}$	$R^2 = 0.958$
	$A_2 = -0.20$	$A_5 = 2.6\cdot10^{-3}$	
Horizontal, H (nT/año)	$A_0 = 21.30$	$A_3 = -1.4\cdot10^{-2}$	Error rms = 1.2
	$A_1 = -0.74$	$A_4 = -6.1\cdot10^{-2}$	$R^2 = 0.799$
	$A_2 = -0.47$	$A_5 = -1.3\cdot10^{-3}$	
Vertical, Z (nT/año)	$A_0 = 13.4$	$A_3 = 4.4\cdot10^{-2}$	Error rms = 2.6
	$A_1 = 1.41$	$A_4 = -7.6\cdot10^{-2}$	$R^2 = 0.863$
	$A_2 = 1.58$	$A_5 = 3.8\cdot10^{-3}$	
Campo Total, F (nT/año)	$A_0 = 24.49$	$A_3 = 2.6\cdot10^{-2}$	Error rms = 1.7
	$A_1 = 0.69$	$A_4 = -0.11$	$R^2 = 0.688$
	$A_2 = 1.02$	$A_5 = -4.6\cdot10^{-3}$	

Si representamos las isolíneas de igual variación secular, obtenemos los mapas isopóricos para la época 2005.0 de la declinación D y de las componentes horizontal H, vertical Z y campo total F, figuras 3 a 6.



Figuras 3 a 6* – Mapas Isopóricos de D, H, Z y F. *(Isoporic maps for D, H, Z and F)

Con dichos modelos isopóricos se han trasladado los puntos de mapa de las componentes magnéticas de 1995.0 a 2005.0 y de la declinación de 2000.0 a 2005.0, obteniéndose la cartografía magnética para 2005.0. (Mapa Geomagnético de España, IGN, 2005)

4. ANÁLISIS ARMÓNICO: MÉTODO SCHA.

Analíticamente, el Campo Geomagnético puede ser representado globalmente mediante el análisis de armónicos esféricos, pues en las regiones de modelización se suponen nulas las corrientes eléctricas y los cuerpos que generan magnetismo. Por lo que se verifica la ecuación de Laplace para el potencial magnético escalar:

$$\nabla^2 V(r,\theta,\lambda) = 0 \qquad (3)$$

La solución de dicha ecuación son los armónicos esféricos, que son una combinación de funciones ortogonales en la esfera que depende de la colatitud y longitud: $P_n^m(\cos\theta)\cdot\cos(m\lambda)$ y $P_n^m(\cos\theta)\cdot\sin(m\lambda)$, siendo $P_n^m(\cos\theta)$ las funciones asociadas de Legendre.

Esto es útil para modelos globales, como es el caso del IGRF, pero si la zona de estudio está restringida a un cierto área, podemos usar varias técnicas de modelado: una consiste en un análisis de armónicos en un casquete esférico (SCHA, Haines, 1985a) y otra segunda en aplicar un desarrollo de armónicos esféricos ordinarios en la región de estudio, el llamado análisis de armónicos esféricos ajustados (ASHA, De Santis, 1992).

Debido al escaso número de datos de entrada (37 estaciones seculares repartidas en la península e islas Baleares) y su distribución, se ha decidido usar el método SCHA en un casquete lo suficientemente grande que abarque la zona de interés.

El método SCHA se basa en el desarrollo del potencial geomagnético mediante análisis armónico en un casquete esférico de semiángulo θ_0. Si consideramos solo la aportación del campo Principal, la solución al problema viene dada por un potencial muy similar al caso global:

$$V(r,\theta,\lambda) = a\sum_{k=0}^{K}\sum_{m=0}^{k}\left(\frac{a}{r}\right)^{n_k(m)+1}(g_k^m\cdot\cos m\lambda + h_k^m\cdot\sin m\lambda)\cdot P_{n_k(m)}^m(\cos\theta) \qquad (4)$$

siendo K el grado máximo del desarrollo, g_k^m y h_k^m son los coeficientes del modelo y $P_{n_k(m)}^m(\cos\theta)$ las funciones asociadas de Legendre, pero con una particularidad, y es que el valor de m sigue siendo entero, pero el de n es real, debido a las condiciones de contorno que se establecen en la frontera del casquete:

$$P_{n_k(m)}^m(\cos\theta_0) = 0, \quad k-m = \text{par}$$
$$\frac{dP_{n_k(m)}^m(\cos\theta_0)}{d\theta} = 0, \; k-m = \text{impar} \qquad (5)$$

definiéndose por tanto, dos tipos de funciones ortogonales dentro de cada tipo, pero no ortogonales entre sí.

El valor de K tomado será de 2 y 3; pues si se pretende modelar la variación secular, cuya longitud de onda mínima es del orden de 10^3 km, exige unos valores de K menores de 4 (Haines, 1988). Y el tamaño del casquete será de θ_0 = 30º, ya que a partir de estos tamaños los errores del modelo se minimizan (Torta, 1992).

Teniendo en cuenta los valores de variación secular y que las componentes del campo XYZ se obtienen por el gradiente negativo del potencial escalar V, podemos obtener los modelos de VS de las componentes calculando los coeficientes g_k^m y h_k^m mediante ajuste por mínimos cuadrados de la expresión (4), (Haines, 1988).

5. RESULTADOS CON SCHA.

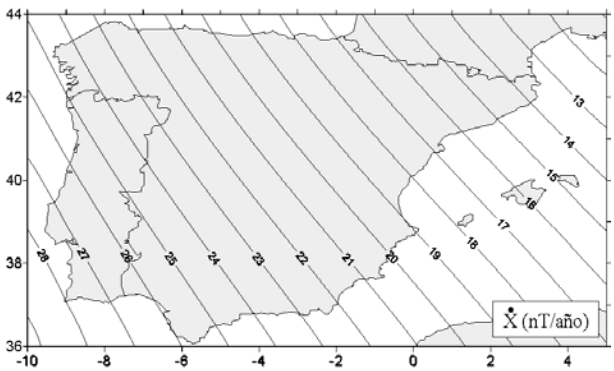
Primero se ha modelado con dicho método valores de VS del IGRF (IAGA, 2005), considerando los valores de VS para 2005.0 en cada estación de medida. El ajuste se ha realizado de dos formas, considerando en conjunto todas las componentes XYZ y en un segundo caso, considerando por separado las componentes horizontales XY e independientes de la componente Z, para analizar cual de los dos casos introducen mayor discrepancia entre el modelo y los datos reales (Torta, 1992). Los resultados vendrán determinados por el residuo cuadrático medio rms, que viene indicado en la Tabla 2. El número de coeficientes usados en los modelos vienen dados por la expresión $(K+1)^2$ -1 para los modelos de componentes horizontales XY y $(K+1)^2$ para el modelo de componente vertical Z y el modelo conjunto XYZ (Haines, 1985a).

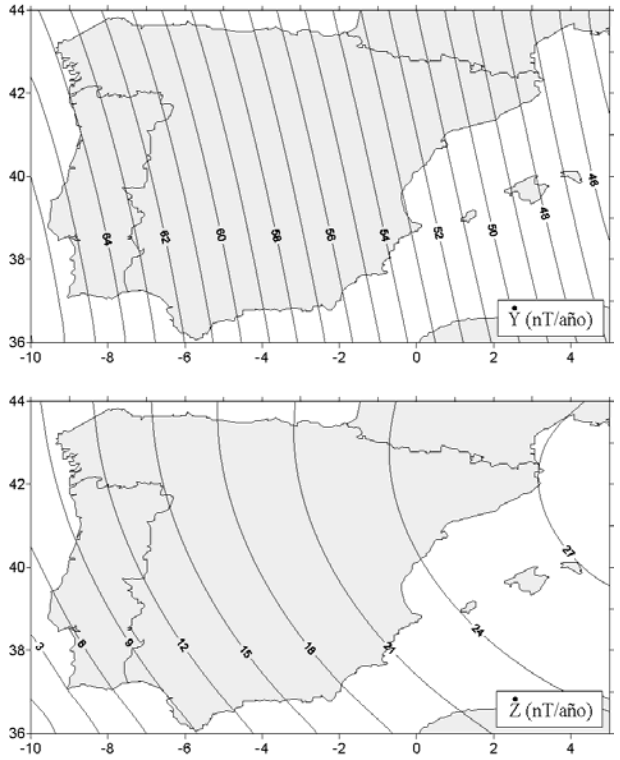
Tabla 2* – Error rms de los modelos SCHA de VS del IGRF y de los datos reales Columna A: modelo obtenido al separar componentes horizontales XY y vertical Z, columna B: modelo conjunto XYZ *(Rms for the SCHA modelling of SV for IGRF and real data, separated model in column A and joint model in B)

Datos	Parámetros del modelo			A rms (n T/año)	B rms (n T/año)
	θ_0	K	nº coeficientes A / B		
IGRF 2005.0	30	2	8 / 9	X = 0.08	X = 0.14
			8 / 9	Y = 0.06	Y = 0.16
			9 / 9	Z = 0.02	Z = 0.13
			17 / 9	XYZ = 0.06	XYZ = 0.13
	30	3	15 / 16	X = 0.01	X = 0.03
			15 / 16	Y = 0.01	Y = 0.04
			16 / 16	Z = 1.10	Z = 0.03
			31 / 16	XYZ = 0.6	XYZ = 0.03
Datos Reales	30	2	8 / 9	X = 1.2	X =1.2
			8 / 9	Y = 2.2	Y = 2.3
			9 / 9	Z = 2.0	Z = 2.2
			17 / 9	XYZ = 1.8	XYZ = 1.7
	30	3	15 / 16	X = 1.5	X = 1.4
			15 / 16	Y = 2.4	Y = 2.6
			16 / 16	Z = 2.6	Z = 2.5
			31 / 16	XYZ = 1.9	XYZ = 1.8

Se observa en el caso del IGRF un menor residuo para K=3 y para el modelo que contempla las tres componentes conjuntas (columna B). Si ahora aplicamos los resultados a los datos reales obtenidos en las estaciones seculares del IGN, el menor error rms del modelo se tiene para un valor de K = 2, y en el caso del modelo conjunto de las tres componentes XYZ, ver Tabla 2.

En las siguientes figuras (7 a 9) se muestran los mapas de VS para las componentes XYZ para 2005.0 obtenidos con los parámetros SCHA que menor error rms han proporcionado.





***Figuras 3 a 6* – Mapas Isopóricos de X, Y y Z obtenidos por SCHA – K = 2, θ_0 = 30º, con 9 coeficientes -** ***(Isoporic maps for X, Y and Z by SCHA**, K = 2, , θ_0 = 30º, whit 9 coefficients)*

6. CONCLUSIONES.

Para comparar los resultados obtenidos al aplicar el método SCHA y el ajuste polinomial de segundo grado, se ha calculado también los modelos isopóricos para las componentes norte (X) y este (Y) mediante ajuste polinomial. Los valores de X e Y se han obtenido mediante la componente horizontal H y la declinación D, teniendo en cuenta que:

$$X = H \cdot \cos D \qquad (6)$$
$$Y = H \cdot \sin D$$

Posteriormente, se ha calculado la VS en cada estación para dichas componentes.

En el ajuste polinomial, el cálculo de los modelos es independiente para cada VS de las componentes XYZ, con lo que tenemos un modelo de 18 coeficientes (6 por cada componente magnética). Sin embargo, el modelo SCHA permite el modelado de la VS de las tres componentes XYZ a la vez, con un número de coeficientes para K = 2 de 9. En la Tabla 3 se muestra la comparación de errores rms de los ajustes isopóricos obtenidos con los dos modelos, el polinomial y el SCHA.

Tabla 3* – Error rms de la VS de XYZ, mediante SCHA y ajuste polinomial de segundo grado *(Rms of XYZ's SV, by SCHA and polinomial of second degree methods)

Nº coeficientes	Polinomial rms (n T/año)	SCHA rms (n T/año)	Nº coeficientes
6	X = 1.1	X = 1.2	9
6	Y = 0.9	Y = 2.3	9
6	Z = 2.6	Z = 2.2	9
18	XYZ = 1.8	XYZ = 1.7	9

El error para cada componente es menor en el ajuste polinomial debido a que en este caso, se han calculado los modelos considerando las componentes magnéticas independientes (con 6 coeficientes para cada ajuste), mientras que por SCHA se ha calculado todas en conjunto (con 9 coeficientes en total). Sin embargo, el error rms global es menor en el SCHA, ya que en este caso el número de coeficientes se sigue manteniendo en 9, mientras que en el ajuste polinomial asciende a 18, como vimos anteriormente.

7. REFERENCIAS.

Ardizone, J.A. (1998): "Análisis de datos aeromagnéticos. Metodologías y aplicación al levantamiento aeromagnético de España peninsular". *Instituto Geográfico Nacional,* Publicación técnica nº **32.**

De Miguel, L. (1980): "Geomagnetismo". *Instituto Geográfico Nacional.*

De Santis, A. (1992): "Conventional spherical harmonic analysis for regional modelling of the geomagnetic field". *Geophys. Res. Lett*., Vol. 19, **N.10**, 1065-1067.

Haines, G.V. (1985a): "Spherical cap harmonic analysis". *J. Geophys. Res.,* **90**, 2583-2591.

Haines, G.V. (1988): "Computer programs for spherical cap harmonic analysis of potential and general fields". *Computers & Geosciences.,* **14 No.4,** 413-447.

IAGA Division V, Working Group VMOD: Geomagnetic Field Modeling, (2005): "The 10th-Generation International Geomagnetic Reference Field". *Geophysical Journal International,* **161**, 561

IGN, Servicio de Geomagnetismo: "Mapa Geomagnético de España, 2005.0". Pendiente de publicación.

Torta, J.M. (1990): "Modelización regional del campo geomagnético seobre España: campo anómalo, variación secular y campo de referencia". Publicaciones del Observatorio del Ebro, **Memoria 15**, Roquetes – Tarragona.

Anexo 5

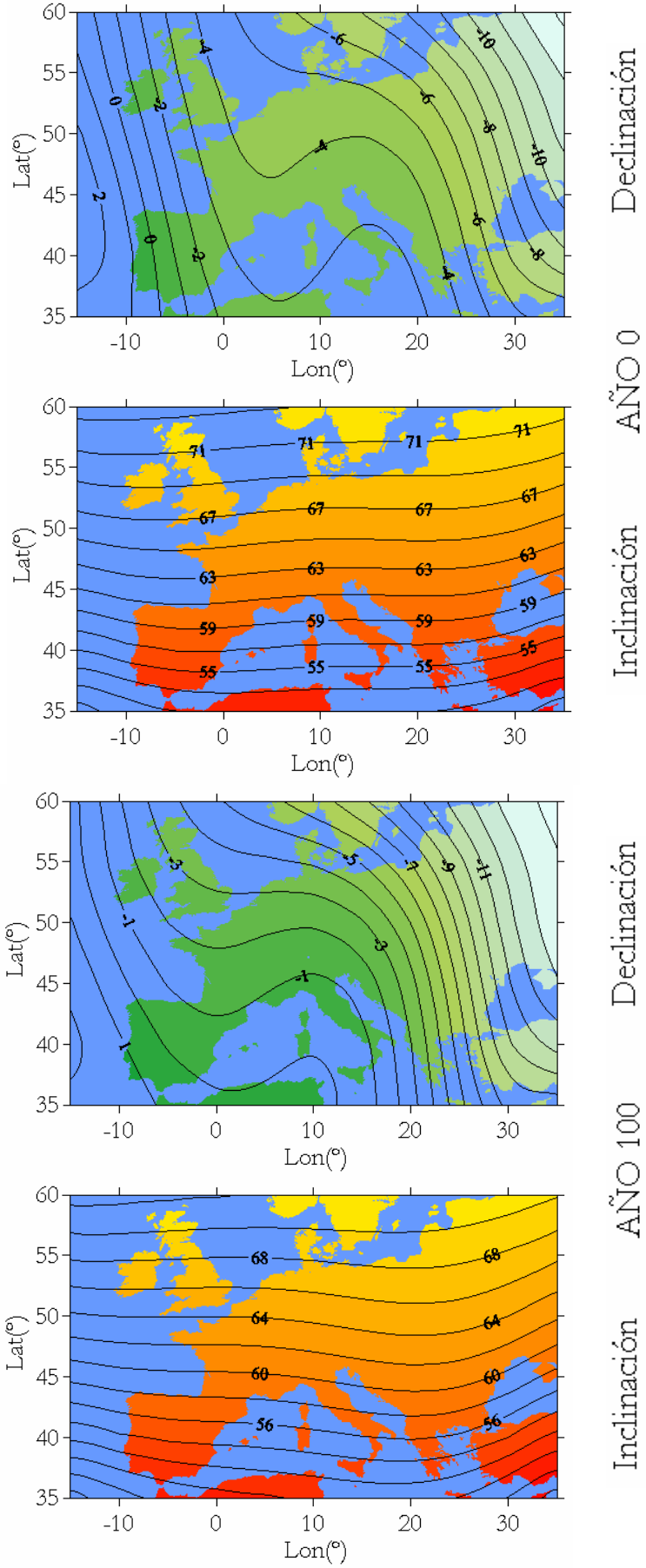
Modificación de la rutina SCHA a SCHA - DI, desarrollada en el presente Trabajo de Investigación e introducida en el la rutina original (modificada por varios autores) de Haines (1988). Desarrollada en lenguaje Fortran® 90. Programa original proporcionado por JM Torta y L. Gaya-Piqué (comunicación personal).

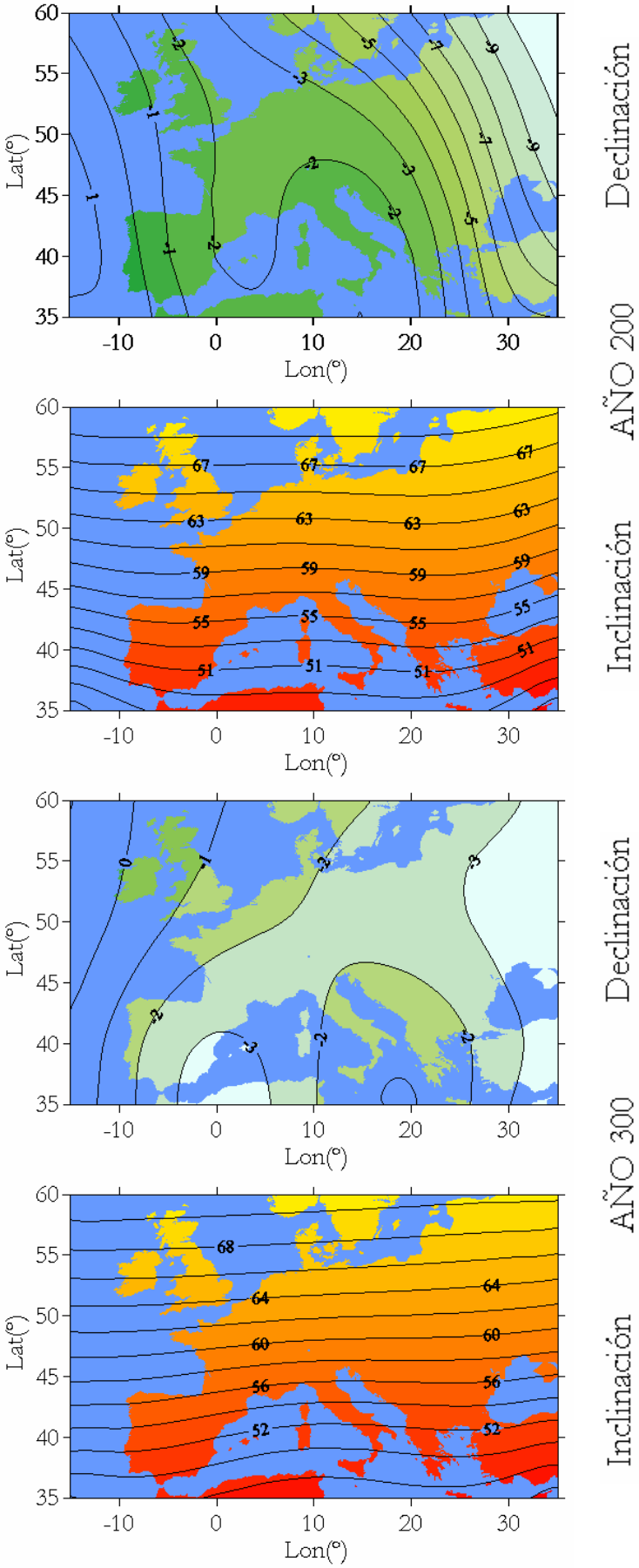
```
C          ******************************************************************************

  PROGRAM SCHA_EBRE_05

-------------------------------------------------------SIGUE RUTINA ORIGINAL-------------------------------------------

C          ******************************************************************************
C     FORM SPATIAL EQUATIONS OF CONDITION
      WRITE(*,'(A39,I6)') "FORMING SPATIAL EQUATION OF CONDITION ",INDEX
      INDEX=INDEX+1
      IF (IFIT .GE. 0)  THEN
      AOR = RE/R
      AR = AOR**2
      IF (KEXT .GT. 0)  AOR3 = AOR*AR
      ELSE
      AR = -1.D0
      ENDIF
      K = 0
      IF (KINT .LT. 0)  GO TO 106
      K = K + 1
      IF (ICOM .LT. 0)  THEN
      XZ(K) =  -BVREF*AR/FREF
      GO TO 106
      ENDIF
      IF (IFIT .LE. 0)  GO TO 105
      XX(K) =  0.D0
      XY(K) =  0.D0
 105  XZ(K) =  -AR
 106  COLAT = 90.D0 - SCLAT
      DO 150 N=1,KMAX
      IF (N .GT. 1)  GO TO 115
      SCLONR = SCLON*RPD
      CL = COS (SCLONR)
      SL = SIN (SCLONR)
      CML(1) = CL
      SML(1) = SL
      GO TO 120
 115  SML(N) = SL*CML(N-1) + CL*SML(N-1)
      CML(N) = CL*CML(N-1) - SL*SML(N-1)
 120  DO 150 M=0,N
      IF (IBASIS .EQ. 2)  GO TO 121
      NMM = N-M
      IF ((NMM/2)*2 .NE. NMM)  GO TO 150
 121  FFN = FN(N,M)

C     ******************************************************************************
C     IN ORDER TO COMPUTE THE LEGENDRE POLYNOMIALS AND THEIR DERIVATIVES WE HAVE TWO
OPTIONS
C     A) TO USE THE ORIGINAL SUBROUTINE LEGFUN PROVIDED BY HAINES
C     B) TO USE THE SUBROUTINE OLVERSMITH IN WHICH THE METHOD PROPOSED BY OLVER & SMITH
(1983)
C              IS IMPLEMENTED
C     THE OLVER & SMITH APPROACH IS MORE SOLID FOR HIGH DEGREE VALUES, SO THE USE OF THIS
C     SUBROUTINE IS RECOMMENDED
C     USE THE SAME SUBROUTINE THAT YOU HAVE PREVIOUSLY USED TO COMPUTE THE DEGREES nk
```

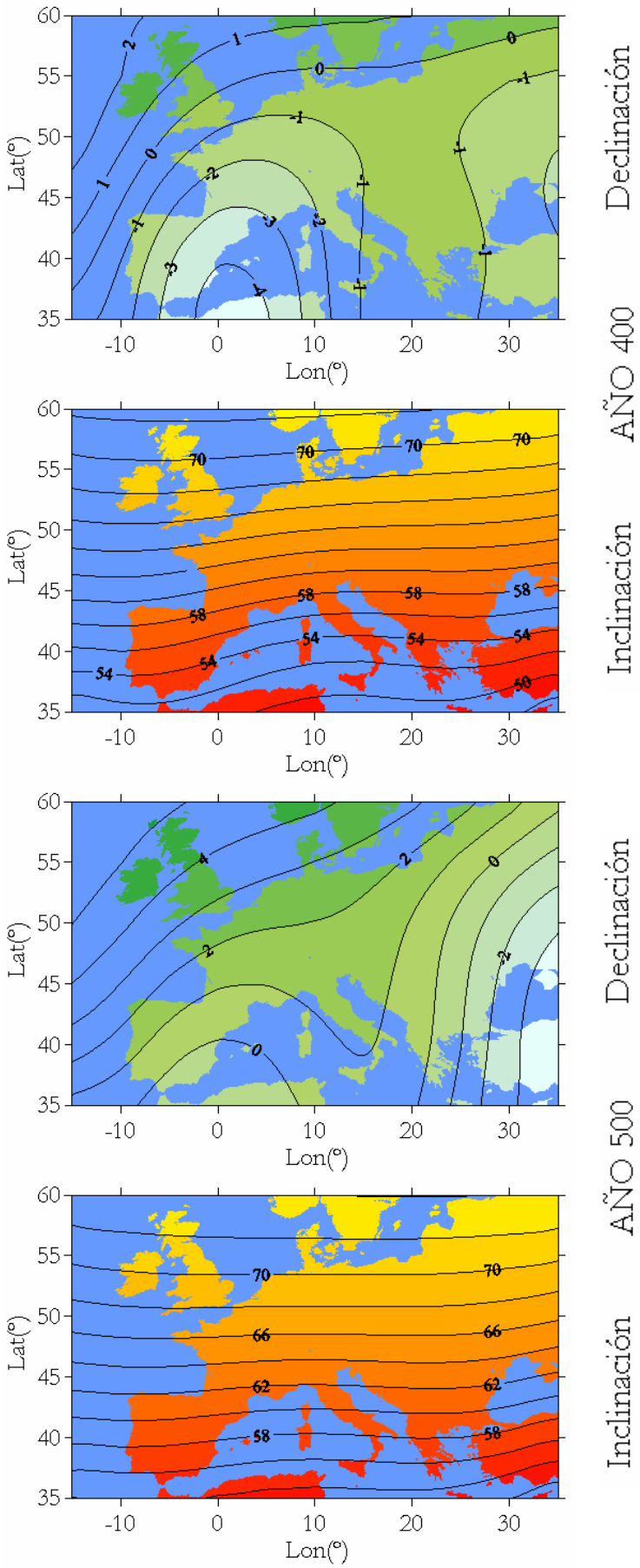
```
C     CALL LEGFUN (M,FFN,CONST(N,M),COLAT,P,DP,PMS,0)
      CALL OLVERSMITH(M,FFN,COLAT,P,DP,PMS)
C     ***********************************************************************************

      IF (IFIT .GE. 0)  THEN
        AR = AOR**(FFN+2.D0)
        ELSE
        AR = 1.D0
        FFN = -2.D0
        ENDIF
      IF (N .GT. KINT)  GO TO 150
      IF (M .NE. 0)  GO TO 125
       K = K + 1
      IF (ICOM .LT. 0)  THEN
        XZ(K) = (SCNREF*DP-(FFN+1.D0)*BVREF*P)*AR/FREF
        GO TO 130
        ENDIF
      XZ(K) = -(FFN+1.D0)*AR*P
      IF (IFIT .LE. 0)  GO TO 130
      XX(K) =  AR*DP
      XY(K) =  0.D0
      GO TO 130
125 K = K + 2
     IF (ICOM .LT. 0)  THEN
        XT = SCNREF*DP - (FFN+1.D0)*BVREF*P
        YT = SCYREF*PMS
        ZT = AR/FREF
        XZ(K-1) = (XT*CML(M)+YT*SML(M))*ZT
        XZ(K)   = (XT*SML(M)-YT*CML(M))*ZT
        GO TO 130
        ENDIF
      ZT = -(FFN+1.D0)*AR*P
      XZ(K-1) =  ZT*CML(M)
      XZ(K) =  ZT*SML(M)
      IF (IFIT .LE. 0)  GO TO 130
      XT =  AR*DP
      XX(K-1) =  XT*CML(M)
      XX(K) =  XT*SML(M)
      YT =  AR*PMS
      XY(K-1) =  YT*SML(M)
      XY(K) = -YT*CML(M)
130 CONTINUE
150 CONTINUE
     IF (K .NE. KP)  STOP 150
C     ***********************************************************************************
C    MODIFICACIÓN DE LOS PARÁMETROS DE ENTRADA
C    XXA=XX(2:KP+1)
C    XYA=XY(2:KP+1)
C    XZA=XZ(2:KP+1)
C    DECLI=ATAN(SCYM/SCXM)
     H=SQRT(SCYM*SCYM+SCXM*SCXM)
C    DECLI2=ATAN(BVZ/H)
     FF=SQRT(SCYM*SCYM+SCXM*SCXM+BVM*BVM)
       XXA=(SCYM/H)*XX(2:KP+1)-(SCXM/H)*XY(2:KP+1)
       XYA=(BVM/FF)*XX(2:KP+1)-((SCXM/H)*(H/FF))*XZ(2:KP+1)
       XZA=(BVM/FF)*XY(2:KP+1)-((SCYM/H)*(H/FF))*XZ(2:KP+1)
     BETA=XZ(1)
     TLM(LMAX+1)=BETA*((SCYM/H)*(H/FF))
     TLM(LMAX+2)=0.0D0
     TLM(LMAX+3)=BETA*((SCXM/H)*(H/FF))
C     ***********************************************************************************

----------------------------------------------SIGUE CON LA RUTINA ORIGINAL-----------------------------------------
```

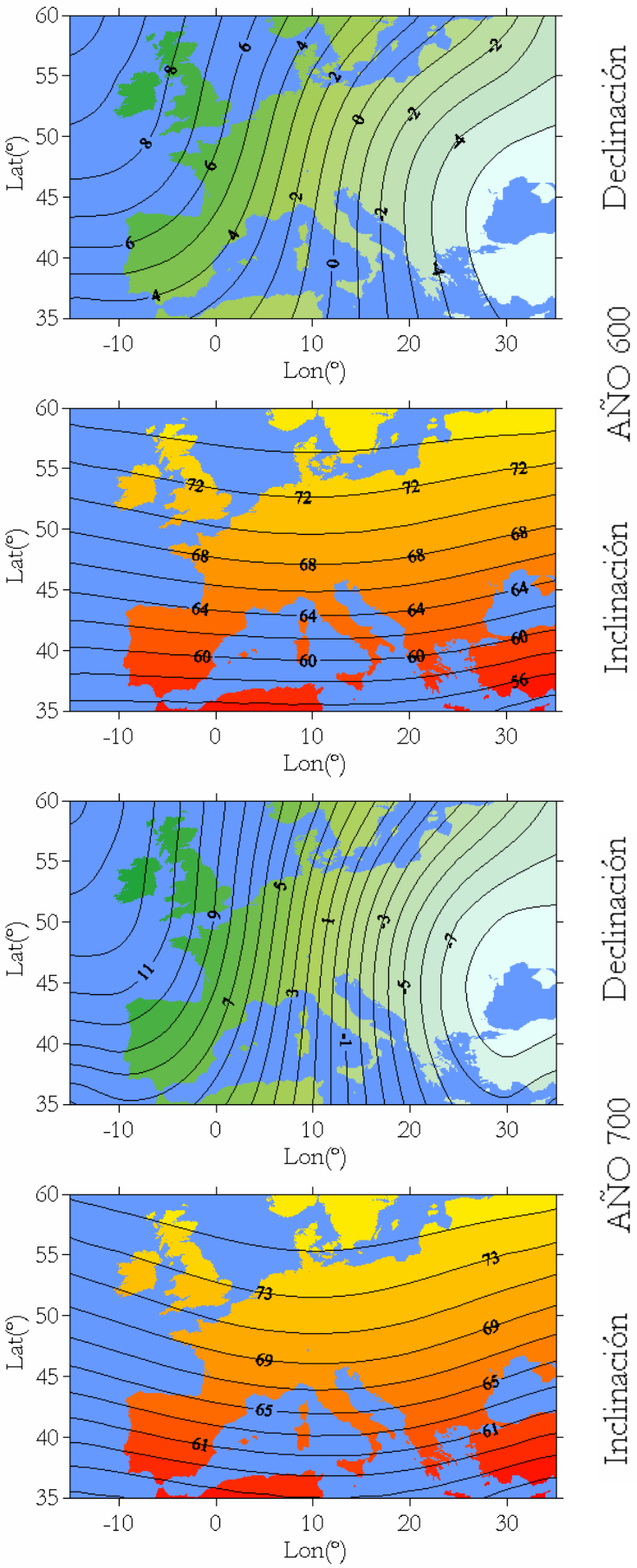
Anexo 6

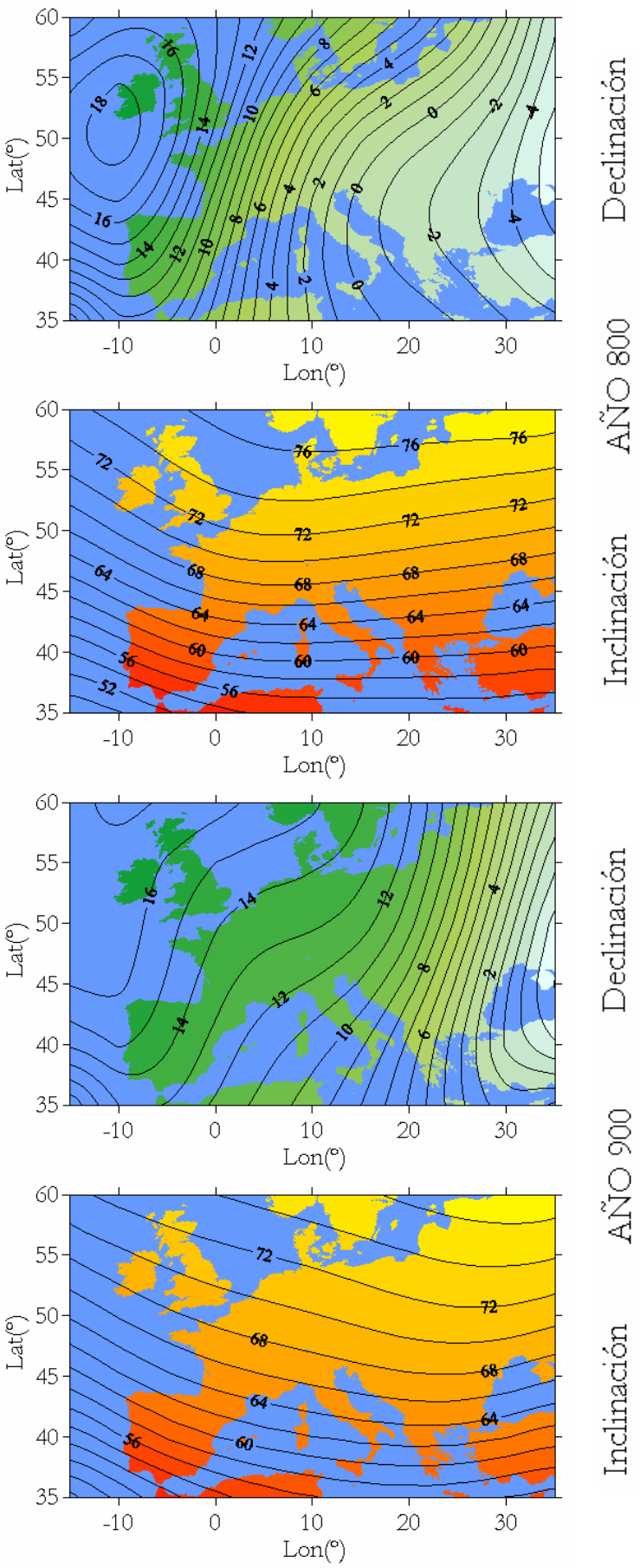
Mapas de declinación e inclinación generados por el modelo SCHA. Mapas cada 100 años.

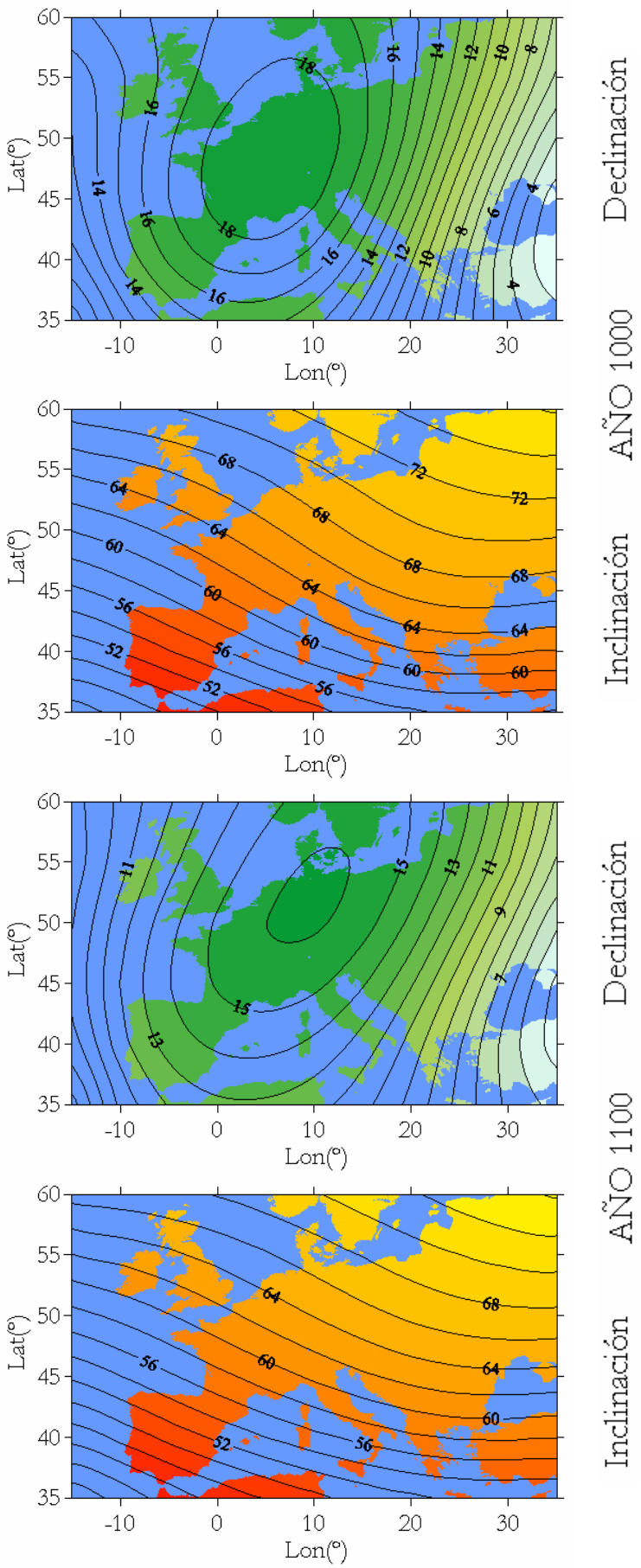


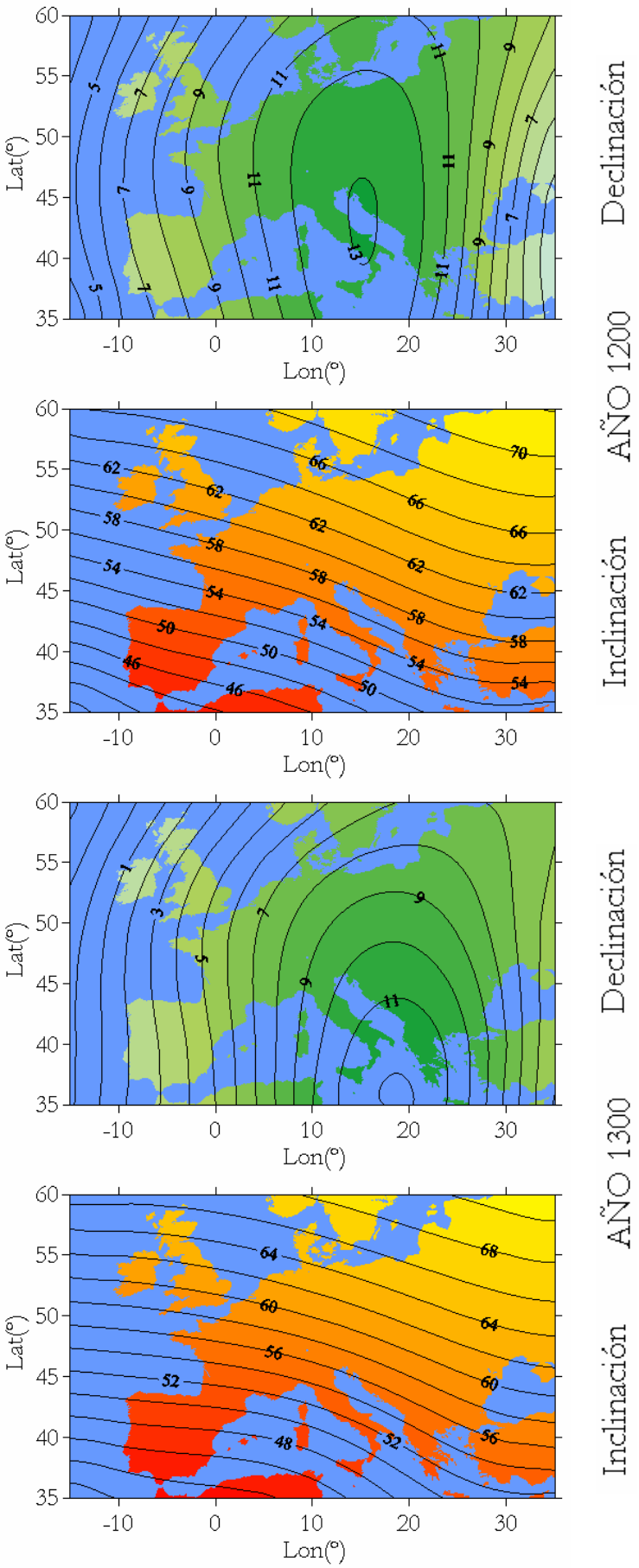

Declinación
AÑO 200
Inclinación
Declinación
AÑO 300
Inclinación
Lat(º)
Lon(º)

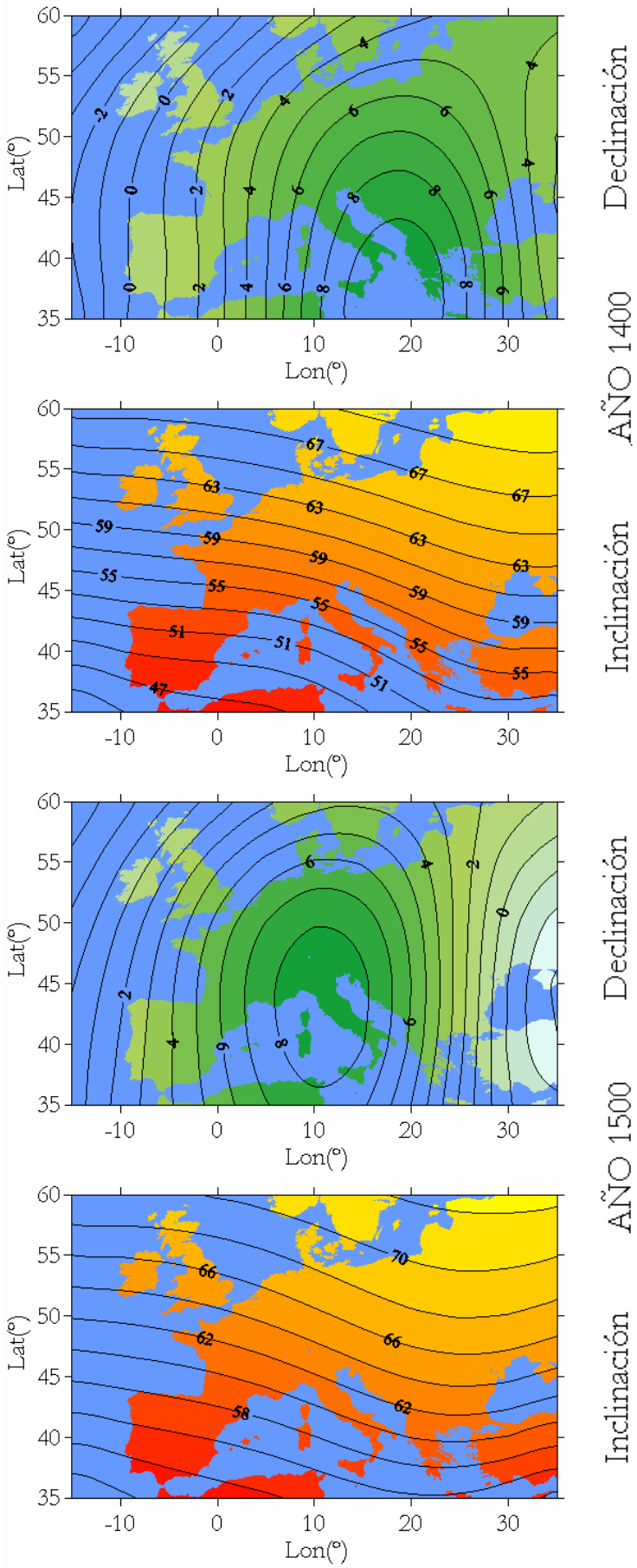

Declinación
AÑO 400
Inclinación
Declinación
AÑO 500
Inclinación
Lat(°)
Lon(°)
60
55
50
45
40
35
-10
0
10
20
30

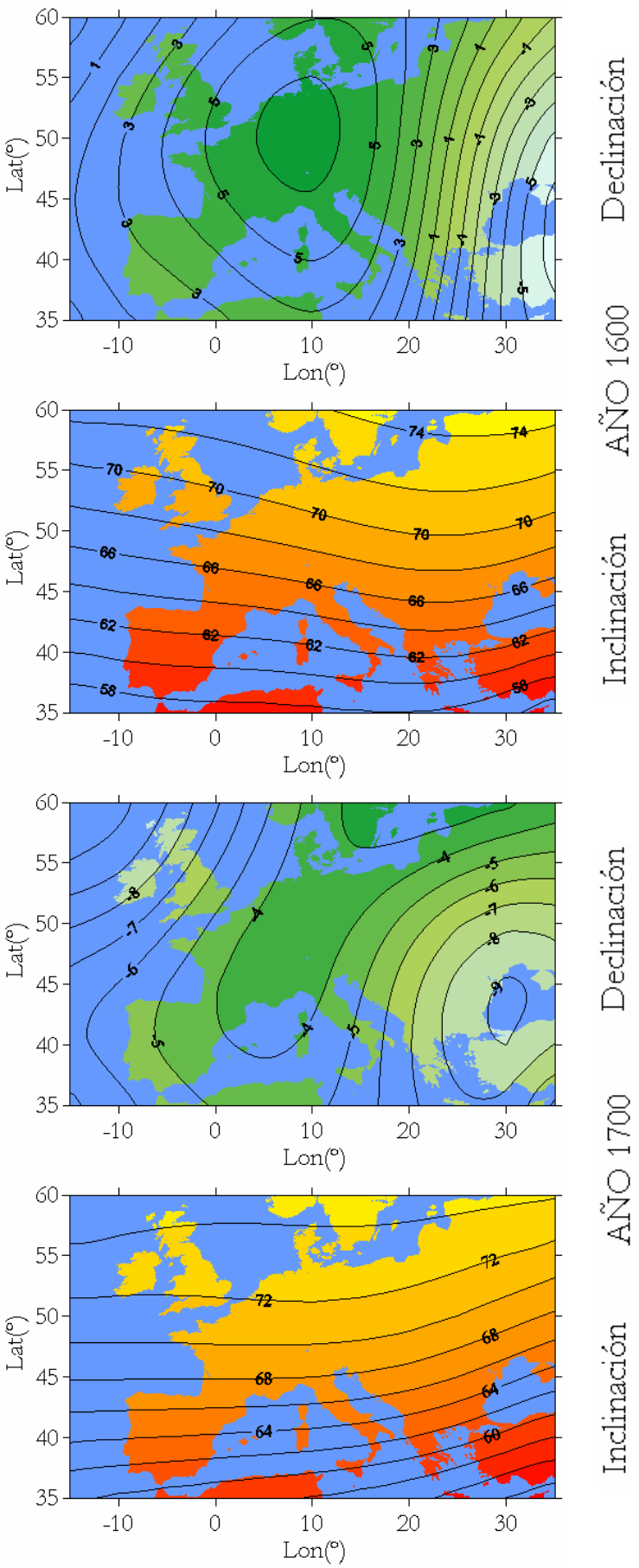

Declinación
AÑO 600
Inclinación
Declinación
AÑO 700
Inclinación
Lat(°)
Lon(°)

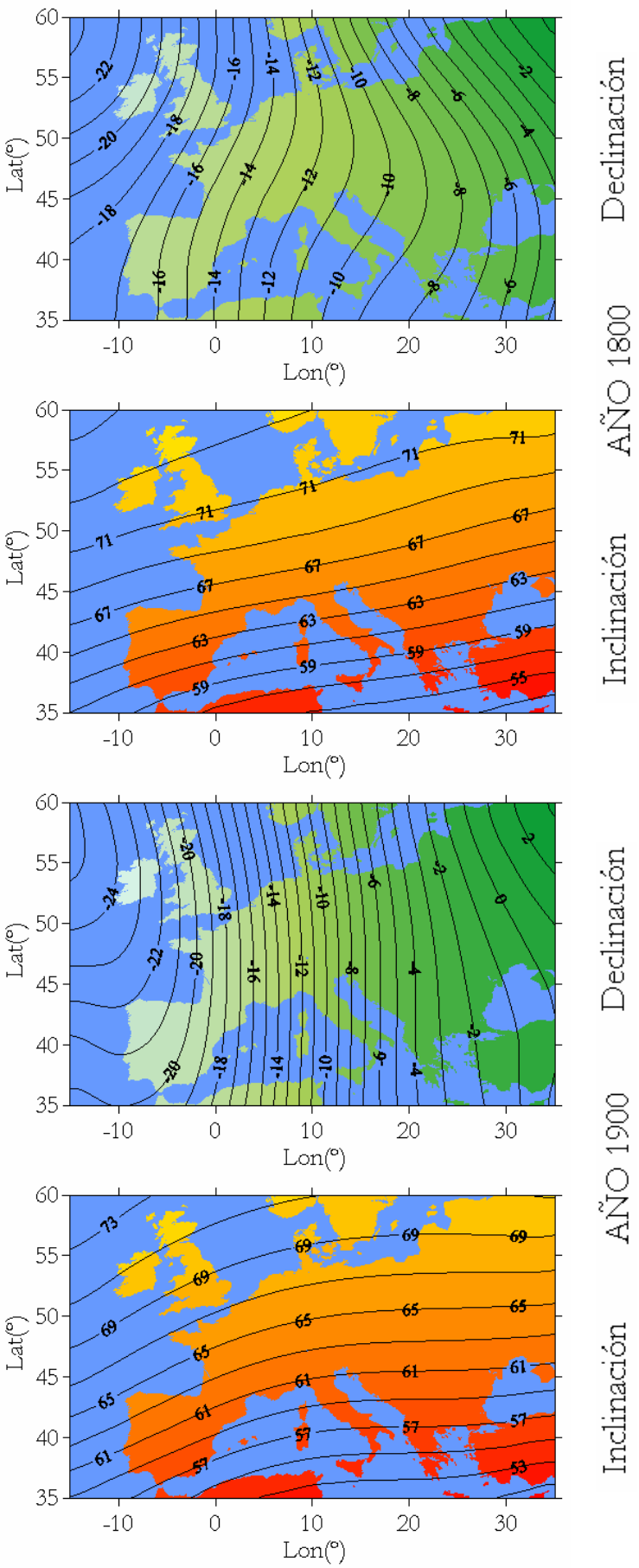

Declinación
AÑO 800
Inclinación
Declinación
AÑO 900
Inclinación
Lat(º)
Lon(º)


Declinación
AÑO 1000
Inclinación
Declinación
AÑO 1100
Inclinación
Lat(º)
Lon(º)


Declinación
AÑO 1200
Inclinación
Declinación
AÑO 1300
Inclinación
Lat(º)
Lon(º)


Declinación
AÑO 1400
Inclinación
Declinación
AÑO 1500
Inclinación
Lat(°)
Lon(°)


Declinación
AÑO 1600
Inclinación
Declinación
AÑO 1700
Inclinación
Lat(º)
Lon(º)


Declinación
AÑO 1800
Inclinación
Declinación
AÑO 1900
Inclinación
Lat(°)
Lon(°)

Anexo 7

Análisis temporal de los primeros coeficientes de Gauss del modelo SCHA.

En la tabla 7.3 se dieron los coeficientes de Gauss del modelo SCHA. Estos coeficientes, dados en función del primer coeficiente g_0^0 (es decir, que están normalizados a su valor) indican el grado de contribución armónica correspondiente a los índices k, m y n. A continuación se representará en función del tiempo el valor de los primeros coeficientes de Gauss del modelo SCHA (coeficientes de mayor contribución armónica del modelo). En la figura A7.1 se representa dichos coeficientes en función del tiempo y en la figura A7.2 el error de dichos coeficientes.

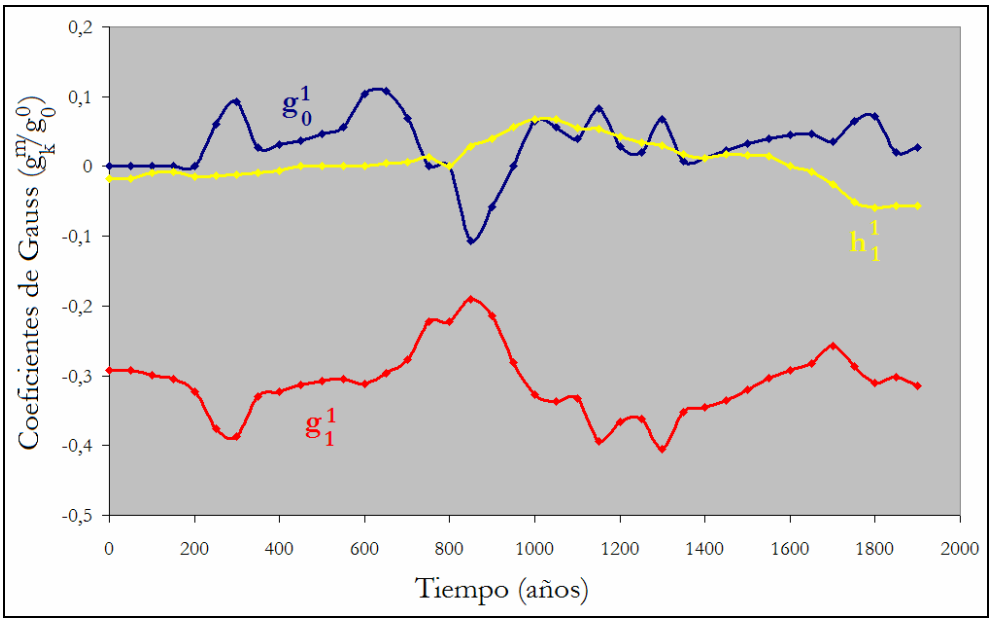


Figura A7.1. Evolución temporal de los tres primeros coeficientes de Gauss del modelo SCAH.

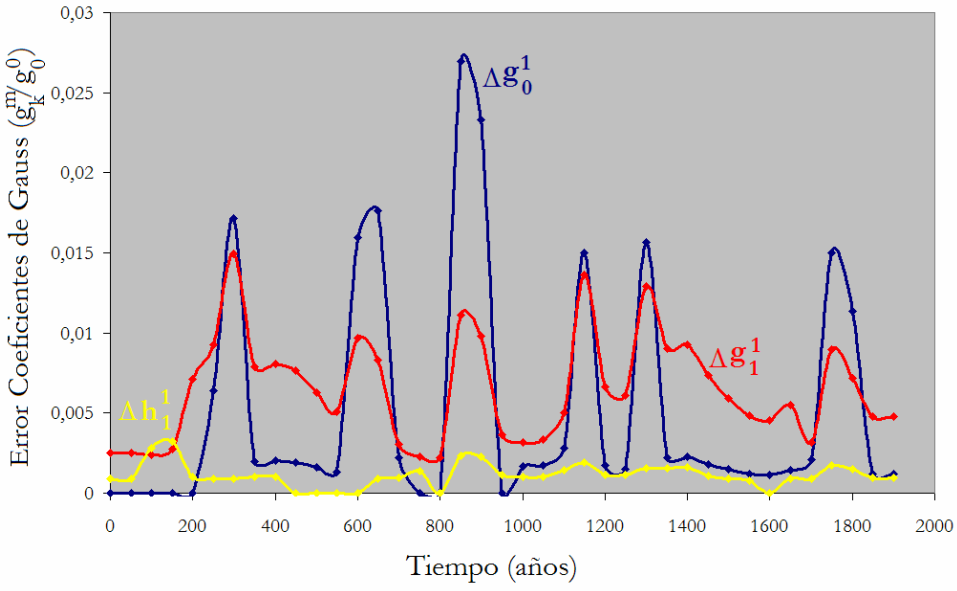


Figura A7.2. Errores de los tres primeros coeficientes de Gauss dados en la figura A7.1

Como se observa en la figura A7.1 el coeficiente de mayor contribución es el g_1^1 , cuyos parámetros SCHA son m = k = 1 y n = 3.1196. Los otros dos coeficientes dan una contribución armónica análoga. Será este coeficiente (g_1^1) por su mayor contribución, el que defina las características generales del modelo SCHA.

Vemos, además, como la evolución temporal de los coeficientes reflejan las perturbaciones que ya vimos en las curvas de variación paleosecular para unas ciertas épocas. Perturbaciones que quedan reflejadas de forma más clara en la figura 7A.2, donde se representa el error de dichos coeficientes. Vemos como éste aumenta en aquellos intervalos temporales donde las CVPS varían de forma rápida (CVPS de Bulgaria, ver capítulo 7).

ii. Referencias.

Aitken, M.J., **1974**. *Physics and archaeology*. Clarendon Press. Oxford.

Alldredge, L.R., **1981**. *Rectangular Harmonic Analysis Applied to the Geomagnetic Field*. J. Geophys. Res., 86 No.B4, 3021-3026.

An, Z.C., Ma S.Z., Tan D.H., Barraclough D.R, and Kerridge D.J., **1992**. *A Spherical Cap Harmonic Model of the Satellite Magnetic Anomaly Field over China and Adjacent Areas*. J. Geomag. Geoelectr. 44, 243-252.

Ardizone, J.A., **1998**. *Análisis de datos aeromagnéticos. Metodologías y aplicación al levantamiento aeromagnético de España peninsular*. Instituto Geográfico Nacional, Publicación técnica nº 32.

Barraclough, D.R., **1974**. *Spherical Harmonic analyses of the geomagnetic field for eight epochs between 1600 and 1910*. Geophys. J. Int., 36, 497-513.

Barraclough D.R., **1976**. *Spherical harmonic analysis of the geomagnetic secular vaiation. A review of methods*. Phys. Earth Planet. Inter., 12, 365-382.

Barraclough D.R., **1978**. *Spherical harmonic models of the geomagnetic field*. Geomagn. Bull. Inst. Geol. Sci., 8, 66 pp.

Barraclough, D.R. y Clarke, E., **1988**. *Statistical analysis of geomagnetic variations*. B.G.S. Tec. Rep. WM/88/15C, 62 pp.

Bucur, I., **1994**. *The direction of the terrestrial magnetic field in France during the last 21 Centuries*. Phys. Earth Planet. Inter., 87, 95-109.

Bullard, E.C., **1949**. *Electromagnetic induction in a rotating sphere*. Phil Trans. Roy. Soc. London A, 199, 413-443.

Bullard, E.C., **1967**. *The removal of trend from magnetic surveys*. Earth Planet Sci. Lett., 2, 293-300.

Butler, R.F., **1992**. *Paleomagnetism*. Blackwell Scientific Publications, Cambridge, 315pp.

Cain, J.C., Schmitz D.R. y Muth L., **1984**. *Small-scale features in the Earth's magnetic field observed by MAGSAT*. J. Geophys. Res., 89 No.B2, 1070-1076.

Carlut, J. y Courtillot, V., **1998**. *How complex is the time-averaged geomagnetic field over the last 5 million years*. Geohpys. J. Int. 134, 527-544.

Chapman, S. y Bartels, J., **1940**. *Geomagnetism*. 2 vols., Oxford: Clarendon Press, 1049 pp.

Chauvin, A., Y. Garcia, Ph. Lanos, and F. Laubenheimer, **2000**. *Paleointensity of the geomagnetic field recovered on archaeomagnetic sites from France*. Phys. Earth Planet. Inter., 120, 111-136.

Chiappini, M., De Santis, A., Dominici, G. y Torta, J.M., **1999**. *A normal reference field for the Ionian Sea Area*. Phys. Chem. Earth (A), Vol. 24, No. 5, pp. 433-438.

Constable, C.G., Johnson, C.L., Lund, S.P., **2000**. *Global geomagnetic field models for the past 3000 years: transientor permanent flux lobes*. Phil. Trans. R. Soc. Lond. A 358, 991–1008.

Daly, L., and M. Le Goff, **1996**. *An updated and homogeneous world secular variation data base. 1. smoothing of the archaeomagnetic results*. Phys. Earth Planet. Inter., 93, 159-190.

De Santis A., **1991**. *Translated origin spherical cap harmonic analysis*. Geophys. J. lnt. 106, 253-263.

De Santis A., **1992**. *Conventional spherical harmonic analysis for regional modelling of the geomagnetic field*. Geophys. Res. Lett. 19, N. 10, 1065-1067.

De Santis, A. y Kerridge, D.J. **1989**. *Programmi in Fortran per la determinazione di un modello del campo geomagnetico in armoniche sferiche sviluppate su calotta sferica*. Proceedings of the Workshop "Informatics & Earth's Sciences", Sarnano, Italy.

De Santis A., and Torta J.M., **1997a**. *Spherical cap harmonic analysis: a comment on its proper use for local gravity field representation*. Journal of Geodesy 71, 526-532.

De Santis A., and Torta J.M., **1997b**. *Spherical cap harmonics and ordinary spherical harmonics*. Abstracts of the 8th Scientific Assembly of the lnternational Association of Geomagnetism and Aeronomy (IAGA). Uppsala.

De Santis A., Kerridge D.J., and Barraclough D.R., **1989**. *A Spherical Cap Harmonic Model of the Crustal Magnetic Anomaly Field in Europe by Magsat*. In Geomagnetism and Paleomagnetism, ed. F.J. Lowes et al., pp. 1-17, Kluwer, Dordrecht.

De Santis A., Battelli O., and Kerridge D.J., **1990**. *Spherical cap harmonic analysis applied to regional field modelling for Italy*. J. Geomag. Geoelect. 42, 1019-1036.

De Santis A., Falcone C., and Torta J.M., **1996**. *Simple additional constraints on regional models of the geomagnetic secular variation field*. Phys. Earth Planet. lnt. 97, 15-21.

De Santis A., Chiappini M., Torta J.M., and von Frese R.R.B., **1999a**. *Development of an improved geomagnetic reference field of Antarctica*. Annali di Geofisica, 42, N. 2, 261-264.

De Santis A., Torta J.M., and Lowes F.J., **1999b**. *Spherical Cap Harmonics revisited and their relationship to ordinary Spherical harmonics*. Phys. Chem. Earth (A) 24, N.11-12, 935-941.

De Santis A., Torta J.M., and Gaya-Piqué L.R., **2002a**. *The first Antarctic geomagnetic Reference Model (ARM)*. Geophys. Res. Lett. 29, N. 8,33.1-33.4.

Draper N.R., and Smith H., **1966**. *Applied regression analysis*. John Wiley & Sons, New York.

Gallet, Y., A. Genevey, and M. Le Goff, **2002**. *Three millennia of directional variations of the Earth's magnetic field in western Europe as revealed by archaeological artefacts*. Phys. Earth Planet. Inter., 131, 81-89.

García, A., Torta, J.M., Curto, J.J. y Alberca, L.F., **1990**. *Modelo de la variación secular del campo geomagnético en España. Período 1970 – 1988*. Revista de Geofísica, 46, 219-230.

García, A., Torta, J.M., Curto, J.J. y Sanclement, E., **1991**. *Geomagnetic Secular Variation oves Spain 1970 – 1988 by jeans of Spherical Cap Harmonic Análisis*. Phys. Earth Plnet. Inter., 68, 65-75.

Gaya-Piqué, **2004**. *Analysis of the geomagnetic field in Antartica from near-surface and satellite data*. PhD Thesis, Observatori de l'Ebre, URL, 162 pp.

Gaya-Pique L.R., De Santis A., Torta J.M., **2004**. *Use of Champ Magnetic Data to Improve the Antarctic Geomagnetic Reference Model. In: Earth Observation with CHAMP. Results from three years in orbit*. Reigber C., Luhr H., Schwintzer P., Wickert J. eds, Springer-Verlag, Heidelberg, 317-322, 2004.

Gómez-Paccard, M., **2006**. *Estudio de la variación de la dirección e intensidad del campo geomagnético en España durante los últimos dos mil años*. Tesis doctoral. Universidad Complutense de Madrid. Universidad de Rennes I.

Gómez-Paccard, M., G. Catanzariti, V.C.Ruiz-Martínez, G. McInstosh, J.I. Núñez, M.L. Osete, Ph. Lanos, A. Chauvin, D.H. Tarling, D. Bernal-Casasola, J. Tiritó and archeological working group (A. Sáez-Espligares, I. García-Villanueva, J.A. Gisbert-Santona, M.A. Hervás, P. Jiménez-Castillo, M. Mesquida-García, I. García-Ramírez González, M. Retuerce, D. Urbina and C. Urquijo), **2006a**. *A cathalogue of Spanish archaeomagnetic data*. Geophysics Journal International, accepted.

Gómez-Paccard, M., Ph. Lanos, A. Chauvin, G. McInstosh, M.L. Osete, G. Catanzariti, V.C.Ruiz-Martínez and J.I. Núñez, **2006b**. *The first Archaeomagnetic secular variation curve for the Iberian Peninsula. Comparison with other data from Western Europe and with global geomantetic field models*. Geochemistry, Geophysics, Geosystem, submitted.

Haines, G.V., **1968**. *Polynomial estimation of certain geomagnetic quantities, applied to a survey of Scandinavia*. Pub. Dom. Obs., 37 No.4, 79-112.

Haines G.V., **1985a**. *Spherical Cap Harmonic Analysis*. J. Geophys. Res. 90 (B3), 2583-2591.

Haines G.V., **1985b**. *Magsat Vertical Field Anomalies above 40ºN from Spherical Cap Harmonic Analysis*. J. Geophys. Res. 90 (B3), 2593-2598.

Haines G.V., **1985c**. *Spherical Cap Harmonic Analysis of Geomagnetic Secular Variation over Canada 1960-1983*. J. Geophys. Res. 90 (B14), 12563-12574.

Haines, G.V., **1988**. *Computer programs for spherical cap harmonic analysis of potential and general fields*. Computers & Geosciences., 14 No.4, 413-447.

Haines G.V., **1990a**. *Regional magnetic field modelling: a review*. J. Geomag. Geoelect. 42, 1001-1018.

Haines, G.V., **1990b**. *Modelling by series expansions: a discussion*. J. Geomagn. Geoelectr., 42, No.9, 1001-1018.

Haines, G.V., **1991**. *Power spectra of sub-periodic functions*. Phys. Earth Planet. Inter., 65, 231-247.

Haines G.V., and Newitt L.R, **1986**. *Canadian geomagnetic reference field 1985*. J. Geomag. Geoelectr. 38, 895-921.

Haines G.V., and Newitt L.R., **1997**. *The Canadian geomagnetic reference field 1995*. J. Geomag. Geoelectr. 49, 317-336.

Haines G.V., and Torta J.M., **1994**. *Determination of Equivalent Currents Sources from Spherical Cap Harmonic Models of Geomagnetic Field Variations*. Geophys. J. Int. 118,499-514.

Hatakeyama, T., Kono, M., **2002**. *Geomagnetic field model for the last 5 Myr: time averaged field and secular variation*. Phys. Earth Planet. Interiors 133, 181-215.

Hongre, L., Hulot, G., Khokhlov, A., **1998**. *An analysis of the geomagnetic field over the past 2000 years*. Phys. Earth Planet. Interiors 106, 311–335.

IAGA Division V, Working Group VMOD: Geomagnetic Field Modeling, **2005**. *The 10th-Generation International Geomagnetic Reference Field*. Geophysical Journal International, 161, 561

IGN, Servicio de Geomagnetismo, **2006**. *Mapa Geomagnético de España, 2005.0*. Pendiente de publicación.

Jackson, A., Jonkers, A.R.T., Walker, M.R., **2000**. *Four centuries of geomagnetic secular variation from historical records*. Phil. Trans. R. Soc. Lond. A 358, 957-990.

Jacobs, J.A. (editor), **1987**. *Geomagnetism*. Ed. Academic Press.

Johnson, C.L., Constable, C.G., **1997**. *The time-averaged geomagnetic field: global and regional biases for 0-5 Ma*. Geohpys. J. Int. 131, 643–666.

Johnson, C.L., Constable, C.G., **1998**. *Persistently anomalous Pacific geomagnetic fields*. Geohpys. Res. Lett. 25, 1011–1014.

Kelly, P., Gubbins, D., **1997**. *The geomagnetic field over the past 5Myr*. Geophys. J. Int. 128, 315–330.

Korte M., and Haak V., **2000**. *Modelling European Magnetic Repeat Station and Survey Data by SCHA in search ofTime-Varying Anomalies*. Phys. Earth Planet. Int. 122, 205-220.

Korte M., and Holme R., **2003**. *Regularization of spherical cap harmonics*. Geophys. J. Int. 153, 253-262.

Korte, M., and C. G. Constable, **2003**. *Continuous global geomagnetic field models for the past 3000 years*. Phys. Earth Planet. Inter., 140, 73–89.

Korte, M., A. Genevey, C.G. Constable, U. Frank, and E. Schnepp, **2005**. *Continuous geomagnetic field models for the past 7 millennia: 1. A new global data compilation*. Geochem. Geophys. Geosyst., 6, Q02H15, doi:10.1029/2004GC000800.

Korte, M., and C.G. Constable, **2005**. *Continuous geomagnetic field models for the past 7 millenia: 2. CALS7K*. Geochem. Geophys. Geosyst, 6, Q02H16, doi:10.1029/2004GC000801.

Kovacheva, M., **1984**. *Some archaeomagnetic conclusions from three archaeological localities in north-west Africa*. C. R. Acad. Sci. Bulgaria, 37, 171-174.

Kovacheva, M., **1997**. *Archaeomagnetic database from Bulgaria: The last 8000 years*. Phys. Earth Planet. Inter., 102, 145–151.

Kovacheva, M., y A. Toshkov, **1994**. *Geomagnetic field variation: Bulgarian archaeomagnetic data. Part I: The last 2000 years*. Surv. Geophys., 15, 673-701.

Kovacheva, M., N. Jordanova, and V. Karloukovski, **1998**. *Geomagnetic field variations as determined from Bulgaria Archaeomagnetic data. Part II: The last 8000 years*. Sur. Geophys., 19, 431-460.

Kovacheva, M. y Jordanova, N., **2001**. *Bulgarian archaeomagnetic studies: A review of methodological progress and applications in archaeology*. Journal of Radioanalytical and Nuclear Chemistry, Vol. 247, No. 3, 685.696

Langel, R. A., **1992**. *International Geomagnetic Reference Field: The sixth generation*. J. Geomagn. Geoelectr., 44, 679-707.

Langel RA, and Estes R.H., **1982**. *A geomagnetic field spectrum*. Geophys. Res. Lett. 9, 250-253.

Lanos, Ph., **2004**, *Bayesian inference of calibration curves: application to archaeomagnetism, in Tools for constructing chronologies: crossing disciplinary boundaries*. Vol. 177, edited by C. Buck, and A. Millard, pp. 43-82, Springer-Verlag, London.

Lanos, Ph., M. Le Goff, M. Kovacheva, and E. Schnepp, **2005**. *Hierarchical modelling of archaeomagnetic data and curve estimation by moving average technique*, Geophys. J. Int., 160, 440-476.

Le Goff, M., **1990**. *Lissage et limites d'incertitude des courbes de migration polaire: pondération des données et extension bivariate de la statistique de Fisher*. C. R. Acad. Sci. Paris, 311(Serie II), 1191-1198.

Le Goff, M., B. Henry, and L. Daly, **1992**. *Practical method for drawing VGP path*. Phys. Earth Planet. Inter., 70, 201-204.

Marín, V.M. y Pavón Carrasco, F.J., **2006**. *Modelización Isopórica del campo geomagnético para la época 2005.0. Península e Islas Baleares*. 5ª Asamblea Hispano Portuguesa de Geodesia y Geofísica. Admitido.

Márton, P., **2003**. *Recent achievements in archaeomagnetism in Hungary*. Geophys. J. Int., 153, 675-690.

Marton, P. and E. Ferencz, **2006**. *Hierarchical versus stratification statistical analysis of archaeomagnetic directions: the secular variation curve for Hungary*. Geophys. J. Int., 164, 484-489.

McElhinny, M. W., and J. Lock, **1996**. *IAGA paleomagnético databases with Access*. Surv. Geophys., 17, 575-591.

Merrill, R.T. McElhinny, M.W., McFadden, P.L., **1996**. *The magnetic field of the Earth*, Ed. Academic Press.

Moutmir, A., **1995**. *Analyses magnétiques de terres cuites protohistoriques en France. Apports en archéomagnétisme (Premier millénaire avant J.C.) et en archéologie*. Ph.D. Thesis, Muséum National d'histoire Naturelle, Paris, 245 pp.

Najid, D., **1986**. *Palaeomagnetic studies in Morocco*, PhD thesis, Univ. of Newcastle upon Tyne, Newcastle upon Tyne, UK.

Noel M. and C.M. Batt, **1990**. *A method for correcting geographically separated remanence directions for the purpose of archeomagnetic dating*. Geophysics Journal International, 102, 753-756.

Núñez, J.I., **2005**. *Estudio arqueomagnético de la Península Ibérica: Primera curva de variación secular de los últimos tres milenios*. Tesis doctoral, Universidad Complutense de Madrid, Madrid.

Ohno, M. and Y. Hamano, **1993**. *Spherical harmonic analysis of paleomagnetic secular variation curves*. Central Core Earth, 3, 205-212.

Olver F.W.J., and Smith J.M., **1983**. *Associated Legendre Functions on the cut*. J. Computat. Phys. 51, 502-518.

Parkinson W.D., **1983**. *Introduction to Geomagnetism*. Scottish Academic Press, Edinburgh.

Pavón Carrasco, F.J., Ruiz-Martínez, V.C., Catanzariti, G., Montes López, R. y Villa Valdés, A., **2006**. *Estudio arqueomagnético de seis estructuras en el castro Chao Samartín, Asturias*. 5ª Asamblea Hispano Portuguesa de Geodesia y Geofísica. Admitido.

Quidelleur, X., J.-P. Valet, V. Courtillot, and G. Hulot, **1994**. *Long-term geometry of the geomagnetic field for the last five million years: An updated secular variation database*. Geophys. Res. Lett., 21, 1639-1642.

Ralston, A. y Wilf, H. (editores). Autor: Efroymson, M.A., **1967.** *Mathematical Methods for Digital Computers*. Volumen 1.

Rotanova N.M., and Odintsov S.D., **1999**. *Model of the Magsat Magnetic Anomaly Field over Europe using SphericaI Cap Harmonic Analysis*. Phys. Chem. Earth (A) 24, N. 5,455-459.

Rotanova N.M., Odintsov S.D., Sas-Uhrynowski A., and Welker E., **2000**. *The Magnetic Anomaly Field over Poland and Adjacent Regions by using Magsat Satellite Data*. Acta Geophysica Polonica 48, N. 2, 223-240.

Sabaka, T.J., Langel, R.A., Baldwin, R.T., Conrad, J.A., **1997**. *The geomagnetic field 1900 1995, including the large-scale field from magnetospheric sources, and the NASA candidate models for the 1995 revision of the IGRF*. J. Geomag. Geoelectr. 49, 157–206.

Sabaka, T.J., Olsen, N., Langel, R.A., **2002**. *A comprehensive model of the quiet-time, near-earth magnetic field: phase 3*. Geohpys. J. Int. 151, 32–68.

Schnepp, E., Pucher, R., Goedicke, C., Manzano, A., M¨uller, U. & Lanos, P., **2003**. *Paleomagnetic directions and TL dating from a bread oven-floor sequence in Lübeck (Germany): a record of 450 yr of geomagnetic secular variation*. J. geophys. Res., 108(B2), 2078, doi:10.1029/2002JB001975.

Schnepp, E., Pucher, R., Reinders, J., Hambach, U., Soffel, H.C. & Hedley, I., **2004**. *A German catalogue of archaeomagnetic data*. Geophys. J. Int., 157, 64–78.

Schnepp, E. and Ph. Lanos, **2005**. *Archaeomagnetic secular variation in Germany during the past 2500 years*. Geophys. J. Int., 163, 479-490.

Tarling, D.H., **1983**. *Palaeomagnetism: Principles and applications in geology, geophysics and archaeology*. pp 279, Chapman and Hall, London.

Tarling, D.H. & Dobson, M.J., **1995**. *Archaeomagnetism: An error assessment of fired material observations in the British directional database*. J. Geomagn. Geoelectr., 47, 5–18.

Tarling, D.H., **1999**. *The global archaeomagnetic data base*. Geophys. Res. Abstr., 1: 161, http://www.ngdc.noaa.gov/seg/potfld/paleo.shtml.

Tauxe, L., **2005**., *Lectures in Paleomagnetism*, http://earthref.org/MAGIC/books/Tauxe/2005/

Thébault E., Schott J.J., and Mandea M., **2002**. *Geomagnetic field modelling on small spherical caps*. EGS XXVII General Assembly, EGS02-A-04673, SE6.07 -1 WE2A-003, Nice, France, 2002.

Thellier, E., **1937**. *Sur l'aimantation dite permanente des basaltes*. C.R. Acad. Sci. Paris, t.204: 876-879.

Thellier, E., **1938**.*Sur l'aimantation des terres cuites et ses applications géophysiques*, Ann. Inst. Phys. Globe Univ. Paris, 16, 157-302.

Thellier, E., **1981**. *Sur la direction du champ magnétique terrestre en France durant les deux derniers millénaires*. Phys. Earth Planet. Inter., 24, 89-132.

Thellier, E. and Thellier, 0., **1952**. *Sur Ia direction du champ magnétique terrestre, dans Ia region de Trèves*, vers 380 aprés J.C. C.R.Acad Sci. Paris, 234: 1464—1466.

Thellier, E. and Thellier, 0., **1959**. *Sur l'intensité du champ magnétique terrestre, dans le passé historique et géologique*. Ann. Goephys., 15: 285—376.

Torta, J.M., **1992**. *Modelización regional del campo geomagnético seobre España: campo anómalo, variación secular y campo de referencia*. Publicaciones del Observatorio del Ebro, Memoria 15, Roquetes-Tarragona.

Torta J.M., and De Santis A., **1996**. *On the Derivation of the Earth's Conductivity Structure by means of Spherical Cap Harmonic Analysis*. Geophys. J. Int. 127,441-451.

Torta, J.M., Curto, J.J. y García, A., **1991**. *Geomagnetic anomaly field of Canary Islands derived from MAGSAT satellite*. Les Cahiers du Centre Européen de Géodynamique et de Séismologie, 4.

Torta J.M., García A., and De Santis A., **1992**. *New representation of geomagnetic secular variation over restricted regions by means of SCHA: application to the case of Spain*. Phys. Earth Planet. Inter. 74,209-217.

Torta J.M., García A., and De Santis A., **1993**. *A geomagnetic reference field for Spain at 1990*. J. Geomag. Geoelect. 45,573-588.

Torta J.M., Curto J.J., and Bencze P., **1997**. *Behavior of the Quiet Day Ionospheric Current System in the European Region*. J. Geophys. Res. 102 (A2), 2483-2494.

Torta J.M., Gaya-Piqué L.R, Solé J.G., Blanco I., and García A., **1999**. A new geomagnetic observatory at Livingston Island (South Shetland Islands): implications for future regional magnetic surveys. Annali di Geofisica 42, N. 2, 141-151.

Torta, J.M., Gaya-Piqué, LR., Núñez, J.I., Osete López, M.L. **2000**. *Modelización regional del campo geomagnético en Europa a partir de direcciones paleomagnéticas en yacimientos arqueológico*. 2ª Asamblea Hispano Portuguesa de Geodesia y Geofísica. S08-06. 307-308.

Torta J.M., Gaya-Piqué L.R, Riddick J.C., and Turbitt C.W., **2001**. *A partly manned geomagnetic observatory in Antarctica provides a reliable data set*. Contributions to Geophysics and Geodesy 31, N. 1,225-230.

Torta J.M., De Santis A., Chiappini M., and von Frese RRB, **2002**. *A model of the Secular Change of the Geomagnetic Field for Antarctica*. Tectonophysics 347, 179-187.

Heiskanen, A. y H. Moritz, **1985**. *Geodesia Física*. Madrid : Instituto Geográfico Nacional : Instituto de Astronomía y Geodesia, 371 pp, 22 cm.